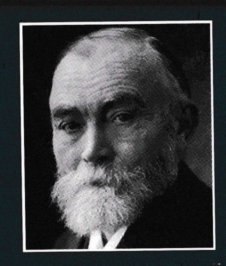
Filosofía contemporánea

Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas

Gottlob Frege



Gottlob Frege (1848–1925). Lógico, matémático y filósofo alemán, fundador de la lógica moderna, de la semántica filosófica y uno de los padres de la filosofía analítica. Enseñó en la Universidad de Jena, Turingia, Alemania.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

Colección: FILOSOFÍA CONTEMPORÁNEA
Serie: ANTOLOGÍAS

GOTTLOB FREGE

ESCRITOS SOBRE LÓGICA, SEMÁNTICA Y FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

Traducciones:
Xavier de Donato, Carlos Ulises Moulines,
Hugo Padilla y Carlos Pereda

Selección de textos:
Maite Ezcurdia, Mario Gómez Torrente
y Margarita M. Valdés

Compilación, coordinación, presentación y revisión técnica:
MARGARITA M. VALDÉS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
MÉXICO 2016

B3245.
F22.E7
2016

Frege, Gottlob, 1848-1925, autor. [Obras. Selecciones. Español].

Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas / Gottlob Frege; traducciones Xavier de Donato, Carlos Ulises Moulines, Hugo Padilla y Carlos Pereda; selección de textos Maite Ezcurdia, Mario Gómez Torrente y Margarita M. Valdés; compilación, coordinación, presentación y revisión técnica Margarita M. Valdés. - Primera edición.

595 páginas. - (Colección Filosofía Contemporánea. Serie Antologías).

ISBN 978-607-02-7823-5

1. Lógica. 2. Lógica simbólica y matemática. 3. Matemáticas - Filosofía. I. Donato, Xavier de, traductor. II. Moulines, Carlos Ulises, traductor. III. Padilla, Hugo, traductor. IV. Pereda, Carlos, 1944- , traductor. V. Ezcurdia, Maite, compilador. VI. Gómez Torrente, Mario, 1967- , compilador. VII. Valdés, Margarita M. (Valdés Villareal), compilador.

LIBRUNAM 1896270

Formación tipográfica:
J. Alberto Barrañón C.

Cuidado de la edición:
Margarita M. Valdés, Baruch Peralta y J. Alberto Barrañón C.

Primera edición: 10 de abril de 2016
D.R. © 2016 Universidad Nacional Autónoma de México

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán,
C.P. 04510, México, Distrito Federal
Tels.: 5622 7437 y 5622 7504; fax: 5665 4991
Correo electrónico: libros@filosoficas.unam.mx
Página web: http://www.filosoficas.unam.mx
Todos los derechos reservados

Impreso y hecho en México
ISBN 978-607-02-7823-5

PRESENTACIÓN

El presente libro viene a remplazar uno anterior de escritos de Gottlob Frege publicado en el año de 1972 por el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM en su colección de Filosofía Contempóránea.[1] Por alguna razón, en aquella publicación no se incluyó una presentación ni introducción que diera cuenta de quién fue Gottlob Frege ni de la importancia de su pensamiento para la filosofía contemporánea. Tampoco se incluyeron en aquel libro varios escritos de Frege que resultan clave para apreciar la amplitud y la profundidad de su pensamiento en los campos de la lógica, la semántica filosófica y la filosofía de las matemáticas. En este nuevo volumen hemos pretendido subsanar aquellas lagunas y recoger precisamente los más significativos aportes de Gottlob Frege (Wismar, 1848-Bad Kleinen, 1925) en estas tres áreas del conocimiento filosófico. De allí la división de este volumen en tres partes: lógica, semántica filosófica y filosofía de las matemáticas.

No es una exageración decir que la lógica matemática comienza con la *Conceptografía* de Frege, que la semántica filosófica desarrollada por Frege en los ensayos aquí recogidos da inicio a la filosofía del lenguaje contemporánea, y que la filosofía de las matemáticas que nos ofrece Frege tanto en los *Fundamentos de la aritmética* como en *Las leyes fundamentales de la aritmética* constituye un modelo de trabajo original y riguroso en los fundamentos de la matemática. Por sus aportaciones en

[1] Gottlob Frege, *Conceptografía - Los fundamentos de la aritmética - Otros estudios filosóficos*, traducción de Hugo Padilla, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 1972.

estas tres áreas, Frege puede considerarse uno de los padres de la filosofía analítica contemporánea, al lado de Bertrand Russell y de Ludwig Wittgenstein.

La selección de escritos que aquí se presenta, así como la forma que se le ha dado a este libro, se debe al trabajo conjunto de Maite Ezcurdia, Mario Gómez Torrente y la que esto escribe. Luego de numerosas reuniones y discusiones sobre los materiales que tendrían que incluirse en este volumen, se llegó a la selección de textos de Frege que aquí se ofrece al lector.[2] El libro está dirigido, especialmente, a estudiantes de filosofía que tengan interés en conocer y profundizar en diversos aspectos del pensamiento de nuestro autor, pero no dudamos que resulte de interés para un público más amplio: matemáticos, lingüistas y mujeres y hombres que trabajen en el campo de la cultura y que se interesen en conocer los orígenes de la lógica moderna, los temas centrales de la filosofía del lenguaje y, más en general, el pensamiento de uno de los más rigurosos filósofos de los siglos XIX y XX.

Gottlob Frege nació en Wismar, pequeña ciudad báltica alemana, el 8 de noviembre de 1848. Allí pasó su infancia y realizó sus primeros estudios hasta concluir el *Gymnasium* y presentar su *Abitur* en 1869. En ese mismo año ingresó en la Universidad de Jena. Allí estudió, especialmente, química, filosofía y matemáticas. Más tarde, pasó a la Universidad de Gotinga en donde continuó su formación en ciencias y matemáticas y recibió en 1873 el grado de doctor con una tesis intitulada "Sobre una representación geométrica de formas imaginarias en el plano".

Un gran conocedor e intérprete de la filosofía de Frege, Michael Dummett, escribe que la vida de Gottlob Frege fue una vida de desilusiones y frustración.[3] Su carrera académica transcurrió en la Universidad de Jena en donde, luego de obtener su doctorado, en 1874, ocupó un puesto de *Privatdozent* que no conllevaba pago de ningún salario regular y sólo le aportaba pagos particulares de los estudiantes que se inscribían en sus cursos; más tarde, en 1879, luego de haber publicado su *Conceptografía* se le nombró Profesor *aussenordentlicher*, es decir,

[2] Agradezco aquí también a Marcus Rossberg su sugerencia de incluir algunas secciones del vol. II de *Las leyes fundamentales de la aritmética*.

[3] Véase Dummett 1981, "Introduction", p. xxxi.

profesor externo o asociado, y sólo después de publicar el primer volumen de otra de sus grandes obras, *Las leyes fundamentales de la aritmética*, en 1893, se le concedió la categoría de Profesor Ordinario. Siempre laboró en el departamento de matemáticas de la Universidad de Jena y nunca se le encomendó una cátedra ni de lógica ni de matemáticas y, menos aún, de filosofía. Debido a lo restringido de su área de trabajo –lógica, filosofía de la lógica, semántica filosófica y fundamentos de la matemática– Frege nunca gozó de fama en el medio filosófico de su tiempo y el valor de su trabajo fue reconocido sólo por un grupo pequeño, aunque muy selecto, de autores; Edmund Husserl, Bertrand Russell y Ludwig Wittgenstein, entre ellos. Su lucha permanente fue contra el psicologismo –la idea de que todo contenido cognitivo, incluyendo el conocimiento lógico, se explica en última instancia mediante los procesos mentales por los que llegamos a adquirirlo–. Los filósofos psicologistas suelen considerar que la teoría del conocimiento se halla a la base de toda la filosofía y que la lógica no es más que una ciencia descriptiva de ciertos procesos cognitivos –de las diversas maneras como de hecho razonamos–, y no una ciencia normativa sobre las inferencias válidas, esto es, sobre la forma que deben tener las inferencias para conducirnos a la verdad siempre que partamos de premisas verdaderas. En contraposición con el psicologismo, Frege consideró que es la lógica la que se halla a la base de toda la filosofía y que ésta nada tiene que ver con procesos psicológicos subjetivos. Sostuvo también que sólo si se tiene una concepción correcta y clara de la lógica se puede llegar a presentar y defender posiciones correctas en otros terrenos de la filosofía. Una obra que ilustra claramente esta manera fregeana de ver la filosofía es el célebre *Tractatus Logico-philosophicus* de Ludwig Wittgenstein.

Dummett ha propuesto dividir la historia intelectual de nuestro autor en cinco periodos.[4]

El primero está constituido por su trabajo lógico que culmina en 1879 con la publicación de su *Conceptografía*, en donde

[4] Véase Dummett 1978, esp. las pp. 89-92. Otros comentaristas de la obra de Frege consideran que es más correcto considerar que hubo sólo cuatro etapas en la evolución del pensamiento de nuestro autor; véase al respecto la introducción de Jesús Mosterín al libro Frege 1971, p. 6.

Frege introduce la idea de cuantificador y presenta por primera vez un sistema lógico formal que incluye toda la lógica proposicional y el cálculo de predicados de primero y segundo nivel. El propósito central de Frege al diseñar este sistema de lógica era contar con un lenguaje libre de ambigüedades que le permitiera presentar pruebas completamente formalizadas de proposiciones –lo que él llamó proposiciones del pensamiento puro– en las que en ningún punto de la prueba se invocase a la intuición, de manera que en ellas se hiciera patente que sólo se apoyan en axiomas lógicos evidentes en sí mismos explícitamente formulados. Desde el inicio de su vida académica Frege consideró urgente dotar a las matemáticas de un fundamento sólido;[5] para ello era indispensable contar precisamente con un lenguaje como el presentado en su *Conceptografía* que, despojado de todo adorno o vestimenta, permitiera mostrar la verdadera naturaleza de las proposiciones básicas o fundamentales de la aritmética, así como apreciar la estructura puramente lógico-deductiva de esta ciencia.

La segunda etapa del desarrollo del pensamiento de Frege está constituida por el trabajo conducente a una de sus obras maestras, *Los fundamentos de la aritmética* –incluida en la presente antología–, en la que expone, en la primera parte, una acerba crítica de diversos intentos de sus predecesores de definir el número y la naturaleza de las verdades aritméticas y, en la segunda parte, presenta su propia concepción del número. Formula un método para definir las nociones básicas de la aritmética en términos puramente lógicos y argumenta que todas las nociones aritméticas se pueden definir en términos de nociones propias de la lógica general y que las leyes de la aritmética pueden ser lógicamente probadas. En esto consiste precisamente el logicismo que tan decididamente abraza Frege en esta obra: la concepción de que la aritmética es a fin de cuentas una parte de la lógica. Cabe notar, sin embargo, que Frege se abstuvo de incluir en su visión logicista a la geometría,

[5] Véase Sluga 1980, p. 42. Sluga considera que Dummett se equivoca al considerar que Frege luchaba contra el idealismo, pues éste había dejado de dominar el ambiente filosófico alemán desde 1830. La reacción de Frege es mejor entendida como una reacción frente al naturalismo imperante en Alemania en la segunda mitad del siglo XIX. Véase Sluga 1980, pp. 17-39.

de la que tuvo siempre una concepción similar a la de Kant, en el sentido de considerar que los juicios de la geometría son verdades sintéticas *a priori*, es decir, verdades cuya justificación requiere apelar a la intuición pura del espacio. En esta obra, publicada en 1884, Frege se presenta ya no sólo como un lógico, sino como un filósofo en toda la extensión de la palabra.

La tercera etapa de la vida filosófica de Frege se extiende desde 1885 hasta 1903, cuando publica el segundo volumen de su segunda obra magna, *Las leyes fundamentales de la aritmética*. En el periodo que va de 1885 a 1893 Frege escribe tres ensayos que constituyen la base de mucho de lo que se ha escrito en el siglo XX y se escribe aún hoy día en el terreno de la filosofía del lenguaje. Se trata de sus artículos "Función y concepto", "Sobre concepto y objeto" y "Sobre sentido y referencia" –todos ellos incluidos en el presente volumen–, en donde Frege rebasa los estrechos límites de la lógica e incursiona en el terreno de la filosofía del lenguaje natural y la metafísica. En estas investigaciones Frege se proponía remediar algunas deficiencias que había descubierto en su trabajo lógico anterior y aclarar algunas cuestiones centrales de su filosofía de la lógica. A la vez que trabajaba en estos temas, escribía *Las leyes fundamentales de la aritmética*, obra en la que, haciendo uso del lenguaje formal introducido en su *Conceptografía*, pretende llevar a cabo el programa diseñado en *Los fundamentos de la aritmética*; esto es, presentar la teoría de los números cardinales como un sistema formal, con axiomas, reglas de inferencia y pruebas formales de las leyes básicas de la aritmética. El primer volumen de esta obra se publicó en 1893 y tuvo poca repercusión. Sin embargo, en el prefacio y la introducción a ese primer volumen de *Las leyes fundamentales* –incluidos en la presente antología– encontramos tal vez la exposición más precisa debida a la pluma de Frege de su filosofía de la lógica en ese periodo. El segundo volumen de *Las leyes fundamentales de la aritmética* fue publicado casi diez años después, en 1903. En él Frege completa su teoría de los números cardinales y, luego de una larga y dura crítica a diversas teorías de los números irracionales, expone su teoría de los números reales como razones de magnitudes. Hemos incluido en la presente antología varias secciones de este segundo volumen de *Las leyes fundamentales*, entre ellas aquellas

en las que Frege expone los requisitos que debe satisfacer toda definición de un concepto: la compleción y la simplicidad. La obra incluye también una teoría irrestricta de las clases –una especie de teoría intuitiva de los conjuntos– que motivó la famosa objeción de Bertrand Russell formulada en una breve carta –que incluimos también en el presente volumen– al sistema aritmético de Frege. Esa carta llegó a manos de Frege cuando el segundo volumen de *Las leyes fundamentales* estaba ya en la imprenta. Frege añadió un epílogo o apéndice a su obra en el que trató de lidiar con dicha objeción modificando el axioma de comprehensión que daba lugar a la contradicción señalada por Russell. Hemos incluido también en esta antología ese apéndice en el que Frege trata de responder a la paradoja descubierta por Russell.

Luego de la publicación del segundo volumen de *Las leyes fundamentales de la aritmética*, Frege pasó por un largo periodo de poca productividad creativa. Polemizó con críticos, siguió refinando sus anteriores investigaciones e intentó en varias ocasiones escribir un libro de filosofía de la lógica que nunca llegó a concretar. En la Parte I de esta antología incluimos varios textos sobre la naturaleza de la lógica que Frege escribió entre 1897 y 1915, que forman parte precisamente de aquellos intentos y que nunca publicó en vida.

La última etapa del pensamiento filosófico de Frege se desarrolla entre 1918 y 1923. De este periodo se destacan tres originales ensayos que Frege publicó en los *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus* [*Contribuciones a la filosofía del idealismo alemán*] y que aparentemente estaban destinados a formar parte de aquel libro sobre la filosofía de la lógica que nunca llegó a completar. Hemos incluido en esta antología uno de estos tres ensayos, "El pensamiento: una investigación lógica", escrito en 1918. En éste Frege aborda no sólo cuestiones semánticas, sino también metafísicas. Argumenta, primero, que la cuestión de la verdad o la falsedad sólo se plantea en relación con los sentidos expresados por las oraciones, a los que llama "pensamientos", y, luego, que la verdad no consiste en ningún tipo de correspondencia. Examina también en ese ensayo las peculiaridades de las oraciones en las que figuran "deícticos", en especial la dificultad que plantea caracterizar los pensamientos expresados por oraciones en las que quien las emite usa el pronombre personal "yo", pues argumenta que el pensamiento así expresado no es el mismo que el expresado por otra oración que resulte de sustituir "yo" por el nombre propio del emisor de la oración.[6] Explora el comportamiento de las cláusulas subordinadas en las atribuciones de actitudes proposicionales como, por ejemplo, "Miguel cree que Homero escribió *La Iliada*", o "Ana desea estudiar latín". En ellas parece fallar el principio de sustitución de idénticos *salva veritate*. Argumenta que dichas cláusulas en esos contextos no tienen su significado habitual, sino que refieren a su propio sentido, esto es, a los pensamientos por ellas expresados. Defiende el carácter objetivo de los pensamientos, su naturaleza no psicológica (no subjetiva) y argumenta que pertenecen a un ámbito metafísico peculiar, diferente del mundo físico y del mundo psicológico, en donde existen independientemente de que los hablantes los capten o los consideren en su mente.

Como se puede juzgar a partir de lo anterior, en el presente volumen hemos tratado de ofrecer una amplia panorámica del trabajo de Gottlob Frege que abarca obras suyas que fueron escritas entre 1879 y 1918 y que cubren lo que consideramos fueron sus más importantes aportaciones a los campos de la lógica, la semántica filosófica y la filosofía de las matemáticas. Con ello pretendemos poner en las manos del lector el pensamiento de uno de los más notables filósofos de finales del siglo XIX y principios del siglo XX cuyas contribuciones a la lógica y a la filosofía en general continúan siendo temas de discusión en la actualidad.

Quiero mencionar brevemente el hecho de que los textos incluidos en este volumen han sido traducidos por varios traductores. Por una parte, como señalé al inicio de esta presentación, partimos de la idea de complementar un libro que había sido publicado por la UNAM en 1972 y decidimos incluir varias traducciones de aquel libro hechas por Hugo Padilla. A él debemos la traducción de la *Conceptografía* y de *Los fundamentos de la aritmética*. Luego quisimos complementar lo que se publicó

[6] Maite Ezcurdia, en su introducción a la Parte II de este volumen, examina detalladamente algunas de las dificultades a las que estas tesis fregeanas dan lugar.

en aquel libro de 1972 con varios textos de Frege sobre semántica y filosofía de las matemáticas que no formaban parte de aquella antología. Para ello elegimos las traducciones de Carlos Ulises Moulines que habían sido publicadas en España en 1971 por la editorial Ariel en un volumen intitulado *Estudios sobre semántica*; esas traducciones han sido revisadas para la presente publicación. Debido a que se seleccionaron también para el presente volumen una serie de escritos de Frege que no habían sido previamente traducidos al castellano, se le encomendó a Xavier de Donato la tarea de realizar esas traducciones. Carlos Pereda en 1996 tradujo para la UNAM el famoso ensayo de Frege "El pensamiento: una investigación lógica", que también hemos incluido en el presente volumen. Quiero agradecer aquí el valioso apoyo de Baruch Peralta Huerta en la revisión de las traducciones aquí incluidas, así como su cuidadosa lectura y ayuda en la corrección de pruebas. Su sagaz visión evitó que se colaran algunas erratas.

Como podrá comprender el lector, no fue fácil la tarea de uniformar la terminología usada por cuatro traductores. Sin embargo, hemos llevado a cabo ese trabajo apoyándonos, no sólo en los propios textos fregeanos, sino también en las mejores traducciones al inglés de la obra de Frege. El glosario que se incluye en las páginas 15 y 16 ha servido de guía para lograr una uniformidad léxica aceptable, creo yo, en los textos que presentamos. He de mencionar, también, que al revisar las traducciones aquí incluidas se han hecho pequeños cambios estilísticos y se han corregido erratas.

Quiero agradecer a todos los que han contribuido con su valioso trabajo a la realización de este proyecto, muy especialmente a Maite Ezcurdia, Mario Gómez Torrente y Agustín Rayo, quienes se dieron a la tarea de escribir las introducciones que enmarcan cada una de las tres partes que forman esta antología. Sus textos indudablemente orientarán al lector y le permitirán apreciar que aún hoy día siguen siendo debatidos muchos de los argumentos y las tesis que defendió Frege. A Xavier de Donato agradezco su cuidadoso trabajo de traducción de varios textos de Frege hasta ahora inéditos en español, a Ulises Moulines la cesión graciosa de sus traducciones, y a Martin Fricke, su escrupulosa y puntual revisión de algunas traducciones ya publicadas pero que requerían ser compulsadas con el original. Sobra decir que sin la colaboración de todos estos colegas, el presente volumen no habría visto la luz. Por último, pero no por ello menos importante, quiero agradecer el apoyo del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM para la realización de este proyecto, especialmente el apoyo de su Departamento de Publicaciones y, dentro de él, de J. Alberto Barrañón, quien se ha encargado de la difícil tarea de formar y cuidar la presente edición del libro.

Ciudad de México, septiembre de 2015

Margarita M. Valdés

GLOSARIO

andeuten (unbestimmt)	indicar, aludir (indeterminadamente)
aussagen	predicar, decir de, enunciar
Anschauung	intuición
Anzahl	número [cardinal]
Art des Gegebenseins	modo de presentación
bedeuten	referir, significar
Bedeutung	referencia, significado
bedeutungslos	sin referencia
Bedingungsstrich	barra de condición
Begriff	concepto
begrifflicher Inhalt	contenido conceptual
Begriffsschrift	conceptografía
behaupten	afirmar, aseverar
behauptende Kraft	fuerza asertiva
Behauptungssatz	oración asertiva, oración afirmativa
bestimmen	determinar
Bestimmungsweise	modo de determinación
beurtheilbarer Inhalt	contenido juzgable
Beziehung	relación
eindeutig	unívoco, biunívoco
eindeutige Zuordnung	correlación biunívoca
Erklärung	explicación
festsetzen	estipular, fijar
formal	formal, formalista

Gedanke	pensamiento
Gegenstand	objeto
Geist	espíritu, mente
gewöhnliche (Bedeutung)	(referencia o significado) habitual, usual
gleich	igual
Gleichheit	igualdad
Gleichung	ecuación, igualdad
gleichzahlig	equinumeroso
Inhalt	contenido
Merkmal	rasgo, característica
objektiv	objetivo
Satz	oración, cláusula, proposición
Sinn	sentido
Stufe	nivel [de un concepto o función]
Umfang eines Begriffes	extensión de un concepto
ungerade (Beduetung)	(referencia) indirecta
ungesättigt	insaturada, no saturada
Urteil	juicio
Urteilsstrich	barra de juicio
Verneinung	negación
Verneinungsstrich	barra de negación
Vorstellung	representación, ideación, idea
Wahrheitswert	valor veritativo, valor de verdad
Wertverlauf	rango de valores [de una función]
Zahl	número
Zahlzeichen	numeral
Zeichen	signo

PARTE I

LÓGICA

CONTENIDOS:

INTRODUCCIÓN A LA PARTE I: LÓGICA

por MARIO GÓMEZ TORRENTE

La lógica de Frege es sin lugar a dudas la parte de su obra de mayor trascendencia. Si bien la importancia del trabajo de Frege para la filosofía del lenguaje y los fundamentos de la matemática es colosal, su obra lógica se distingue por contener contribuciones universalmente aceptadas y universalmente consideradas como las más trascendentes para la disciplina en toda su historia –sólo la obra de Aristóteles se menciona ocasionalmente como una obra de valor comparable–. Estas aportaciones incluyen, entre otras, la introducción de la formalización de las oraciones en términos exclusivamente de funciones y argumentos en lugar de las categorías de la gramática tradicional, la formalización de la cuantificación como una función de una función, que permite una representación útil y perspicua de cuantificaciones múltiples en el alcance unas de otras, y la creación del primer cálculo deductivo puramente sintáctico. En la primera sección de esta introducción describiremos brevemente algunas de esas aportaciones, al hilo de una narrativa plausible sobre su génesis. Michael Dummett, el gran estudioso de Frege, ha dicho que la *Conceptografía*, el librito que Frege publicó en 1879 a los 31 años de edad y en el que aparecen por primera vez todas esas contribuciones, "parece haber nacido del cerebro de Frege sin fertilización de influencias externas" (Dummett 1981, p. xxxv) y probablemente tiene razón, pero no es menos cierto que hay una dinámica interna en las motivaciones y consideraciones de Frege que permite explicar al menos en cierta medida, aunque quizás sin excesivo detalle, el surgimiento de sus ideas, e intentaremos explicitar esa dinámica. En la segunda sección trataremos, de forma aún más sucinta, algunos aspectos de las ideas filosóficas que tenía

Frege acerca de la lógica –algunos aspectos de su filosofía de la lógica.

1. *La lógica de Frege*

Frege nos dice en el prólogo de su *Conceptografía* que la cuestión que dio pie a las ideas de ese trabajo fue la cuestión de si los juicios de la aritmética requieren una justificación empírica, o al menos una basada en la intuición *a priori* del espacio y el tiempo que postuló Kant, o, por el contrario, son susceptibles de una justificación "puramente lógica", una que evite apelar a "la particularidad de las cosas" y que sea no empírica en un sentido muy estricto, que excluya el tipo kantiano de justificación para los juicios aritméticos. Frege parece haber estado convencido desde muy pronto de que la aritmética, al tener una aplicación completamente general que incluye ámbitos no empíricos, debería ser susceptible de una justificación mucho más pura, o "lógica", que la que propuso Kant: la segunda opción, lo que después se llamaría la opción "logicista", debería ser la correcta. Pero también desde el principio Frege tuvo claro que la tarea de mostrar esto sería ardua y requeriría la introducción de nuevas herramientas conceptuales. Algunas de estas herramientas acabarían siendo las cruciales aportaciones de Frege a la lógica que ya hemos mencionado.

Frege dice que el punto de partida de su tarea logicista fue la búsqueda de un análisis de la noción de serie ordenada en términos de "consecuencia lógica". Probablemente la idea de generación de la serie de los números y la de transmisión de una propiedad en esa serie evocan con fuerza la impresión de que la aritmética se fundamenta en algún tipo de intuición espacio-temporal. El producto final del análisis de Frege de la noción de serie ordenada es probablemente lo que hoy podemos leer en el capítulo III de su *Conceptografía*, en el que se muestra fundamentalmente cómo expresar y demostrar principios de inducción abstractos para series ordenadas utilizando sólo lo que hoy conocemos como lógica de segundo orden. Pero aunque las ideas básicas de ese análisis probablemente rondaron la mente de Frege desde muy pronto, el desarrollo preciso del producto final requirió la introducción de otras ideas.

En primer lugar, como el mismo Frege señala, la naturaleza misma de su proyecto requería, a fin de evitar posibles objeciones de filósofos con posturas empiristas o kantianas acerca de los juicios aritméticos, que quedara escrupulosamente claro que las demostraciones de esos juicios que el logicista realizase no apelarían en ningún momento de alguna forma velada a juicios empíricos o dependientes de una intuición general del espacio y el tiempo. Este requisito evidente es lo que lleva a Frege a concebir e imponer estándares de rigor muy altos en su concepción de un cálculo deductivo para la lógica, y en particular lo que lo conduce a su concepción del cálculo de la *Conceptografía* como un sistema de axiomas y reglas perfectamente especificadas que agotan completamente el ámbito de proposiciones y procedimientos de los que es posible servirse en las demostraciones lógicas. La idea de un axioma o regla puramente formales, o sea de un axioma o regla dados como esquemas o cuantificaciones universales y que se entienden de manera tal que especifican el ámbito de proposiciones e inferencias obtenibles por sustitución o particularización a partir de esos esquemas o cuantificaciones, no es desde luego una idea de Frege, sino una idea que aparece desde muy pronto en la tradición lógica. Pero Frege naturalmente la utiliza, y le añade su concepción de la demostración como un proceso de derivación en el que únicamente es posible servirse de un conjunto perfectamente especificado de axiomas y reglas formales.

De todos modos, a Frege sin duda le pareció que esa concepción tan rigurosa de los procedimientos formales de derivación no excluía de por sí otras maneras en que las demostraciones que él buscaba pudiesen verse como dependientes de supuestos no lógicos. Frege escribe en multitud de lugares que encontró una grave dificultad para su proyecto en el hecho de que la expresión en el lenguaje natural de los juicios y demostraciones que necesitaba alcanzaba fácilmente una complejidad gramatical extrema. Además, Frege menciona repetidamente, como una motivación importante para su *Conceptografía*, la existencia de ambigüedades léxicas y sintácticas en el lenguaje natural –la que destaca como más peligrosa (en su "Sobre la justificación científica de una conceptografía", de 1882) es

la existencia de palabras que pueden funcionar con categorías gramaticales distintas y, por consiguiente, con significados distintos. Un ejemplo significativo son los numerales, que pueden funcionar al menos como nombres ("Cinco es el número de estudiantes de esta clase"), como predicados de nombres (plurales) ("Alfonso, Brígida, Carlota, Doroteo y Enriqueta son cinco") y como predicados de predicados ("Hay cinco estudiantes aquí").[1] Esta complejidad y ambigüedad podía permitir la aparición de confusiones y, en particular, facilitar acusaciones de dependencia velada de supuestos no lógicos basadas en esas confusiones (en casos en los que los principios usados por Frege pudieran aparecer como no lógicos en alguna acepción de los términos ambiguos).

Para enfrentarse a estos problemas, Frege se inspiró en el lenguaje de fórmulas de la aritmética misma, cuya gramática es muy simple en comparación con la del lenguaje natural, y donde cada tipo de símbolo va asociado a un rol sintáctico único. En particular, en esas fórmulas sólo aparecen numerales (en su rol de nombres) y variables, símbolos para funciones aritméti-

[1] Frege nos dirá años después (en el prefacio al volumen I de *Las leyes fundamentales de la aritmética* (Frege 1893)) que el mayor de sus logros fue darse cuenta de que el análisis correcto de las "oraciones de número" (ejemplos de las cuales son "Estos son cinco árboles" y "La carroza del rey es arrastrada por cuatro caballos") las ha de ver como oraciones en las que se predica una propiedad numérica de un predicado o concepto. Frege veía también la naturaleza metafísica de los números en cuanto objetos como en último término dependiente de este tipo de predicaciones de segundo orden, y nuestro acceso epistémico a ellos como mediado también por una comprensión de ese tipo de predicaciones. En este sentido, la acepción de los numerales como predicados de predicados, o predicados de segundo orden, es la conceptualmente fundamental. Estas ideas apoyan en gran medida su visión original de los conceptos aritméticos como conceptos altamente generales que no dependen para su aplicación de un ámbito particular de objetos empíricos. Si el contenido de los numerales se piensa independientemente de su conexión con las predicaciones de segundo orden, es tentador verlo como si estuviera constituido por grupos, colecciones o montones de objetos empíricos, propiedades de objetos empíricos, símbolos perceptibles, etc. —el tipo de posturas que Frege critica de forma devastadora en *Los fundamentos de la aritmética* (Frege 1884)—. Así, no es inverosímil pensar que Frege haya visto como pernicioso para la filosofía de la aritmética y para la comprensión cabal de la naturaleza lógica de los conceptos aritméticos el hecho de que los numerales del lenguaje natural sean ambiguos.

cas, y símbolos para igualdades y desigualdades (además de paréntesis), y todas ellas son simplemente ecuaciones e inecuaciones de términos formados por composición de funciones a partir de numerales y variables. Frege adoptó resueltamente la decisión de dotar a su lenguaje para la expresión lógica de la aritmética de unas características similares. Al hacerlo concibió la idea de formalizar las oraciones que necesitaba por medio de una gramática muy simple y muy estricta, en la que cada expresión compleja bien formada surgiera de la aplicación de un símbolo "de función" a símbolos que fueran "argumentos" de esa función, una gramática en la que, en otras palabras, todo análisis sintáctico se resolviera en la operación de funciones a argumentos. De la misma forma en que en las fórmulas aritméticas el símbolo de suma se aplica a dos términos aritméticos para producir otro término, y el símbolo de igualdad se aplica a dos términos para producir una fórmula, Frege resolvió que todas las expresiones de alguna categoría gramatical que no fueran oraciones y que no fueran nombres o variables pertenecerían a categorías gramaticales "funcionales", asociadas a reglas estrictas acerca de cuáles son sus "argumentos" posibles y cuáles son los resultados posibles de su aplicación a esos argumentos. Junto con la estipulación de que cada categoría gramatical ha de tener símbolos de aspectos distintos, esta resolución tiene el efecto, familiar para los conocedores de la lógica moderna, de eliminar por completo las ambigüedades sintácticas frecuentes en el lenguaje natural, y también la consecuencia de que uno puede expresar de forma relativamente concisa con las abreviaturas típicas de los lógicos ideas que en el lenguaje natural sólo se pueden expresar por medio de construcciones gramaticales notablemente alambicadas.

La resolución de Frege tuvo también como efecto indirecto el que a menudo se considera como su logro más decisivo: el hallazgo de la formalización de la cuantificación como una función de una función. La resolución de entender toda expresión de una categoría gramatical no oracional y que no sea un nombre o una variable como un símbolo de función obliga a tomar a los cuantificadores como símbolos de función. Una vez que esto se acepta, una opción relativamente natural es tomar a un cuantificador como un símbolo que se aplica a un predicado

como argumento para dar lugar a una fórmula, predicado que a su vez es natural ver como un símbolo que se aplica a un nombre para dar lugar a una fórmula. Esto lleva a la posibilidad de representar cuantificaciones múltiples en el alcance unas de otras.

Tomemos un caso simple. Si el símbolo "Alberto admira a" se aplica a nombres para producir oraciones, es un predicado; por tanto, dado el análisis mencionado de la cuantificación, digamos del cuantificador "Todos", la expresión "Todos (Alberto admira a ( ))" (donde los paréntesis acotan el lugar de una expresión a la que se aplica un símbolo de función) representa que Alberto admira a todos. Ahora bien, esta oración puede verse también como producto de la aplicación de un predicado al nombre "Alberto". Podemos representar ese predicado como "Todos$_1$ (( ) admira a (1))", evitando una ambigüedad por medio del "1" que vincula o "liga" el cuantificador "Todos" al lugar en el que aparecerían los nombres a los que se aplicaría el predicado al que "Todos" se aplicó. Si ahora aplicamos un nuevo cuantificador a ese predicado, obtenemos una oración con varios cuantificadores unos en el alcance de otros: "Todos (Todos$_1$ (( ) admira a (1)))" representa que todos admiran a todos; "Alguno (Todos$_1$ (( ) admira a (1)))" representa que hay alguien que admira a todos. Además, procesos análogos llevan a la representación de oraciones con otras estructuras cuantificacionales anidadas: "Todos (Alguno$_1$ (( ) admira a (1)))" representa que todos admiran a alguno (que no tiene por qué ser el mismo en todos los casos); "Alguno (Alguno$_1$ (( ) admira a (1)))" representa que hay alguien que admira alguien. (Nótese que en el lenguaje natural el segundo y el tercero de estos ejemplos se representarían habitualmente por medio de una misma oración, sintácticamente ambigua: "Todos admiran a alguien".) Como vamos a ver inmediatamente, Frege diseñó una notación aún más perspicua para representar estas cuantificaciones, en la que una variable acompaña siempre al cuantificador y luego aparece en el lugar vinculado o "ligado" donde aparecerían los nombres a los que se aplicaría el predicado al que el cuantificador se aplica.

La *Conceptografía* es fundamentalmente el resultado de integrar todas estas y otras innovaciones en un todo orgánico, que

aún hoy impresiona por su evidente ruptura con la tradición lógica inmediatamente anterior y por su anticipación de muchas características de la práctica lógica posterior.

En primer lugar, en la *Conceptografía* Frege diseña una notación con abreviaturas que recuerdan a las de la notación matemática. Esta notación fregeana es en esencia similar a la que actualmente se usa en los lenguajes cuantificacionales, e implementa la resolución mencionada de que todas las expresiones de alguna categoría gramatical que no sean oraciones, nombres o variables sean funcionales, así como la estipulación de que cada categoría gramatical tenga símbolos cuyos aspectos sean distintos. Frege usa letras griegas mayúsculas como letras (esquemáticas) para predicados, y letras que tienen otros aspectos para representar nombres y variables, las cuales se ubican dentro de paréntesis a continuación de los predicados que se les aplican en las fórmulas correspondientes; por ejemplo,

$$—\Phi(A), \quad —\Psi(A,B), \quad —\Theta(\mathfrak{a}).^2$$

También usa símbolos especiales para la igualdad (un predicado que se aplica estrictamente a dos nombres, dos variables, o un nombre y una variable, para dar lugar a una fórmula),[3] el condicional (una función que se aplica estrictamente a dos fórmulas para dar lugar a una fórmula), el negador (una función que se aplica estrictamente a una fórmula para dar lugar a una fórmula), y el cuantificador universal (una función que se aplica estrictamente a un predicado (con respecto a una variable) para dar lugar a una fórmula). Así, la identidad entre "*A*" y "*B*" (hoy simbolizada "$A = B$") se simboliza

$$—A \equiv B;$$

[2] El trazo horizontal ("——") que precede a las fórmulas en la notación de Frege (con variantes en el caso de las negaciones y cuantificaciones; véase más abajo) indica que las fórmulas poseen un contenido susceptible de ser juzgado (aceptado cuando es considerado por la mente) o afirmado. Cuando ese trazo va a su vez precedido de un trazo vertical ("$\vdash$——"), el contenido en cuestión está siendo de hecho juzgado o afirmado.

[3] En la *Conceptografía* Frege no usa lo que hoy conocemos como functores, por tanto tampoco usa términos construidos con su ayuda. Suple el uso de functores, como a veces se hace hoy en día también, por medio de símbolos para relaciones.

la condicionalización con "$\Theta(\mathfrak{a})$" como antecedente y "$\Theta(A)$" como consecuente (hoy habitualmente simbolizada "$\Theta(\mathfrak{a}) \supset \Theta(A)$") se simboliza

$$\begin{array}{l}\overline{\quad\top\quad}\, \Theta(A)\\ \quad\ \llcorner\!\!\!-\, \Theta(\mathfrak{a});\end{array}$$

la negación de "$\Psi(A, B)$" (hoy habitualmente simbolizada "$\sim \Psi(A, B)$") se simboliza

$$-\!\!\top\!\!-\, \Psi(A, B);$$

y la cuantificación universal de "$\Theta(\mathfrak{a})$" con respecto a la variable "$\mathfrak{a}$" (hoy habitualmente simbolizada "$(\forall\, \mathfrak{a})\, \Theta(\mathfrak{a})$") se simboliza

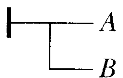
$$-\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Theta(\mathfrak{a}).$$

El resultado es una variante notacional de los lenguajes cuantificacionales con los que el estudiante de lógica se familiariza desde un principio hoy en día. Con esta notación es posible representar de maneras hoy bien sabidas la conjunción (hoy habitualmente simbolizada por medio del signo "&"), la disyunción (hoy habitualmente simbolizada por medio del signo "$\vee$") y el cuantificador particular (hoy habitualmente llamado cuantificador existencial y simbolizado por medio del signo "$\exists$").

La semántica que Frege atribuye a estas notaciones en su *Conceptografía* es también en esencia similar a la que hoy en día se estipula para los lenguajes cuantificacionales de la lógica clásica, aunque con algunas diferencias, debidas quizás sobre todo a la naturaleza naciente de las ideas semánticas de Frege en 1879. Hay que observar, en primer lugar, que hay una cierta falta de claridad acerca de cuál es el contenido de los símbolos de predicado, que se resolverá sólo en la obra posterior de Frege; un indicio (aunque meramente un indicio) de esa falta de claridad es que Frege se refiere invariablemente a expresiones cuando habla de funciones y argumentos (uso en el que le hemos seguido en parte); en su obra posterior reservará estrictamente el nombre "función" para (una parte de) el contenido (extralingüístico) de las expresiones funcionales en cuanto funcionales, y el nombre "argumento" para (una parte de) el contenido (extralingüístico) de las expresiones de argumento (en cuanto expresiones de argumento).

La interpretación del símbolo de igualdad, por otro lado, es definitivamente diferente de la actual y de la que adoptará en la obra posterior de Frege: en la *Conceptografía*, "$\!\!-\!\!-\!\!-A \equiv B$" simboliza el contenido "metalingüístico" de que los símbolos "A" y "B" están por la misma cosa, mientras que hoy en día se entiende que un enunciado de igualdad "$A = B$" simboliza que cierto par de objetos son idénticos, pero no que esos objetos son denotados por "A" y "B".[4]

La interpretación del condicional en la *Conceptografía* es quizás también algo diferente de la actual y de la del Frege posterior. Frege nos dice que si A y B denotan contenidos juzgables, hay cuatro posibilidades: (1) A es afirmado y B es afirmado; (2) A es afirmado y B es negado; (3) A es negado y B es afirmado; (4) A es negado y B es negado; y que



denota el juicio de que la tercera de estas posibilidades no se da, sino que se da una de las otras tres; así, el contenido juzgable de

$$\begin{array}{l}\overline{\quad\top\quad}\, A\\ \quad\ \llcorner\!\!\!-\, B\end{array}$$

parecería ser que la tercera de aquellas posibilidades no se da, sino que se da una de las otras tres, o sea un contenido acerca de afirmaciones y negaciones. Hoy en día se entiende que el contenido veritativo-condicional de un enunciado condicional $B \supset A$ es que no es el caso que B es verdadero y A falso, y esta idea es también claramente la que ofrece Frege al explicar el condicional en la sección 12 del volumen I de sus *Leyes fundamentales de la aritmética* (1893) y en su manuscrito "Introducción a la lógica" (1906). Pero esta concepción del condicional

[4] En "Sobre sentido y referencia" (1892) Frege concluirá que un enunciado de identidad verdadero tiene como un aspecto de su contenido un "sentido" que va más allá del contenido de que cierto objeto es idéntico a sí mismo, pero argumentará convincentemente que ese aspecto de su contenido no es meramente metalingüístico.

es neutral con respecto a cualquier conexión con las nociones de afirmación o negación. Así pues, parecería que en la *Conceptografía* Frege presupone una concepción algo menos neutral del condicional material, basada quizás en su concepción de la verdad, que aparentemente incluye una idea de ésta como algo afirmado en condiciones de correcta operación de ciertas reglas cognitivas, y su rechazo de cualquier noción de verdad como correspondencia (aspectos sobre los que volveré en seguida).

Por último, la concepción de la semántica del cuantificador universal en la *Conceptografía* parecería ser también metalingüística en una forma en que no lo es la concepción actual ni la que Frege sostuvo posteriormente. En la *Conceptografía* Frege dice que "$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Theta(\mathfrak{a})$" significa el juicio de que la función "$(\Theta(\mathfrak{a}))$" es un hecho cualquiera que sea su argumento; pero dado que en este momento Frege claramente llama "funciones" y "argumentos" a las expresiones correspondientes, ello sugiere que su comprensión del cuantificador es "sustitucional": la verdad de "$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Theta(\mathfrak{a})$" se entiende como la verdad de todos los resultados de sustituir "$\mathfrak{a}$" por argumentos (expresiones argumentales) posibles en la expresión "$\Theta(\mathfrak{a})$". La concepción actual, y también muy explícitamente la de Frege (en la sección 8 del volumen I de Frege 1893, que se apoya en la mencionada concepción extralingüística de los argumentos y de (los valores de) las funciones) es una concepción "objetual", para la cual la verdad de "$(\forall\,\mathfrak{a})\,\Theta(\mathfrak{a})$" consiste en la verdad de todos los resultados de asignar objetos diferentes a la variable "$\mathfrak{a}$" en "$\Theta(\mathfrak{a})$".

De todas maneras, con una notación y una comprensión del cuantificador fregeanas es posible formalizar de formas muy perspicuas cuantificaciones como las mencionadas antes. Así, utilizando la esencialmente similar notación actual, "Todos admiran a todos" se simboliza "$(\forall\,\mathfrak{a})(\forall\,\mathfrak{b})\;A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$"; "hay alguien que admira a todos" se simboliza "$\sim(\forall\,\mathfrak{a})\;\sim(\forall\,\mathfrak{b})\;A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$" (o "$(\exists\,\mathfrak{a})(\forall\,\mathfrak{b})\;A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$"); "todos admiran a alguno (que no tiene por qué ser el mismo en todos los casos)" se simboliza "$(\forall\,\mathfrak{a})\sim(\forall\,\mathfrak{b})\;\sim A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$" (o "$(\forall\,\mathfrak{a})(\exists\,\mathfrak{b})\;A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$"); y "hay alguien que admira a alguien" se simboliza "$\sim(\forall\,\mathfrak{a})(\forall\,\mathfrak{b})\;\sim A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$" (o "$(\exists\,\mathfrak{a})(\exists\,\mathfrak{b})\;A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$").

Finalmente, en la *Conceptografía* Frege lleva a efecto su concepción de la demostración por medio de lo que de hecho constituye la primera construcción de un cálculo deductivo en cuyas derivaciones sólo es posible servirse de un conjunto especificado de axiomas y reglas formales. El cálculo de la *Conceptografía* es lo que luego se llamará un cálculo axiomático, cuyos axiomas son (en esencia y en notación actual) las cuantificaciones universales

$(\forall F)(\forall G)(F \supset (G \supset F))$;[5]

$(\forall F)(\forall G)(\forall H)((H \supset (G \supset F)) \supset ((H \supset G) \supset (H \supset F)))$;

$(\forall F)(\forall G)(\forall H)((H \supset (G \supset F)) \supset (G \supset (H \supset F)))$;

$(\forall F)(\forall G)((G \supset F) \supset (\sim F \supset \sim G))$;

$(\forall F)(\sim\sim F \supset F)$;

$(\forall F)(F \supset \sim\sim F)$;

$(\forall a)(\forall b)(\forall F)(a = b \supset (F(a) \supset F(b)))$;

$(\forall a)(a = a)$;

$(\forall a)(\forall F)((\forall x)F(x) \supset F(a))$;

y cuyas reglas de inferencia (en esencia y en notación actual) son el *modus ponens*, o sea la regla que permite derivar una fórmula G de las fórmulas $F \supset G$ y F; la regla que permite derivar una fórmula de la forma $F(a)$ de una fórmula de la forma $(\forall x)F(x)$; la regla que permite derivar una fórmula de la forma $G \supset (\forall x)F(x)$ de una fórmula de la forma $(\forall x)(G \supset F(x))$ cuando "x" no aparece en G; y reglas para la sustitución uniforme de letras y variables en proposiciones ya derivadas.[6] (El

[5]Nótese que Frege, a diferencia de lo que ocurre hoy en día, cuantifica sobre proposiciones y funciones proposicionales, o más exactamente, si su concepción de la cuantificación es sustitucional, sobre fórmulas.

[6] Aquí hay que hacer la salvedad de que en la *Conceptografía* Frege sólo confiere explícitamente el carácter de "modo de inferencia" a la regla de *modus ponens*. Pero es claramente consciente de que usa las otras reglas mencionadas; por eso Frege sólo dice que la única regla que utiliza donde se deriva una fórmula a partir de más de una fórmula es el *modus ponens*; y eso es compatible con su reconocimiento de las otras reglas, donde una fórmula se deriva a partir de otra fórmula.

cálculo que presenta en *Las leyes fundamentales de la aritmética*, que alcanza un grado de precisión y rigor sintácticos incluso superior al de la *Conceptografía*, será diferente. La parte suficiente para desarrollar lo que hoy conocemos como la lógica cuantificacional consta allí de cuatro axiomas (el segundo de los cuales tiene dos partes) y un gran número de reglas de inferencia.)[7]

2. *La filosofía de la lógica de Frege*

A diferencia de lo que ocurre con la lógica en sí, Frege no se ocupó de la filosofía de la lógica de forma sistemática. Hacernos una idea de sus opiniones filosóficas sobre la lógica requiere una labor de recopilación, que no tiene por qué prestarse tampoco a una sistematización por parte del recopilador. En esta sección mencionaré algunos aspectos de las ideas filosóficas de Frege sobre la lógica, sin ambiciones de conseguir una sistematización semejante.

Para Frege el objeto de la lógica es la noción de verdad y sus leyes. La lógica nos dice, no qué proposiciones son verdaderas, sino cómo inferir de tal manera que, si las proposiciones que consideramos verdaderas lo son en realidad, no podamos llegar a aceptar otras proposiciones salvo las que sean verdaderas. Esta idea queda clara en multitud de lugares, por ejemplo en los manuscritos póstumos "Lógica" (de 1897) y en las "17 oraciones clave sobre lógica" (probablemente de 1876–1877). Hay de todos modos una restricción que sin duda Frege tiene en mente, como se desprende de su concepción del objeto de la lógica como independiente de la "particularidad de las cosas", que ya hemos mencionado al hablar de su *Conceptografía*: la lógica no se ocupa *simpliciter* de cómo llegar a verdades a partir de verdades; no se ocupa de especificar reglas de la preservación de la verdad en el razonamiento específicas a la química, por ejemplo; las leyes de que se ocupa la lógica no mencionan objetos o conceptos "particulares", sino a lo sumo

[7] Una presentación mucho más detallada de la lógica de Frege (en particular de la *Conceptografía*), que menciona varias complicaciones omitidas aquí, y que incluye asimismo un amplio examen de su filosofía de la lógica, se puede ver en Sullivan 2004.

conceptos cuyo ámbito de aplicación es máximamente general, y objetos caracterizables en términos de esos conceptos. Como Frege dice en la "Lógica" de 1897, "la lógica es la ciencia de las leyes más generales de la verdad".

En los mismos lugares en que enuncia su concepción de la lógica como una ciencia de las leyes de la verdad en el sentido mencionado, Frege se muestra siempre extremadamente crítico con las concepciones psicologistas de la lógica. Frege insiste en que las leyes de la verdad de que se ocupa la lógica no son "leyes del pensamiento" en cuanto leyes descriptivas de la forma en que procede de hecho el razonamiento (o siquiera el razonamiento con conceptos máximamente generales) en los seres humanos, sino leyes normativas, que prescriben maneras en que podrían proceder los razonamientos sin llegar a otra cosa que verdades a partir de otras verdades. El antipsicologismo de Frege impregna no sólo su filosofía de la lógica, sino también y muy especialmente su filosofía de las matemáticas, que se opone radicalmente a cualquier reducción de las nociones matemáticas a construcciones psicológicas.

La noción de verdad que es el objeto de la lógica es concebida a su vez por Frege como una noción algo peculiar. Frege nos dice en varios lugares (por ejemplo en el manuscrito "Mis ideas lógicas básicas" de 1915) que al afirmar una proposición y al afirmar que es verdadera afirmamos exactamente lo mismo: la noción de verdad no parece en sí misma corresponder a ninguna realidad sustantiva. Frege se pregunta si eso implica que la palabra "verdadero" no tiene sentido. Su conjetura es que el sentido de la palabra "verdadero" existe, pero no contribuye en nada a conformar el sentido de las oraciones en las que aparece como predicado. En varios lugares (por ejemplo en el manuscrito "17 oraciones clave sobre lógica" y en el artículo "El pensamiento", de 1918) Frege dice también que la noción de verdad es indefinible. Y en "El pensamiento" y en la "Lógica" de 1897 sugiere un argumento a favor de esa tesis de indefinibilidad: dado que afirmar una proposición y afirmar que es verdadera es lo mismo, cualquier definición de la verdad daría pie a casos particulares, de la forma de "P es verdadero si y sólo si $A(P)$", tales que la parte definiente, de la forma de "$A(P)$", habría de consistir en una

proposición que en realidad contendría la noción misma de verdad, y ofrecería por tanto sólo un intento circular de definir la verdad.

Incluso si la noción de verdad es indefinible, en el sentido de irreducible a otras, es claro en Frege, como mencionamos en la sección anterior, que posee muchas notas que se pueden observar en ella. Una de sus notas viene dada por su carácter normativo: una verdad es algo que debe aceptarse y aun afirmarse. Frege deja claro también que el que una proposición sea verdadera (o falsa) es una cuestión objetiva, que no admite respuestas diferentes en relación con diferentes sujetos o culturas. También deja claro (en "El pensamiento") que el que una proposición sea verdadera no viene determinado por su correspondencia con otra cosa; la verdad de una proposición o pensamiento es una cuestión absoluta, mientras que la correspondencia de un pensamiento con otra cosa es una cuestión relativa; además, las correspondencias pueden ser aproximadas, mientras que la verdad de un pensamiento se da o no se da, sin grados. Una última cosa de interés que Frege dice (en "El pensamiento") es que "el significado de la palabra 'verdadero' queda explicado en las leyes de la verdad", leyes que, como sabemos, son las leyes de la lógica.

Lamentablemente, la peculiaridad de la noción de verdad no parece recibir ulterior elucidación en la obra de Frege –aunque eso sea naturalmente consistente con su propio punto de vista, que ciertamente parece implicar que no se puede decir mucho sobre la verdad–. Pero es inevitable especular sobre qué concepción o concepciones de la verdad son compatibles con las intuiciones y argumentos de Frege incluso si Frege pudiera haber rechazado tales especulaciones. El rechazo del correspondentismo, y el rechazo aún más general de la idea de que la verdad tenga una naturaleza relacional, sugieren que el fundamento metafísico de la verdad ha de radicar en algún tipo de propiedad interna de las proposiciones o pensamientos. El objetivismo de Frege sugiere además que esa propiedad consiste en alguna característica de las proposiciones que trasciende su susceptibilidad de ser pensadas en virtud de peculiaridades cognitivas de los distintos seres pensantes o culturas pensantes, es decir alguna característica que consista precisamente en

su susceptibilidad de ser pensadas por todo ser pensante. Su concepción normativa de la verdad está relacionada con su objetivismo, y sugiere la idea de que hay un estrecho vínculo entre el fundamento metafísico de la verdad y su fundamento epistemológico. Es difícil evitar la impresión de que estas ideas se acercan especialmente al espíritu de la filosofía kantiana acerca de la verdad, incluso si pueden contradecirla en los detalles. Como Frege, Kant rechaza la concepción tradicional de la verdad como correspondencia, pues el ámbito de las cosas más allá de los fenómenos no es en sí susceptible de ser pensado, y ve la verdad como una propiedad que los juicios adquieren en virtud de características "internas" –en virtud de las reglas relativas a las condiciones de posibilidad del pensamiento impuestas por la estructura cognitiva del sujeto trascendental; esas características "internas" están por tanto estrechamente vinculadas a una concepción normativa, a saber, la de la operación de esas reglas. Pero debe subrayarse que la atribución a Frege de una concepción kantiana de la verdad sólo puede ser conjetural.

Hasta ahora nos hemos ocupado de cuestiones relacionadas con las ideas de Frege acerca del objeto de la lógica. Diremos algo a continuación sobre sus ideas acerca del fundamento epistémico de la lógica. De nuevo se trata de un asunto sobre el que Frege dice mucho menos de lo que desearíamos. Dice tan poco, de hecho, que no es infrecuente una opinión como la del gran historiador de la filosofía analítica Alberto Coffa, que después de referirse a la escasez de pronunciamientos de Frege sobre el asunto, dice: "La conclusión parece inevitable: el padre de la lógica moderna no tenía opiniones acerca del fundamento de la verdad lógica" (Coffa 1991, p. 124).

Hay al menos otra posibilidad interpretativa. El que alguien no se pronuncie sobre algo desde luego no quiere decir que no tenga opiniones sobre ello, pero más importante aún: *ceteris paribus*, una falta de pronunciamientos normalmente deberá verse como dando a entender que se acepta alguna postura comúnmente admitida en el medio en el que el autor se mueve o por el público al que se dirige. En el caso de Frege, no es inverosímil pensar que la escasez de pronunciamientos sobre el fundamento epistémico de la lógica se debe, simplemente, a

que Frege da por supuesto una vez más que la filosofía kantiana ha proporcionado una explicación esencialmente correcta de ese tipo de fundamento.

El lugar donde Frege es más explícito acerca de sus opiniones sobre la epistemología de la lógica es *Los fundamentos de la aritmética* (Frege 1884). Ahí deja claro que tiene la intención de usar las distinciones analítico/sintético y *a priori/a posteriori* en el sentido pretendido por Kant. También deja claro que piensa que las leyes de la lógica no pueden ser sino *a priori* al ser completamente generales: bajo el supuesto de que sean efectivamente conocidas, no pueden ser sino conocidas *a priori*, pues no mencionan ninguna particularidad de las cosas, sino únicamente conceptos de aplicación totalmente general u objetos caracterizables en términos de esos conceptos. El carácter *a priori* de las verdades lógicas se puede mostrar a menudo derivándolas mediante inferencias puramente lógicas a partir de verdades lógicas "primitivas". Eso reduce la cuestión de explicar el fundamento de la lógica a la cuestión de explicar el fundamento de estas verdades primitivas y de las reglas de inferencia. Frege no dice prácticamente nada sobre esta cuestión, pero no es descabellado pensar que en este punto acepta tácitamente la concepción kantiana de la verdad de la lógica como algo requerido por la estructura cognitiva del sujeto trascendental, en este caso por las formas del juicio y las categorías puras del entendimiento (e independientemente de las formas de la intuición). Después de señalar algunos puntos en los que discrepa de Kant (en particular al señalar que la definición de Kant de los juicios analíticos como aquellos donde el concepto del predicado está contenido en el concepto del sujeto es insuficiente al haber proposiciones de otras formas que la forma sujeto-predicado), Frege subraya: "con el fin de no exponerme a la acusación de hacer críticas mezquinas a un genio al que sólo podemos contemplar con admiración agradecida, creo que debo enfatizar las coincidencias que por mucho prevalecen" (§ 89), y a continuación indica que su discrepancia fundamental de Kant se reduce a la cuestión del lugar asignado a las verdades aritméticas en la división kantiana de los juicios. Es difícil no ver aquí una aceptación tácita de la epistemología kantiana de la lógica (junto con una corrección de la concepción kantiana de la lógica en sí).

Concluiremos esta breve nota sobre la filosofía de la lógica de Frege con unas no menos breves observaciones sobre lo que podríamos llamar la cuestión de la "metalógica" de Frege. La metalógica es el estudio que toma como su objeto a la lógica, especialmente el estudio que se puede llevar a cabo usando herramientas lógicas y matemáticas. Por lo dicho hasta ahora cabría sin duda esperar que para Frege hay algún tipo de dificultad a la hora de estudiar o pensar la lógica, pues hay algún tipo de dificultad a la hora de pensar la noción de verdad, que entra de forma esencial en la caracterización de su naturaleza. Además, Frege, a diferencia de lo que es normal en las presentaciones habituales de la lógica en la actualidad, no procede ofreciendo primero una caracterización "semántica" de la extensión del ámbito de las verdades lógicas y luego su cálculo, con el objeto de "capturar" esa extensión también desde un punto de vista deductivo: Frege presenta su cálculo directamente. Éstos y otros hechos acerca de la presentación que Frege hace de su propio sistema de lógica han llevado a una distinguida escuela de comentadores[8] a proponer que Frege tenía, no sólo una concepción filosófica de la lógica diferente de la preponderante (o las preponderantes) hoy en día, sino también una concepción radicalmente diferente de los procedimientos admisibles en la metalógica. Según estos comentadores, la concepción filosófica de la lógica de Frege determinó que su presentación de la lógica fuera "sintáctica" y que Frege no concibiera ningún uso sustancial para una metalógica que empleara las nociones "semánticas" que hoy en día se usan de forma común.

Sin duda Frege tenía una concepción filosófica de la lógica diferente de las que preponderan hoy en día; en la actualidad es difícil encontrar defensores de ideas como las anteriormente reseñadas acerca de la naturaleza metafísica de la verdad. Además, naturalmente Frege no hace una presentación "semánti-

[8] El patriarca de esta escuela fue Burton Dreben. Seguidores y discípulos suyos han sido Jean van Heijenoort, Jaakko Hintikka, Thomas Ricketts y Warren Goldfarb; véase el magistral compendio que hace Goldfarb de esta línea de interpretación en su "Frege's Conception of Logic" (2001).

ca" de la lógica, sino una presentación deductiva o "sintáctica". Pero no es claro que estos hechos apoyen suficientemente ninguna especulación sobre la cuestión de qué habría sido admisible en metalógica para Frege. Una postura acerca de la verdad como la de Frege no es en principio incompatible con una aceptación de los llamados recursos "semánticos" en metalógica. Estos recursos no requieren una concepción particular de la naturaleza metafísica de la verdad, sino únicamente una aceptación de la matemática conjuntista por medio de la que se formulan, junto con una expectativa razonable, que puede tener muchos motivos, de que esos recursos proporcionan un instrumento alternativo y científicamente útil para la caracterización de ciertos conceptos como el de verdad lógica. Como Tarski argumentó convincentemente, el aparato "semántico" para el estudio de la lógica, que él sistematizó de forma definitiva, es en gran medida filosóficamente neutral. Por otro lado, el hecho de que Frege no utilizara esos recursos podría ser explicable meramente por el hecho de que no habían sido desarrollados –en realidad, Frege da algunos de los primeros pasos en el largo proceso que posibilitará su aparición.

Además, la idea de que Frege presenta "directamente" su cálculo deductivo, sin buscar "capturar" con él una determinada comprensión preexistente de la semántica de las expresiones lógicas, sólo puede defenderse (y así lo hacen los comentadores mencionados) a costa de introducir matices de sofisticada sutileza. Como vimos en la sección anterior, Frege es muy explícito acerca de la interpretación que da a las expresiones lógicas, y además claramente justifica algunas de sus reglas por referencia a esa semántica, lo cual es especialmente evidente en su justificación de la regla que permite derivar una fórmula de la forma de "$G \supset (\forall x)F(x)$" de una fórmula de la forma de "$(\forall x)(G \supset F(x))$" cuando "$x$" no aparece en G. Esto sugiere fuertemente que Frege no habría objetado a un estudio metalógico cuando menos de la corrección del cálculo proposicional con respecto a una semántica bivalente como la que él mismo esboza, ni a un estudio metalógico del cálculo de predicados mediante una caracterización más precisa que la suya de la semántica del cuantificador universal. La cuestión de si habría objetado a un estudio metalógico de la compleción de su cálculo con respecto a una semántica modelista como la estándar hoy en día lleva aparejadas algunas complicaciones adicionales, pero responderla negativamente parece igualmente especulativo.

Bibliografía

A. *Referencias citadas en el texto*

Coffa, J.A., 1991, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dummett, M.A.E., 1981, *Frege. Philosophy of Language*, 2a. ed., Duckworth, Londres.

Goldfarb, W., 2001, "Frege's Conception of Logic", en J. Floyd y S. Shieh (comps.), *Future Pasts. The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, pp. 2–41.

Sullivan, P., 2004, "Frege's Logic", en D. Gabbay y J. Woods (comps.), *Handbook of the History of Logic. Volume 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, Elsevier North-Holland, Ámsterdam, pp. 659–750.

B. *Otras lecturas recomendables sobre la lógica y la filosofía de la lógica de Frege*

Blanchette, P.A., 2012, *Frege's Conception of Logic*, Oxford University Press, Oxford.

Burge, T., 2005, *Truth, Thought, Reason. Essays on Frege*, Oxford University Press, Oxford.

Heck, Jr., R.G., 2012, *Reading Frege's* Grundgesetze, Clarendon, Oxford.

Macbeth, D., 2005, *Frege's Logic*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

CONCEPTOGRAFÍA*

UN LENGUAJE DE FÓRMULAS, CONSTRUIDO A SEMEJANZA DEL LENGUAJE ARITMÉTICO, PARA EL PENSAMIENTO PURO

*Título original: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle, 1879.
Traducción de Hugo Padilla. Revisada para el presente volumen y compulsada con el original alemán por Martin Fricke.

PRÓLOGO

La adquisición del conocimiento de una verdad científica pasa, como regla, por varios grados de certidumbre. Quizás conjeturada al principio sobre la base de un número insuficiente de casos particulares, una oración general se consolida cada vez más firmemente al conectarse con otras verdades a través de cadenas de inferencias –ya sea que de ella se deriven consecuencias que encuentren confirmación de otra manera, ya sea que, a la inversa, se la reconozca como consecuencia de oraciones ya establecidas–. Según esto, se puede preguntar, por una parte, por el camino a través del cual se alcanzó gradualmente una oración y, por otra, por la manera en que finalmente se la fundamenta con máxima firmeza. Acaso la primera cuestión, en el caso de hombres diferentes, tendrá que ser contestada de modo diferente; la segunda es más definida y su respuesta se conecta con la naturaleza interna de la oración considerada. Resulta patente que la prueba más firme es la que es puramente lógica; ésta, prescindiendo de las características particulares de la cosa, sólo se funda en las leyes sobre las que descansa todo conocimiento. Por tanto, dividimos todas las verdades que requieren una fundamentación en dos clases: mientras que en el caso de unas la prueba puede proceder de una manera puramente lógica, las otras tienen que apoyarse en hechos empíricos. Pero es perfectamente compatible el que una oración pertenezca a la primera clase y que, sin embargo, jamás pudiera llegar a ser consciente en una mente humana si no hubiese actividad sensorial.[1] De esta manera, no es el modo psicológico de producirse, sino el tipo de prueba más perfecto lo que está

[1] Esto último vale para todos los juicios, puesto que sin percepción sen-

en la base de la clasificación. Cuando me planteé la pregunta de a cuál de estas dos clases pertenecen los juicios matemáticos, tuve que ver primero qué tan lejos se podría llegar en la aritmética exclusivamente por medio de inferencias, apoyado sólo en las leyes del pensamiento que están por encima de todas las particularidades. Mi procedimiento fue éste: primero busqué reducir el concepto de ordenación en una serie a la consecuencia *lógica* y de ahí progresar hasta el concepto de número. Para que no pudiera introducirse inadvertidamente algo intuitivo, todo tenía que depender de que se suprimiera toda laguna en la cadena de inferencias. Al procurar cumplir lo más rigurosamente posible con este requerimiento encontré un obstáculo en la inadecuación del lenguaje: además de lo prolija que resultaba la expresión, cuanto más complicadas eran las relaciones tanto menos podía alcanzar la exactitud que requería mi propósito. De estas necesidades nació la idea de la presente conceptografía. Por lo pronto, ésta debe servir para probar de la manera más segura la precisión de una cadena de inferencias y para indicar toda presuposición que quisiera colarse inadvertidamente y poder investigarla en su origen. Por ello, se evita expresar cualquier cosa que carezca de significado para la *inferencia lógica* [*Schlussfolge*]. En § 3, he designado como *contenido conceptual* [*begrifflicher Inhalt*] aquello que únicamente me importaba. Esta aclaración se deberá tener siempre en mente si se quiere entender correctamente la naturaleza de mi lenguaje de fórmulas. También de aquí resultó el nombre "conceptografía". Puesto que me he limitado a expresar, inicialmente, relaciones independientes de las propiedades específicas de las cosas, pude también emplear la expresión "lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro". La construcción a semejanza del lenguaje de fórmulas de la aritmética, que he indicado en el título, se refiere más a las ideas fundamentales que a las formas particulares. Estuvo del todo lejos de mí cualquier propósito de establecer una semejanza artificial por entender al concepto como la suma de sus notas. En lo que está más próximo mi lenguaje de fórmulas al de la aritmética es en el modo de utilizar las letras.

sorial es imposible cualquier desarrollo mental en los seres que nos son conocidos.

Creo poder hacer máximamente clara la relación de mi conceptografía con el lenguaje de la vida cotidiana si la comparo con la que hay entre el microscopio y el ojo. Este último, por el alcance de su aplicabilidad y la flexibilidad con la que se sabe adaptar a las más diversas situaciones, posee gran superioridad frente al microscopio. Considerado como aparato óptico, muestra sin duda muchas imperfecciones que, comúnmente, pasan desapercibidas sólo a resultas de su estrecha conexión con la vida mental. Pero tan pronto como los propósitos científicos exigen grandes precisiones en las distinciones, el ojo resulta insuficiente. Por el contrario, el microscopio es de lo más apropiado para tales fines, aunque por ello no es utilizable para todos los demás.

Así, esta conceptografía ha sido ideada como un auxiliar para determinados propósitos científicos y no se la puede condenar por no servir para otros. Si cumple razonablemente bien con esos propósitos, entonces no importa que se puedan echar de menos nuevas verdades en mi trabajo. Me consolaría, sobre esto, la conciencia de que también un desarrollo del método hace prosperar la ciencia. Ya Bacon consideraba preferible inventar un medio por el que se pudiera descubrir fácilmente cualquier cosa, a descubrir algo particular, y, por cierto, todos los grandes progresos científicos recientes han tenido su origen en un perfeccionamiento del método.

También Leibniz reconoció las ventajas de un modo adecuado de simbolización; quizás las sobreestimó. Su idea de una característica general, de un *calculus philosophicus* o *raciocinator*,[2] era tan gigantesca que el intento de desarrollarla hubo de quedarse en los meros preparativos. El entusiasmo que se apoderó de su creador cuando ponderó el incremento inmenso de la capacidad mental humana que podría resultar de un método de simbolización apropiado a las cosas mismas, lo hizo subestimar las dificultades que se oponen a una empresa así. Pero, si no se puede alcanzar una meta tan alta en un intento, no hay que desesperar de lograr, paso a paso, una aproximación más lenta. Si una tarea parece irresoluble tomada en toda su generalidad, habrá de limitarla provisionalmente, pues, tal

[2] Sobre esto, véase Trendelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie* [*Contribuciones históricas a la filosofía*], volumen III.

vez, se la logre resolver mediante ampliaciones graduales. En los símbolos aritméticos, geométricos, químicos, se pueden ver realizaciones de la idea leibniziana en áreas particulares. La conceptografía aquí propuesta añade una más a éstas, y ciertamente una que se sitúa en el medio, adyacente a todas las demás. A partir de aquí, se abren, por tanto, las más amplias perspectivas para llenar las lagunas de los lenguajes de fórmulas existentes, para conectar en un solo dominio las áreas separadas hasta ahora y para ampliarlo a áreas en las que tal lenguaje faltaba.

Confío, sobre todo, en una exitosa aplicación de mi conceptografía cuando se tenga que poner un valor especial en la precisión de una prueba, como cuando se trata de los fundamentos del cálculo diferencial e integral.

Me parece más fácil aún extender el dominio de este lenguaje de fórmulas a la geometría. Sólo se tendrían que añadir algunos símbolos para las relaciones intuitivas que allí aparecen. De esta manera se obtendría una especie de *analysis situs*.

El paso a la teoría pura del movimiento y aún a la mecánica y a la física podrían seguirse de aquí. En estas últimas áreas, donde junto a la necesidad racional se hace valer la necesidad natural, es donde fácilmente se puede prever un mayor desarrollo del modo de simbolización en la medida en que avance el conocimiento. Pero, por eso, no es necesario esperar hasta que parezca haber llegado a su fin ese avance.

Si es una tarea de la filosofía romper el dominio de las palabras sobre la mente humana descubriendo los engaños que surgen casi inevitablemente sobre las relaciones de los conceptos en el uso del lenguaje, al liberar al pensamiento de la contaminación que proviene únicamente de la naturaleza de los medios lingüísticos de expresión, entonces mi conceptografía, más desarrollada para estos propósitos, podrá ser un instrumento útil a los filósofos. Ciertamente, tampoco representa de manera pura a los pensamientos, cosa que no parece ser posible con un medio de presentación externo; pero, por una parte, se pueden limitar esas desviaciones a las inevitables e inocuas y, por otra parte, en virtud de que son de un tipo totalmente distinto a las que son propias del lenguaje, se ofrece una protección contra una influencia unilateral de uno de esos medios de expresión.

La mera invención de esta conceptografía, me parece, ha hecho prosperar a la lógica. Espero que los lógicos, si no se dejan intimidar por una primera impresión ante lo extraño, no nieguen su aceptación a las innovaciones a las que me vi impelido por una necesidad inherente al asunto mismo. Esas discrepancias con lo tradicional encuentran su justificación en que la lógica, hasta ahora, siempre se ha ajustado demasiado estrechamente al lenguaje y a la gramática. En especial, creo que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de *argumento* y *función*, se acreditará con el tiempo. Es fácil ver cómo concebir un contenido como una función de un argumento tiene el efecto de una formación conceptual. Más aún, la demostración de la conexión entre los significados de las palabras *si*, *y*, *no*, *o*, *existe*, *algunos*, *todos*, etcétera, merece atención.

Con respecto a algunos detalles, sólo merece una mención especial lo siguiente.

La restricción, en § 6, a un solo modo de inferencia se justifica en virtud de que en la *fundamentación* de una conceptografía de este tipo, los componentes primitivos se tienen que tomar tan simples como sea posible si se quiere lograr orden y claridad. Esto no excluye el que, *posteriormente*, transiciones de varios juicios a uno nuevo, transiciones que según este único modo de inferencia sólo son posibles de manera mediata, se conviertan por mor de la abreviación en inmediatas. De hecho esto se podría recomendar para alguna aplicación posterior. De esta manera, pues, surgirían más modos de inferencia. Posteriormente me he dado cuenta de que las fórmulas (31) y (41)* pueden reducirse a

$$\vdash\!\!-\,(-\!\!\top\!\!-\, a \equiv a)$$

por lo que son posibles aún algunas simplificaciones.

Como he señalado al principio, la aritmética ha sido el punto de partida del curso de pensamiento que me ha conducido

*Frege se refiere a las fórmulas que con esos números aparecen en la Parte II de su *Conceptografía*. [N. del t.]

a mi conceptografía. Por tanto, a esa ciencia pienso aplicarla primero, tratando de analizar más sus conceptos y de fundamentar más profundamente sus teoremas. Por lo pronto, en la tercera Parte he comunicado algunos resultados preliminares que apuntan en esa dirección. La prosecución del camino indicado, la elucidación de los conceptos de número, magnitud, etcétera, será objeto de otras investigaciones que aparecerán inmediatamente después de este escrito.

Jena, 18 de diciembre de 1878.

CONTENIDO TEMÁTICO

I. EXPLICACIÓN DE LOS SÍMBOLOS

LA GENERALIDAD

II. REPRESENTACIÓN Y DEDUCCIÓN DE ALGUNOS JUICIOS DEL PENSAMIENTO PURO

III. ALGUNAS CUESTIONES DE UNA TEORÍA GENERAL DE LAS SERIES

I. EXPLICACIÓN DE LOS SÍMBOLOS

§ 1. Los símbolos usados en la teoría general de las magnitudes se dividen en dos clases. La primera comprende las letras, cada una de las cuales representa ya sea un número que se deja indeterminado o una función que se deja indeterminada. Esta indeterminación hace posible que las letras se usen para expresar la validez general de las proposiciones, como en

$$(a + b)\, c = ac + bc \quad .$$

La otra clase comprende aquellos símbolos como $+$, $-$, $\surd$, 0, 1, 2, cada uno de los cuales tiene su propio significado particular.

Adopto esta idea básica de distinguir dos clases de símbolos, cosa que por desgracia no se lleva a cabo estrictamente en la teoría de las magnitudes,[3] *para hacerla utilizable en el dominio más amplio del pensamiento puro en general.* Por tanto, divido todos los símbolos que uso en *aquellos mediante los cuales se pueden representar diferentes cosas* y *aquellos que tienen un sentido completamente determinado.* La primera clase consta de *letras*, y éstas han de servir principalmente para expresar la *generalidad.* Pero, a pesar de su indeterminación, se debe insistir en que una letra *conserve* en el mismo contexto el significado que ya se le haya dado.

EL JUICIO

§ 2. Un juicio siempre ha de expresarse por medio del símbolo

$$\vdash$$

colocado a la izquierda del símbolo o combinaciones de símbolos en que se expresa el contenido del juicio. Si se *omite* la

[3] Piénsese en los símbolos 1, log, sen, lim.

pequeña barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, esto transforma al juicio en una mera combinación de ideas acerca de la cual quien la escribe no expresa si reconoce o no verdad en ella. Por ejemplo, digamos que

$$\vdash\!\!\!-\, A$$ [4]

significa el juicio: "los polos magnéticos opuestos se atraen", entonces

$$-\!\!-\, A$$

no expresará ese juicio, sino que sólo ha de provocar en el lector la representación de la atracción recíproca de los polos opuestos, para, digamos, sacar consecuencias de esto y, con ellas, probar la corrección del pensamiento. En este caso, *parafraseamos* por medio de las palabras "*la circunstancia de que*" o "*la proposición de que*".

No cualquier contenido puede convertirse en un juicio al anteponerle $\vdash\!\!\!-$ a su símbolo; no, por ejemplo, la representación "casa". Por tanto, distinguimos entre contenidos *juzgables* y no *juzgables*.[5]

La *barra horizontal*, a partir de la cual se forma el símbolo $\vdash\!\!\!-$, *junta en un todo los símbolos que lo siguen, y la afirmación expresada por la barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal atañe a ese todo.* A la barra horizontal se le llama *barra de contenido*, a la barra vertical *barra de juicio*. Sirva también la barra de contenido, además, para poner en relación cualquier símbolo con el todo de símbolos que sigue a la barra. *Lo que sigue a la barra de contenido debe tener siempre un contenido juzgable.*

§ 3. En mi modo de representar un juicio *no se hace* una distinción entre *sujeto* y *predicado*. Para justificar esto, advierto que los contenidos de dos juicios pueden ser distintos de dos maneras: primero, de manera tal que las consecuencias que se pueden

[4] Utilizo las letras griegas como abreviaturas; si no las defino específicamente, el lector puede darles un sentido apropiado.

[5] Por otra parte, la circunstancia de que hay casas (o una casa) (véase § 12), sería un contenido juzgable. Pero la representación "casa" es sólo una parte de él. En la proposición "la casa de Príamo era de madera", "casa" no se puede sustituir por "circunstancia de que hay una casa". Otra clase de contenido no juzgable es, por ejemplo, el que se encuentra junto a la fórmula 81.

derivar de uno, en combinación con otros juicios determinados, se puedan también derivar del otro en combinación con los mismos juicios; en segundo lugar, de tal forma que esto no sea el caso. Las dos proposiciones: "en Platea los griegos derrotaron a los persas" y "en Platea los persas fueron derrotados por los griegos" son distintas de la primera manera. Aun cuando se puede reconocer una pequeña diferencia en el sentido, no obstante, la concordancia prevalece. Ahora bien, llamo *contenido conceptual* a aquella parte del contenido que es la misma en ambos juicios. Puesto que *sólo ésta* tiene significado para la conceptografía, no necesito hacer distinción alguna entre proposiciones que tienen el mismo contenido conceptual. Si se dice "el sujeto es el concepto del que trata el juicio" eso es cierto también del objeto. Por tanto, sólo se puede decir: "el sujeto es el concepto del que principalmente trata el juicio". El lugar del sujeto en la serie de palabras tiene en el lenguaje el significado de un lugar *sobresaliente*, en donde se pone lo que se quiere que atraiga la atención de quien escucha (véase también § 9). Esto, por ejemplo, puede tener el propósito de indicar una relación de este juicio con otros y, con ello, facilitar al oyente la captación del contexto entero. Así, todos los rasgos visibles del lenguaje que surgen sólo de la interacción del hablante y el oyente –cuando, por ejemplo, el hablante toma en consideración la expectación del oyente e intenta ponerlo sobre la pista correcta aun antes de pronunciar una oración–, nada tienen que les corresponda en mi lenguaje de fórmulas, ya que la única cosa relevante en un juicio es lo que influye en sus *posibles consecuencias*. Todo lo que es necesario para una inferencia válida se expresará cabalmente; pero lo que no es necesario por lo general no se indicará: *nada se dejará a la conjetura*. En esto sigo por completo el ejemplo del lenguaje de fórmulas matemático en el que también sólo forzándolo se puede distinguir entre sujeto y predicado. Se puede concebir un lenguaje en el que la proposición "Arquímedes pereció en la toma de Siracusa" pudiera expresarse de la siguiente manera: "la muerte violenta de Arquímedes en la toma de Siracusa es un hecho". Ciertamente, también aquí se puede, si se quiere, distinguir entre sujeto y predicado, pero el sujeto encierra el contenido completo y el predicado sólo tiene el propósito de

presentarlo como un juicio. *Semejante lenguaje tendría únicamente un predicado para todos los juicios, a saber, "es un hecho".* Se ve que en absoluto puede hablarse aquí de sujeto y predicado en el sentido habitual. *Nuestra conceptografía es un lenguaje así, y el símbolo* $\vdash$ *es, en él, el predicado común para todos los juicios.*

En el primer esbozo de un lenguaje de fórmulas me dejé llevar por el ejemplo del lenguaje componiendo los juicios con sujeto y predicado. Pero pronto me convencí de que esto era contrario a mi propósito particular y de que sólo conducía a formas prolijas inútiles.

§ 4. Las observaciones siguientes deben explicar el significado, para nuestros propósitos, de las distinciones que se hacen en relación con los juicios.

Se distingue entre juicios *universales* y *particulares*: en realidad no es ésta una distinción entre juicios, sino entre contenidos. *Se debería decir: "un juicio con contenido universal", "un juicio con contenido particular".* Ya que esas propiedades corresponden al contenido, aun cuando éste *no* se proponga como un juicio, sino como proposición. (Véase § 2.)

Lo mismo vale para la negación. Por ejemplo, en una prueba indirecta se dice "supóngase que los segmentos *AB* y *CD* no fuesen iguales". Aquí, el contenido de que los segmentos *AB* y *CD* no sean iguales, contiene una negación; pero este contenido, si bien susceptible de ser juzgado, no se propone como juicio. Por tanto, la negación se adhiere al contenido, sea que éste se presente como juicio o no. Así, sostengo que es más apropiado considerar a la negación como un rasgo de un *contenido juzgable.*

La distinción de los juicios en categóricos, hipotéticos y disyuntivos, tiene, en mi opinión, sólo una significación gramatical.[6]

El juicio apodíctico se distingue del asertivo en que sugiere la existencia de juicios universales a partir de los cuales se puede inferir la proposición, mientras que en el caso del asertivo falta tal sugerencia. Cuando designo una proposición como necesaria, con ello doy una indicación sobre mis fundamentos

[6] La justificación de esto emergerá de la totalidad del texto.

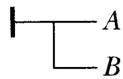
del juicio. *Pero, puesto que con esto no se toca el contenido conceptual del juicio, la forma del juicio apodíctico no tiene para nosotros importancia alguna.*

Cuando se propone una proposición como posible, o el hablante se abstiene de juzgar, con lo cual indica que no conoce ley alguna de la cual se podría derivar su negación, o dice que la negación de la proposición en su forma general es falsa. En este último caso, tenemos lo que habitualmente llamamos un *juicio particular afirmativo* (véase § 12). "Es posible que la Tierra alguna vez choque con otro cuerpo celeste", es un ejemplo del primer caso, y "un resfriado puede causar la muerte" es un ejemplo del segundo.

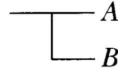
LA CONDICIONALIDAD

§ 5. Si *A* y *B* significan contenidos juzgables (véase § 2), entonces, hay las siguientes cuatro posibilidades:

1) *A* es afirmada y *B* es afirmada;
2) *A* es afirmada y *B* es negada;
3) *A* es negada y *B* es afirmada;
4) *A* es negada y *B* es negada.

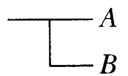


significa, pues, el juicio de que *no tiene lugar la tercera de estas posibilidades, sino una de las otras tres.* Según esto, si se niega



significa esto que la tercera posibilidad tiene lugar, esto es, que *A* se niega y *B* se afirma.

De los casos en que



se afirma, hay que resaltar lo siguiente:

1) *A* tiene que ser afirmada. Luego, el contenido de *B* es completamente irrelevante. Por ejemplo, sea que: $\vdash A$ signifique que $3 \times 7 = 21$ y que *B* signifique la circunstancia de que

el Sol brilla. Aquí, sólo los dos primeros de los cuatro casos mencionados son posibles. No tiene que haber una conexión causal entre ambos contenidos.

2) *B* tiene que negarse. Luego, el contenido de *A* es irrelevante. Por ejemplo: sea que *B* signifique la circunstancia de que un *perpetuum mobile* es posible y *A* la circunstancia de que el mundo es infinito. Aquí sólo son posibles el segundo y el cuarto de los cuatro casos. No es necesario que haya una conexión causal entre *A* y *B*.

3) Podemos hacer el juicio

⊢ *A*
B

sin saber si *A* y *B* tienen que afirmarse o negarse. Por ejemplo, sea que *B* signifique la circunstancia de que la Luna está en cuadratura [con el Sol] y *A* la circunstancia de que parece un semicírculo. En este caso se puede traducir

⊢ *A*
B

con ayuda del término conjuntivo "si": "si la Luna está en cuadratura [con el Sol], entonces parece un semicírculo". Sin embargo, la conexión causal implícita en la palabra "si", no se expresa en nuestros símbolos, aunque un juicio de esta clase sólo puede hacerse con base en tal conexión. Pues esa conexión es algo general, pero aún no tenemos ninguna expresión para la generalidad. (Véase § 12.)

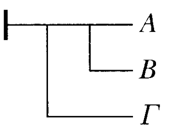
Llámese *barra de condición* a la barra vertical que une a las dos barras horizontales. La parte de la barra horizontal superior que se encuentra a la izquierda de la barra de condición es la barra de contenido para el significado, explicado ya, del símbolo complejo

A
B ;

a esto se unirá todo símbolo que haya de referirse al contenido total de la expresión. La parte de la barra horizontal que está entre *A* y la barra de condición es la barra de contenido de *A*.

La barra horizontal a la izquierda de *B* es la barra de contenido de *B*.

Según lo anterior, es fácil reconocer que



niega el caso en que *A* es negada y *B* y *Γ* son afirmadas. Se tiene que pensar que esto se compone de

A
B y *Γ* ,

así como

A
B

se compone de *A* y *B*. Por lo tanto, tenemos, primero, la negación del caso en que se niega

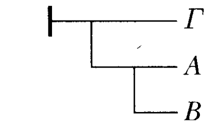
A
B

y se afirma *Γ*. Pero la negación de

A
B

significa que *A* se niega y *B* se afirma. De aquí resulta lo que antes se dio. Si hay una conexión causal, entonces también se puede decir: "*A* es la consecuencia necesaria de *B* y *Γ*" o "si ocurren las circunstancias *B* y *Γ*, entonces, también ocurre *A*".

Resulta igualmente fácil reconocer que



niega el caso en que *B* es afirmada, pero *A* y *Γ* son negadas. Si se presupone una conexión causal entre *A* y *B*, entonces se puede traducir: "si *A* es la consecuencia necesaria de *B*, entonces se puede inferir que *Γ* tiene lugar".

§ 6. De la explicación dada en § 5, resulta que de los dos juicios

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\llcorner\!-B \end{array} \quad \text{y} \quad \vdash\!-B$$

se sigue el nuevo juicio

$$\vdash\!-A \quad .$$

De los cuatro casos enumerados antes, el tercero es excluido por

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\llcorner\!-B \end{array} \quad ,$$

pero el segundo y el cuarto son excluidos por

$$\vdash\!-B$$

así que sólo queda el primero.

Eventualmente podría escribirse así esta inferencia:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\llcorner\!-B \\ \vdash\!\!-\!\!-B \\ \hline \vdash\!\!-\!\!-A \end{array} \quad .$$

Esto resultaría muy prolijo si en los lugares de *A* y de *B* hubiera expresiones largas, ya que cada una de ellas tendría que escribirse dos veces. Por ello utilizo la siguiente abreviación. A cada juicio que aparezca en el contexto de la prueba se le designará mediante un número que será colocado a la derecha de este juicio cuando aparezca por primera vez. A manera de ejemplo, sea el caso que se haya designado el juicio

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\llcorner\!-B \end{array} \quad ,$$

o uno que contenga a este juicio como caso especial, por medio de *X*. Entonces escribo la inferencia así:

$$(X) : \frac{\vdash\!-B}{\vdash\!-A} \quad .$$

Aquí, se deja al lector componer, a partir de $\vdash\!-B$ y $\vdash\!-A$, el juicio

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\llcorner\!-B \end{array}$$

y ver si concuerda con el juicio *X* citado.

Si, por ejemplo, el juicio $\vdash\!-B$ es designado por medio de *XX*, entonces también escribo la misma inferencia como sigue:

$$(XX) :: \frac{\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\llcorner\!-B \end{array}}{\vdash\!\!-\!\!-A} \quad .$$

Aquí, los dobles puntos indican que $\vdash\!-B$, sólo aludido por medio de *XX*, se tiene que construir de una manera diferente de la anterior a partir de los dos juicios apuntados.

Si también, digamos, se hubiera designado al juicio $\vdash\!-\Gamma$ mediante *XXX*, entonces se escribirían los dos juicios siguientes

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\;\;\llcorner\!-B \\ \quad\;\llcorner\!\!-\!\!-\Gamma \\ \hline (XXX) :: \\ \vdash\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\llcorner\!-B \\ \hline (XX) :: \\ \vdash\!-A \end{array}$$

todavía más brevemente así:

$$(XX, XXX) :: \frac{\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!-A \\ \quad\;\;\;\llcorner\!-B \\ \quad\;\llcorner\!\!-\!\!-\Gamma \end{array}}{\vdash\!-A} \quad .$$

Siguiendo a Aristóteles, en lógica se enumera toda una serie de modos de inferencia; yo sólo me sirvo de éste —al menos en todos los casos en los que un juicio nuevo se deriva a partir

de más de un solo juicio–. Es que la verdad contenida en otros modos de inferencia se puede expresar en un juicio de la forma: si vale M y si vale N, entonces también vale A; en símbolos:

```
├──┬──┬── A
   │  └── M
   └───── N .
```

De este juicio y de ├── N y ├── M, se sigue, entonces, ├── A, como se expresa arriba. Así, una inferencia hecha de acuerdo con cualquier modo de inferencia puede ser reducida a nuestro caso. Puesto que es posible arreglárselas con un solo modo de inferencia, constituye un precepto de claridad hacerlo así. Además, de otra manera, no habría ninguna razón para quedarse sólo con los modos de inferencia aristotélicos, pues siempre se podrían añadir, indefinidamente, nuevos modos; de cada uno de los juicios expresados en las fórmulas en §§ 13–22* se podría hacer un modo de inferencia particular. *Con esta limitación a un solo modo de inferencia, sin embargo, en modo alguno se pretende expresar una proposición psicológica, sino únicamente zanjar una cuestión relativa a la forma de la manera más expedita.* Algunos de los juicios que remplazan a modos de inferencia aristotélicos se presentarán en § 22 (fórmulas 59, 62 y 65).†

LA NEGACIÓN

§ 7. Si se añade una pequeña barra vertical en la parte inferior de la barra de contenido, entonces, con ello se quiere expresar la circunstancia de que *el contenido no tiene lugar*. Por ejemplo,

```
├┬─ A
```

significa "A no tiene lugar". A esta pequeña barra vertical la llamo *barra de negación*. La parte de la barra horizontal que se encuentra a la derecha de la barra de negación es la barra de contenido de A; en contraposición, la parte que se encuentra a la izquierda de la barra de negación es la barra de contenido

* Frege se refiere a los teoremas que deriva a partir de los axiomas de su sistema en las secciones 13 a 22 de la Parte II de su *Conceptografía*. [N. del t.]
† Véase nota anterior. [N. del t.]

de la negación de A. Aquí, como en otras partes de la conceptografía, sin la barra de juicio no se emite ningún juicio;

```
─┬─ A
```

sólo invita a formar la representación de que A no tiene lugar, sin expresar si esa representación es verdadera.

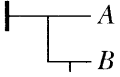
Ahora consideremos unos casos en los que se combinan entre sí los símbolos de condicionalidad y de negación.

```
├──┬┬─ A
   └── B
```

significa: "el caso en que ha de afirmarse B y ha de negarse la negación de A no tiene lugar"; en otras palabras, "No existe la posibilidad de afirmar ambas A y B" o "A y B se excluyen mutuamente" . De esta manera, sólo quedan los siguientes tres casos:

A es afirmada y B es negada;
A es negada y B es afirmada;
A es negada y B es negada.

De acuerdo con lo precedente, es fácil indicar qué significado tiene cada una de las tres partes de la barra horizontal que antecede a A.



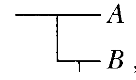
significa: "no existe el caso en el que A es negada y la negación de B es afirmada"; o "ambas, A y B, no pueden ser negadas". Sólo quedan las siguientes posibilidades:

A es afirmada y B es afirmada;
A es afirmada y B es negada;
A es negada y B es afirmada.

A y B agotan, juntas, todas las posibilidades. Las palabras "o" y "o. . . o" se usan, pues, de dos maneras:

"A o B"

significa, en primer lugar, sólo lo mismo que



por tanto, que fuera de *A* y *B* nada es pensable. Por ejemplo, si se calienta una masa de gas, entonces aumenta su volumen o su presión. En segundo lugar, la expresión

"*A* o *B*"

combina los significados de

y

de modo que, en primer lugar, fuera de *A* y *B* no hay una tercera posibilidad, y que, en segundo lugar, *A* y *B* se excluyen. De las cuatro posibilidades sólo quedan, pues, las dos siguientes:

A es afirmada y *B* es negada;
A es negada y *B* es afirmada.

De las dos maneras de usar la expresión "*A* o *B*", la primera, que no excluye la coexistencia de *A* y *B*, es la más importante y *nosotros utilizaremos la palabra* "o" *en ese sentido*. Tal vez sea apropiado hacer la distinción entre "o" y "o ... o", de modo que sólo esta última tenga el significado secundario de la exclusión mutua. Por tanto, podemos traducir

por "*A* o *B*". Asimismo,

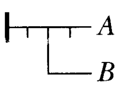
tiene el significado de "*A* o *B* o *Γ*".

significa: "se niega

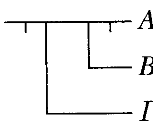
A"

u "ocurre el caso en que ambas *A* y *B* son afirmadas". En cambio, las tres posibilidades que quedan abiertas según

se excluyen. Según esto,

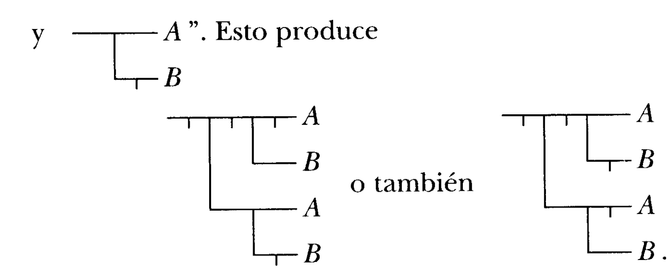


se puede traducir así: "ambas, *A* y *B*, son hechos". Fácilmente se ve también que



puede traducirse como "*A* y *B* y *Γ*". Si se quiere representar en símbolos "o *A* o *B*", con el significado secundario de la exclusión mutua, entonces se tiene que expresar: "

y *A* ". Esto produce



En lugar de expresar, como aquí sucede, "y" por medio de símbolos de condicionalidad y de negación, se podría también, a la inversa, representar la condicionalidad por medio de un símbolo para "y" y el símbolo de negación. Se podría introducir, digamos,

$$\begin{cases} \Gamma \\ \Delta \end{cases}$$

como símbolo para el contenido conjunto de *Γ* y de *Δ* y por tanto, traducir,

mediante

He elegido la otra manera porque me parece que así se expresa de manera más sencilla la inferencia. La distinción entre "y" y

"pero" es del tipo que no cobra expresión en esta conceptografía. El hablante utiliza "pero" cuando quiere dar una indicación de que lo que sigue es diferente de lo que de inmediato se podría suponer.

```
├┬──┬── A
    └── B
```

significa "ocurre la tercera de las cuatro posibilidades, a saber, que *A* se niega y *B* se afirma". Por tanto, se puede traducir: "*B* y (pero) no *A* tiene lugar".

La combinación de símbolos

```
├┬──┬┬─ B
    └┬─ A
```

se puede traducir de la misma manera.

```
├┬──┬── B
    └┬─ A
```

significa: “”ocurre el caso en que ambas *A* y *B* se niegan". Por tanto, se puede traducir :

"ni *A* ni *B* es un hecho".

Las palabras "o", "y", "ni... ni" sólo son tomadas aquí en consideración, por supuesto, en la medida en que unan contenidos *juzgables*.

LA IGUALDAD DE CONTENIDO

§ 8. La igualdad de contenido se distingue de la condicionalidad y de la negación en que se refiere a nombres, no a contenidos. Mientras que normalmente los símbolos son meros representantes de sus contenidos, de manera que toda combinación en la que figuran expresa sólo una relación entre sus contenidos, de pronto se muestran ellos mismos cuando se combinan por medio del símbolo de la igualdad de contenido; pues con ello se expresa la circunstancia de que dos nombres tienen el mismo contenido. Por tanto, al introducir un símbolo para la igualdad de contenido, se produce necesariamente un desdoblamiento en el significado de todos los símbolos ya que de pronto representan su contenido, de pronto se representan a sí

mismos. Esto despierta primeramente la impresión de que aquí se trata de algo que corresponde a la *expresión* solamente, *no al pensamiento*, y de que en modo alguno se requieren símbolos diferentes para el mismo contenido y, por tanto, tampoco símbolo alguno para la igualdad de contenido. Para mostrar que esta apariencia es engañosa, elijo el siguiente ejemplo tomado de la geometría. En una circunferencia hay un punto fijo *A* alrededor del cual se hace girar un rayo. Cuando éste forma un diámetro, llamamos al extremo opuesto a *A* el punto *B* asociado a esa posición del rayo. Luego, de manera más general, llamamos al punto de intersección de ambas líneas el punto *B* asociado a la posición del rayo en cada momento, el cual resulta de aplicar la regla de que a variaciones continuas de la posición del rayo deben corresponder siempre variaciones continuas en la posición de *B*. Por tanto, el nombre *B* significa algo indeterminado, mientras no se especifique la posición asociada del rayo. Ahora, se puede preguntar: ¿a qué punto se asocia la posición del rayo cuando éste es perpendicular al diámetro? La respuesta será: al punto *A*. Por tanto, en este caso, el nombre *B* tiene el mismo contenido que el nombre *A*; y, sin embargo, no se podría haber usado de antemano un solo nombre, ya que la justificación para hacerlo sólo se da a través de esta respuesta. El mismo punto se determina de dos maneras:

1) inmediatamente por la intuición,
2) como punto *B* asociado al rayo perpendicular al diámetro.

A cada uno de estos dos modos de determinación corresponde un nombre particular. La necesidad de un símbolo para la igualdad de contenido se funda, por tanto, en lo siguiente: el mismo contenido se puede determinar plenamente de diferentes modos; pero que en un caso particular se da realmente *lo mismo* mediante *dos maneras de determinarlo* es el contenido de un *juicio*. Antes de que se haga éste se deben asignar dos nombres distintos, correspondientes a los dos modos de determinación, a lo determinado por ellos. Pero para su expresión el juicio requiere un símbolo de igualdad de contenido que conecte esos dos nombres. De aquí resulta que los nombres distintos para el mismo contenido no siempre son meramente

una cuestión ociosa de forma, sino que conciernen al meollo del asunto cuando se conectan con diferentes modos de determinación del contenido. En este caso, el juicio que tiene por objeto la igualdad de contenido es sintético en el sentido kantiano. Una razón más externa para introducir un símbolo de igualdad de contenido es que ocasionalmente es conveniente introducir una abreviatura en lugar de una expresión extensa. Entonces se tiene que expresar la igualdad de contenido de la abreviatura y la forma original.

$$\vdash (A \equiv B)$$

significa, pues, que el símbolo *A* y el símbolo *B* tienen el mismo contenido conceptual, de modo que *A* siempre se puede remplazar por *B*, y viceversa.

LA FUNCIÓN

§ 9. Si, expresada en nuestro lenguaje de fórmulas, pensamos la circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico, podemos poner entonces en lugar del símbolo del hidrógeno el símbolo del oxígeno o del nitrógeno. Al hacer esto cambiamos el sentido de manera tal que "oxígeno" o "nitrógeno" aparecen en la relación en la que antes se encontraba "hidrógeno".

Si se piensa de esta manera una expresión como variable, se descompone la misma en un componente estable, que representa la totalidad de las relaciones, y el símbolo que se concibe como remplazable por otros y que significa el objeto que se encuentra en esas relaciones. Al primer componente lo llamo función, y al segundo su argumento. Esta distinción nada tiene que ver con el contenido conceptual, sino que sólo es una cuestión de puntos de vista. Mientras que desde el punto de vista al que aludimos antes, "hidrógeno" era el argumento y "ser más liviano que el anhídrido carbónico" era la función, podemos también interpretar el mismo contenido conceptual de modo tal que "anhídrido carbónico" sea el argumento y "ser más pesado que el hidrógeno" sea la función. Sólo necesitamos, entonces, pensar "anhídrido carbónico" como remplazable por otras representaciones, digamos, "ácido clorhídrico" o "amoniaco".

> "La circunstancia de que el anhídrido carbónico es más pesado que el hidrógeno"

y

> "La circunstancia de que el anhídrido carbónico es más pesado que el oxígeno",

son la misma función con diferentes argumentos, si se consideran "hidrógeno" y "oxígeno" como argumentos; por el contrario, son diferentes funciones con el mismo argumento si como tal se considera "anhídrido carbónico".

Sirva, ahora, como ejemplo: "la circunstancia de que el centro de masa del sistema solar no tiene aceleración si sólo actúan fuerzas internas en el sistema solar". Aquí, "sistema solar" aparece en dos lugares. Por tanto, podemos concebir de varias maneras esto como una función del argumento "sistema solar"; dependiendo de si pensamos "sistema solar" como remplazable en el primero o en el segundo lugar o en ambos –pero en este último caso en los dos lugares por lo mismo–. Estas tres funciones son todas distintas. La proposición de que Catón mató a Catón muestra lo mismo. Si pensamos aquí "Catón" como remplazable en el primer lugar, entonces "matar a Catón" es la función; si pensamos "Catón" como remplazable en el segundo lugar, entonces "ser matado por Catón" es la función; finalmente si pensamos "Catón" como remplazable en ambos lugares, entonces "matarse a sí mismo" es la función.

Ahora expresamos el asunto en general:

"Si en una expresión cuyo contenido no necesita ser juzgable, aparece un símbolo simple o compuesto en uno o más lugares, y lo pensamos como remplazable por algo distinto en todos o en algunos de esos lugares, pero siempre por lo mismo, entonces, a la parte de la expresión que aparece sin cambio la llamamos función y a la parte remplazable, su argumento."

Puesto que, según esto, algo puede aparecer como argumento y, a la vez, en lugares tales de la función en donde no se le piensa como remplazable, distinguimos los lugares de argumento en la función de los demás lugares.

Se debe tener cuidado de una impresión engañosa a la cual fácilmente da lugar el uso lingüístico. Si se comparan las siguientes dos proposiciones:

"el número 20 es representable como la suma de cuatro cuadrados"

y

"todo número entero positivo es representable como la suma de cuatro cuadrados"

entonces, parece posible concebir como una función "ser representable como la suma de cuatro cuadrados", la cual tiene en una ocasión como argumento "el número 20" y en la otra "todo número entero positivo". Se reconoce que esta concepción es errónea al advertir que "el número 20" y "todo número entero positivo" no son conceptos de la misma categoría. Lo que se puede predicar del número 20 no se puede predicar en el mismo sentido de "todo número entero positivo", aunque es posible que haya circunstancias en que se lo pueda predicar de todo número entero positivo. La expresión "todo número entero positivo", por sí misma, no proporciona, como "el número 20", una representación independiente, sino que sólo adquiere un sentido en el contexto de una proposición.

Para nosotros, carecen de importancia los distintos modos en que el mismo contenido conceptual pueda ser pensado como función de este o aquel argumento en tanto que la función y el argumento estén plenamente determinados. Pero si el argumento está *indeterminado*, como en el juicio "Puedes tomar como argumento de la función 'ser representable como la suma de cuatro cuadrados' un número entero positivo cualquiera: la proposición sigue siendo correcta", entonces la distinción entre función y argumento cobra significación *en cuanto al contenido*. A la inversa, también se puede determinar el argumento, aun cuando la función esté indeterminada. En ambos casos, la totalidad en cuanto al contenido y no sólo en relación con nuestro punto de vista, se descompone en *función* y *argumento*, a través de la contraposición entre lo *determinado* y lo *indeterminado* o entre lo *más* y lo *menos* determinado.

Si en una función un símbolo que hasta ahora se consideraba como irremplazable[7] *es pensado como remplazable en algunos o todos los*

[7] Un símbolo pensado previamente como remplazable [en algunos lugares], puede asimismo ser considerado ahora como remplazable también en otros lugares en donde hasta entonces se consideraba como fijo.

lugares donde aparece, entonces, por medio de esta concepción, se obtiene una función que tiene un argumento nuevo además de los que ya tuviere. De esta manera surgen *funciones de dos o más argumentos*. Así, por ejemplo, "la circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico" se puede concebir como función de los dos argumentos "hidrógeno" y "anhídrido carbónico".

Habitualmente, en la mente del hablante el sujeto es el argumento principal; el que sigue en importancia aparece con frecuencia como objeto. A través de la elección de formas gramaticales o de palabras como

activo	–	pasivo
más pesado	–	más liviano
dar	–	recibir

el lenguaje tiene la libertad de hacer aparecer, a discreción, éste o aquel componente de la proposición como argumento principal, una libertad que, sin embargo, está limitada por la pobreza del léxico.

§ 10. *Para expresar una función indeterminada del argumento* A *encerramos entre paréntesis* A *y la ponemos en seguida de una letra*, por ejemplo,

$$\Phi(A).$$

Asimismo,

$$\Psi(A, B)$$

significa una función de los dos argumentos, A *y* B *que tampoco está determinada. Aquí los lugares de* A *y de* B *en los paréntesis representan los lugares que ocupan* A *y* B *en la función*, ya sea que sean únicos o múltiples, tanto para *A* como para *B*. *Por lo tanto,*

$$\Psi(A, B) \text{ en general es distinto de } \Psi(B, A).$$

Las funciones indeterminadas de más argumentos se expresan correspondientemente de la siguiente manera:

$$\vdash\!\!-\, \Phi(A)$$

se puede leer: "*A* tiene la propiedad Φ".

$$\vdash \Psi(A, B)$$

se puede traducir como "B está en la relación Ψ respecto de A" o "B es el resultado de una aplicación del procedimiento Ψ sobre el objeto A".

Puesto que en la expresión

$$\Phi(A)$$

el símbolo Φ aparece en un lugar, y puesto que podemos pensar en remplazarlo por otros símbolos, Ψ, X —con lo cual se expresarían otras funciones del argumento A—, *se puede, así, concebir* $\Phi(A)$ *como una función del argumento* Φ. Aquí se ve con especial claridad que el concepto de función en análisis matemático, al que me he adherido en general, es mucho más restringido que el que he desarrollado aquí.

LA GENERALIDAD

§ 11. En la expresión de un juicio se puede considerar siempre la combinación de símbolos que está a la derecha de $\vdash$ como función de uno de los símbolos que ahí aparecen. *Si en el lugar de ese argumento se coloca una letra gótica y si a la barra de contenido se le hace una concavidad en la que se pone esa misma letra, como en*

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\Phi(\mathfrak{a}),$$

entonces, esto significa el juicio de que, sea lo que fuere que se considere como su argumento, esa función es un hecho. Puesto que una letra utilizada como símbolo de función, digamos Φ en $\Phi(A)$, puede ser considerada ella misma como argumento de una función, entonces puede ser remplazada por una letra gótica, del modo antes especificado. El significado de una letra gótica sólo está sujeto a la restricción, comprensible de suyo, de que la combinación de símbolos que viene después de la barra de contenido tiene que seguir siendo juzgable (véase § 2) y de que cuando la letra gótica aparece como símbolo de función tiene que tomarse en cuenta esta circunstancia. *Todas las demás condiciones a que se tiene que sujetar lo que puede remplazar a una letra gótica se han de incorporar al juicio.* Por tanto, de tal juicio siempre se puede deducir una cantidad discrecional de juicios con un contenido menos general, poniendo en el lugar de la letra gótica algo distinto en cada caso, con lo cual desapare-

ce de nuevo la concavidad en la barra de contenido. La barra horizontal que se encuentra a la izquierda de la concavidad en

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\Phi(\mathfrak{a})$$

es la barra de contenido [para el contenido juzgable] de que $\Phi(\mathfrak{a})$ es válido sea lo que fuere que se ponga en lugar de $\mathfrak{a}$; la barra horizontal que se encuentra a la derecha de la concavidad es la barra de contenido de $\Phi(\mathfrak{a})$, en donde lo que se ponga en lugar de $\mathfrak{a}$ debe pensarse como algo determinado.

Después de lo que se ha dicho sobre el significado de la barra de contenido, es fácil ver qué significa una expresión como

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a}) \quad .$$

Ésta puede aparecer como parte de un juicio como en

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a}) \quad , \quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\frown\!\!\!-A \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a}) \end{array} \quad .$$

Es evidente que de estos juicios no se pueden derivar juicios menos generales al sustituir $\mathfrak{a}$ por algo determinado como sí acontece en

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\Phi(\mathfrak{a}) \quad .$$

Por medio de $\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$ se niega que $X(\mathfrak{a})$ sea siempre un hecho, sea lo que fuere que se ponga en lugar de $\mathfrak{a}$. Con ello en manera alguna se niega que se podría dar un significado Δ a $\mathfrak{a}$ de manera que $X(\Delta)$ fuera un hecho.

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\frown\!\!\!-A \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a}) \end{array}$$

significa que el caso en que $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$ se afirma y A se niega no ocurre. Con ello, en manera alguna se niega que ocurra el caso en el que $X(\Delta)$ se afirma y A se niega; pues, como hemos visto antes, $X(\Delta)$ puede ser afirmada y, sin embargo, ser negada $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$. Por consiguiente, aquí tampoco se puede poner algo arbitrario en lugar de $\mathfrak{a}$ sin poner en riesgo la justeza [*Richtigkeit*] del juicio. Esto aclara por qué es necesaria la concavidad con la letra gótica ahí inscrita: *delimita el alcance de la generalidad indicada por medio de la letra. Sólo dentro de su alcance mantiene su significado la letra gótica*; en un juicio, la misma letra

gótica puede aparecer con diferentes alcances sin que el significado que se le adjudica en uno se extienda a los restantes. El alcance de una letra gótica puede incluir el de otra, como el ejemplo

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\begin{array}{l} A(\mathfrak{a}) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile} B(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) \end{array}$$

muestra. En este caso tienen que escogerse letras *diferentes*, no se podría poner 𝔞 en lugar de 𝔢. Desde luego, está permitido sustituir una letra gótica en todo su alcance por otra determinada, siempre y cuando en los lugares en los que antes había letras diferentes queden posteriormente también letras diferentes. Esto no afecta el contenido. *Se permiten otras sustituciones únicamente cuando la concavidad sigue inmediatamente a la barra de juicio*, de manera que el contenido del juicio completo se ajuste al alcance de la letra gótica. En virtud de que este caso es muy singular, quiero introducir la siguiente abreviación. *Una letra cursiva tiene siempre como su alcance el contenido del juicio completo*, sin que esto se tenga que señalar por medio de una concavidad en la barra de contenido. Si aparece una letra cursiva en una expresión a la que no precede una barra de juicio, entonces esa expresión carece de sentido. *Una letra cursiva siempre puede ser sustituida por una gótica que aún no aparezca en el juicio*; al hacer esto, se coloca la concavidad inmediatamente después de la barra de juicio. Por ejemplo, en lugar de

$$\vdash X(a)$$

se puede poner

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\! X(\mathfrak{a}) \,,$$

sólo cuando a aparece, en $X(a)$, en los lugares de argumento.

Es también patente que de

$$\vdash\!\begin{array}{l} \Phi(a) \\ A \end{array}$$

se puede derivar

$$\vdash\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a}) \\ A \end{array}$$

si A *es una expresión en la que no aparece* a, *y si* a *sólo está en los lugares de argumento de* $\Phi(a)$. Si se niega $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$, entonces debe ser posible proveer un significado para a, de manera que se niegue $\Phi(a)$. Así, si se negara $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$ y se afirmara A, entonces, debería ser posible proveer un significado para a, de manera que A fuera afirmada y $\Phi(a)$ negada. Pero, debido a

$$\vdash\!\begin{array}{l} \Phi(a) \\ A \end{array}$$

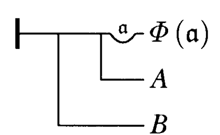
eso no se puede hacer, pues este [símbolo] significa que, sea lo que fuere a, se excluye el caso en el que $\Phi(a)$ se niega y A se afirma. Por tanto, no se puede negar $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$ y afirmar A; esto es,

$$\vdash\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a}) \\ A \end{array} \,.$$

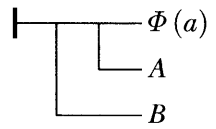
De manera similar, de

$$\vdash\!\begin{array}{l} \Phi(a) \\ A \\ B \end{array}$$

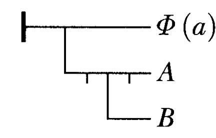
se puede seguir



si a no aparece en A ni en B, y $\Phi(a)$ sólo contiene a a en el lugar del argumento. Este caso se puede reducir a los anteriores, dado que en lugar de



se puede poner



y

$$\vdash\!\!\!\frown\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\Phi(\mathfrak{a}) \;\Big|\; \top\top A \;\Big|\; B$$

puede, a su vez, transformarse en

$$\vdash\!\!-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\Phi(\mathfrak{a}) \;\Big|\; A \;\Big|\; B$$
.

Algo semejante vale cuando están presentes aún más barras de condición.

§ 12. Consideremos ahora algunas combinaciones de símbolos.

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$$

significa que se podría encontrar algo, digamos Δ, tal que negara $X(\Delta)$. Por tanto, se puede traducir como "Hay algunas cosas que no tienen la propiedad X".

Difiere de esto el sentido de

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top X(\mathfrak{a}) \quad .$$

Esta fórmula significa: "sea lo que fuere $\mathfrak{a}$, siempre ha de negarse $X(\mathfrak{a})$"; o "no hay nada que tenga la propiedad X"; o, si llamamos un X a algo que tiene la propiedad X, "no hay ningún X".

$\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top \Lambda(\mathfrak{a})$ es negada por

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!-\Lambda(\mathfrak{a}) \quad .$$

Por tanto, esto último puede traducirse como "hay Λs".[8]

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-P(\mathfrak{a}) \;\Big|\; X(\mathfrak{a})$$

significa "sea lo que fuere que se ponga en lugar de $\mathfrak{a}$, no ocurre el caso 'de que $P(\mathfrak{a})$ debiera ser negado y $X(\mathfrak{a})$ afirmado".

[8] Esto ha de entenderse de manera que incluya el caso "hay una Λ". Por ejemplo, si $\Lambda(x)$ significa la circunstancia de que x es una casa, entonces

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!-\Lambda(\mathfrak{a})$$

dice "hay casas o al menos una casa". Véase § 2, n. 2.

Es posible, así, que con algunos significados que se pueden dar a $\mathfrak{a}$,

$P(\mathfrak{a})$ haya de afirmarse y $X(\mathfrak{a})$ haya de afirmarse; con otros
$P(\mathfrak{a})$ haya de afirmarse y $X(\mathfrak{a})$ haya de negarse;
y aún con otros
$P(\mathfrak{a})$ haya de negarse y $X(\mathfrak{a})$ haya de negarse.

Por consiguiente, se puede traducir: "si algo tiene la propiedad X, entonces también tiene la propiedad P" o "todo X es un P" o "todos los Xs son Ps".

Éste es el modo en que se expresan las relaciones causales:

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\!-P(\mathfrak{a}) \;\Big|\; \Psi(\mathfrak{a})$$

significa "no se puede dar a $\mathfrak{a}$ un significado tal que ambas, $P(\mathfrak{a})$ y $\Psi(\mathfrak{a})$ pudieran ser afirmadas". Por tanto, se le puede traducir así: "lo que tiene la propiedad Ψ no tiene la propiedad P" o "ningún Ψ es un P".

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-P(\mathfrak{a}) \;\Big|\; \Lambda(\mathfrak{a})$$

niega $\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-P(\mathfrak{a}) \,\big|\, \Lambda(\mathfrak{a})$ y, por tanto, puede traducirse como "algunos Λs no son Ps".

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\!-P(\mathfrak{a}) \;\Big|\; M(\mathfrak{a})$$

niega que ningún M sea P, y, por tanto, significa que "algunos[9] Ms son Ps" o "es posible que un M sea P".

[9] La palabra "algunos" ha de entenderse aquí siempre de manera que incluya el caso "un". Más explícitamente, se diría "algunos o al menos un".

Así, se obtiene el cuadrado de oposición lógica:

P(a) X(a) — contrarios — P(a) X(a)

subalternos — contradictorios — contradictorios — subalternos

P(a) X(a) — contrarios* — P(a) X(a)

* El editor alemán señala que debería decir "*subcontrarios*". Probablemente se trata de un error del propio Frege. [N. del t.]

II. REPRESENTACIÓN Y DEDUCCIÓN DE ALGUNOS JUICIOS DEL PENSAMIENTO PURO

§ 13. Ya en la primera sección nos referimos a algunos de los principios fundamentales del pensamiento con el objeto de transformarlos en reglas para la aplicación de nuestros símbolos. Estas reglas y las leyes, de las cuales son imágenes, no pueden expresarse en la conceptografía porque se hallan en su propia base. En esta sección se han de presentar en símbolos algunos juicios del pensamiento puro en donde eso es posible. Parece natural derivar los más compuestos de estos juicios de los más simples, no para hacerlos más ciertos, lo cual generalmente sería innecesario, sino para hacer resaltar las relaciones de los juicios entre sí. Es evidente que no es lo mismo conocer meramente las leyes que saber también cómo están ya dadas unas por medio de otras. De esta manera, se obtiene un pequeño número de leyes en las cuales, si se aceptan las que están contenidas en las reglas, se incluye, aunque no desarrollado, el contenido de todas. También es una ventaja del modo de presentación deductivo el que enseñe a conocer ese núcleo. Puesto que de la inabarcable cantidad de leyes formulables no se pueden enumerar todas, entonces no se alcanzará la totalidad como no sea buscando aquellas que, *por su fuerza*, las contengan en sí a todas. Aunque ciertamente hay que admitir que la reducción no sólo es posible de este modo. De aquí que no todas las relaciones de las leyes del pensamiento se esclarezcan mediante tal modo de presentación. Tal vez haya aún otra serie de juicios de los que, con la aceptación de aquellos contenidos en las reglas, se podría deducir toda ley del pensar. De cualquier manera, con el modo de reducción que aquí se

ofrece se explican tal cantidad de relaciones que cualquier otra derivación se facilitará mucho.

Nueve es el número de proposiciones que constituyen el núcleo de la siguiente presentación. Para la expresión de tres de éstas, las fórmulas (1), (2) y (8), se requiere, aparte de las letras, solamente el símbolo de condicionalidad; tres, las fórmulas (28), (31) y (41), contienen, además, el símbolo de negación; dos, las fórmulas (52) y (54), el de igualdad de contenido; y en una, la fórmula (58), aparece usada la concavidad de la barra de contenido.

La siguiente derivación resultaría cansada para el lector si quisiera seguirla en todas sus particularidades; la derivación sólo tiene el propósito de poner a la disposición la respuesta para cualquier pregunta sobre la deducción de una ley.

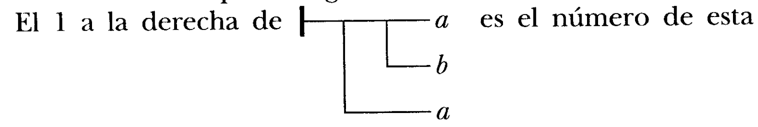
§ 14.

a
b
a (1.

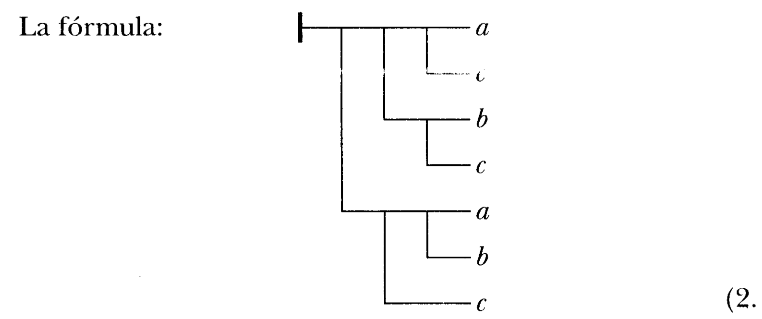
dice: "se excluye el caso en que *a* es negada, *b* afirmada y *a* afirmada". Esto es evidente, puesto que *a* no puede ser negada y afirmada a la vez. Dicho en palabras, el juicio también se puede expresar así: "si una proposición *a* vale, entonces también vale en caso de que una proposición cualquiera, *b*, valga". Por ejemplo, sea que:

a signifique la proposición de que la suma de los ángulos de un triángulo *ABC*, asciende a dos rectos, y
b la proposición de que el ángulo *ABC* es recto.

Obtenemos entonces el juicio: "si la suma de los ángulos en el triángulo *ABC* asciende a dos rectos, entonces esto vale también en el caso en que el ángulo *ABC* sea recto".

El 1 a la derecha de  es el número de esta fórmula.

La fórmula:

 (2.

significa: no tiene lugar el caso en el que se niega

a
c
b
c

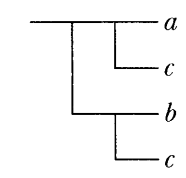
y se afirma

a
b
c .

Pero

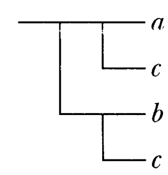
a
b
c

significa la circunstancia en que se excluye el caso en que *a* se niega, *b* se afirma y *c* se afirma. La negación de



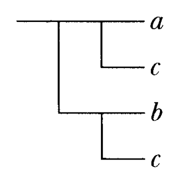
dice que se niega *a* *c* y se afirma *b* *c*. Pero la negación de *a* *c* significa que *a* se niega y *c* se afirma. La

negación de

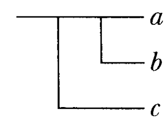


significa, pues, que *a* se niega, *c* se afirma, ──┬── *b* └── *c* se afirma.

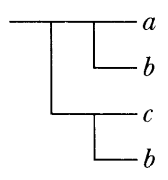
La afirmación de ──┬── *b* └── *c* y *c*, empero, implica la afirmación de *b*. Por tanto, la negación de



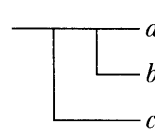
tiene como consecuencia la negación de *a* y la afirmación de *b* y *c*. La afirmación de



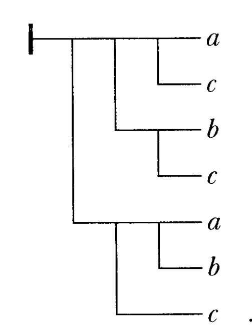
excluye precisamente a este caso. Así, no puede tener lugar el caso en que se niegue



y se afirme



y esto afirma el juicio



En caso de que ocurran conexiones causales, esto se puede expresar también así:

> "si una proposición (*a*) es consecuencia necesaria de dos proposiciones (*b* y *c*), esto es, si (──┬──┬── *a* └── *b* └── *c*) y, si una de ellas, (*b*), es a su vez consecuencia necesaria de la otra, (*c*), entonces la proposición (*a*) es la consecuencia necesaria de esta última, (*c*), sola."

Por ejemplo, sea que:

- *c* signifique que en una serie numérica *Z*, cada término sucesor es mayor que su predecesor;
- *b* signifique que un término *M* es mayor que *L*;
- *a* signifique que el término *N* es mayor que *L*.

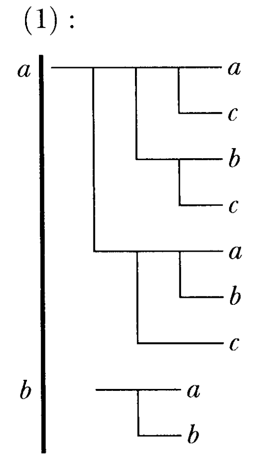
Así obtenemos el siguiente juicio:

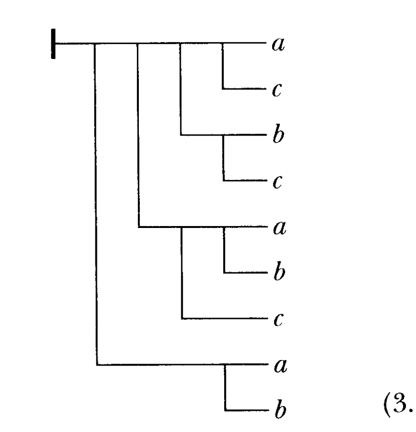
> "si de las proposiciones de que en la serie numérica *Z* cada término sucesor es mayor que el predecesor y que *M* es mayor que *L*, se puede inferir que el término *N* es mayor que *L*, y si de la proposición de que en la serie numérica *Z* cada término sucesor es mayor que el predecesor, se sigue que *M* es mayor que *L*, entonces la proposición de que *N* es mayor que *L* se puede inferir de la proposición de que cada término sucesor en la serie numérica *Z* es mayor que el predecesor."

§ 15.

2

(1) :





(3.

El 2 a la izquierda significa que la fórmula (2) está a su derecha. La inferencia que se hace pasando de (2) y (1) a (3) se abrevia de acuerdo con lo dicho en el § 6. Detalladamente se escribiría así:

1

2

(3.

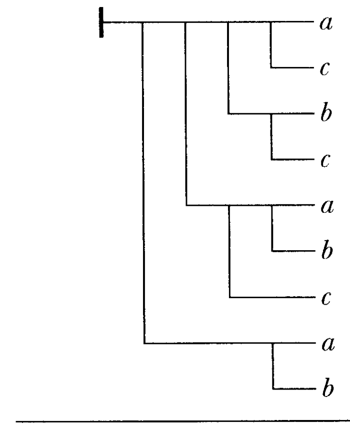
La pequeña tabla que aparece bajo el (1) sirve para hacer más fácilmente reconocible la proposición (1) que aquí aparece en la forma más complicada. Establece que en

en el lugar de *a* se ha de poner

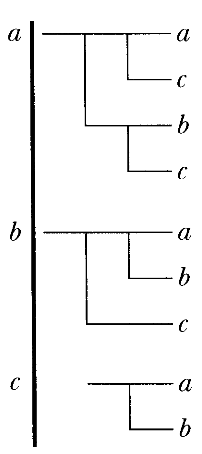
y en el lugar de *b*

.

3



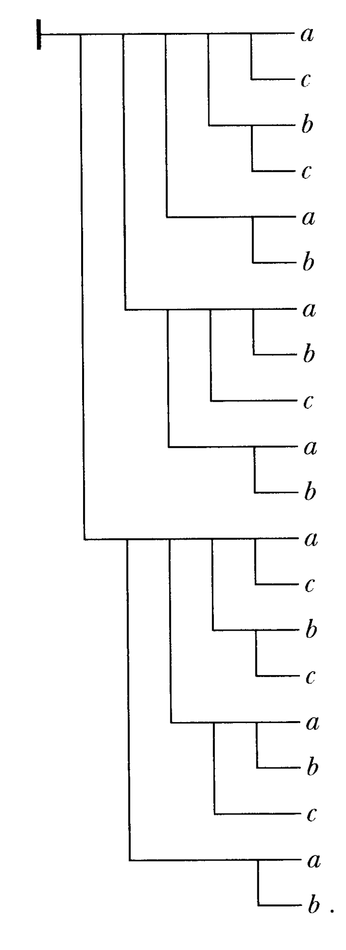
(2) :



(4.

La tabla bajo (2) significa que en

se deben poner en los lugares de *a*, *b*, *c*, las expresiones que se encuentran a la derecha de ellas, con lo cual se obtiene



Fácilmente se ve cómo (4) se sigue de esto y de (3).

4

(1) : :

(5.

El significado de los dobles puntos se explica en § 6.

Ejemplo de (5). Sea

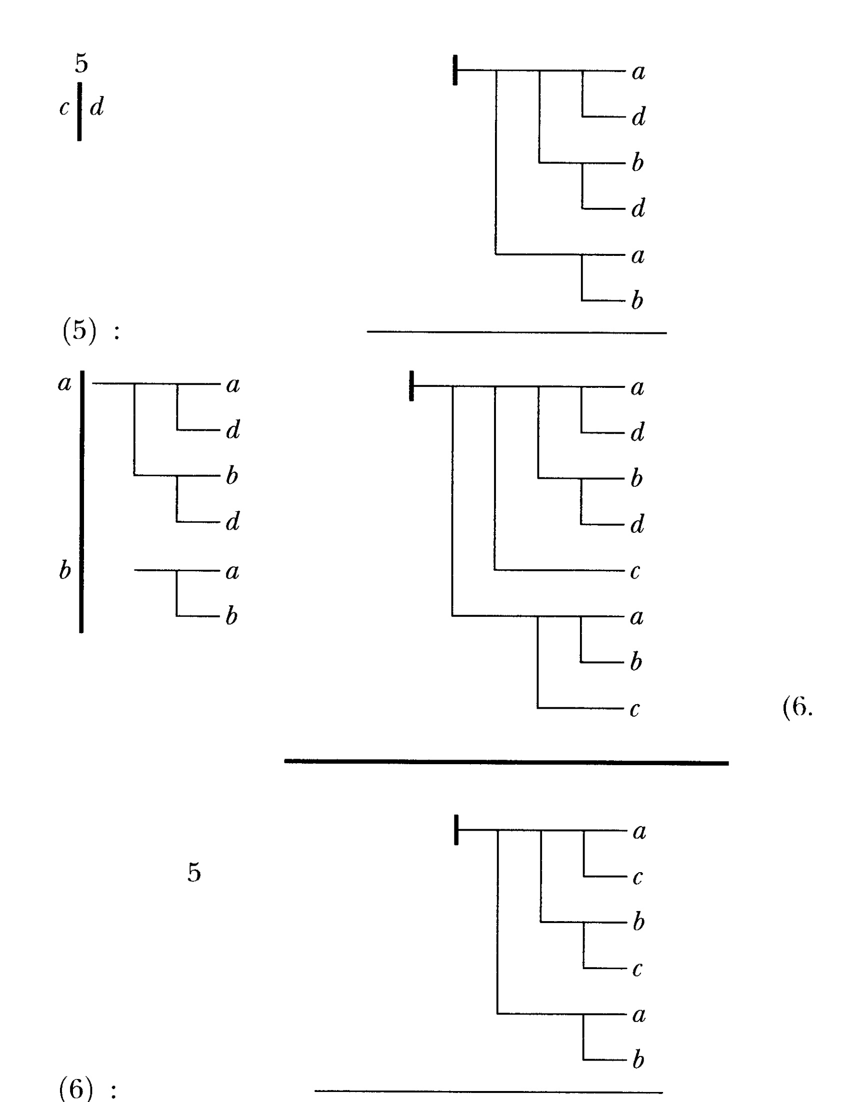
- *a* la circunstancia de que la pieza de acero *E* se magnetiza;
- *b* la circunstancia de que por el alambre *D* fluye una corriente galvánica;
- *c* la circunstancia de que se oprime la llave *T*.

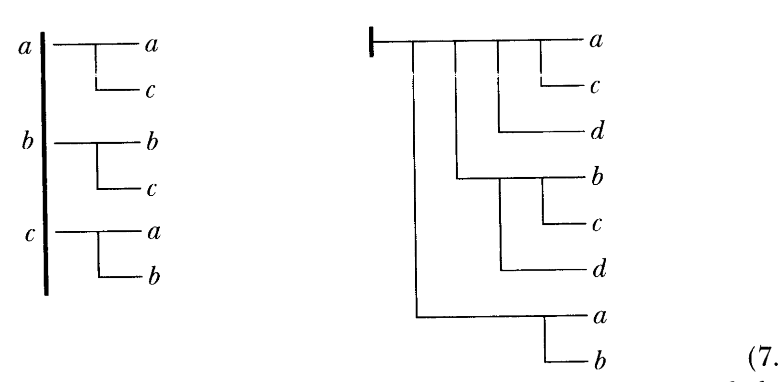
Posteriormente obtenemos el juicio:

"si vale la proposición de que *E* se magnetiza tan pronto fluye una corriente galvánica por *D*;
y si vale la proposición de que fluye una corriente galvánica por *D* tan pronto se oprime *T*;
entonces *E* se magnetiza si se oprime *T*".

Si se presuponen relaciones causales, entonces (5) se puede expresar así:

> "si *b* es una condición suficiente para *a* y *c* es una condición suficiente para *b*, entonces *c* es una condición suficiente para *a*".





Esta proposición sólo se distingue de (5) en que en lugar de la sola condición *c*, aparecen dos, *c* y *d*.

Ejemplo de (7). Sea que

d signifique la circunstancia de que el émbolo *E* de una bomba de aire se mueve de su posición extrema izquierda a su posición extrema derecha;

c signifique la circunstancia de que la válvula *V* se encuentra en la posición *I*;

b signifique la circunstancia de que la densidad *D* del aire en el recipiente de la bomba de aire se reduce a la mitad;

a signifique la circunstancia de que la altura *A* del registro del barómetro conectado con el interior de la bomba de aire desciende a la mitad.

Posteriormente obtenemos el juicio:

"si vale la proposición de que la altura *A* del barómetro desciende a la mitad tan pronto se reduce a la mitad la densidad *D* del aire;

y si vale la proposición de que la densidad *D* del aire desciende a la mitad si el émbolo *E* se mueve de la posición extrema izquierda a la posición extrema derecha, y si la válvula *V* se encuentra en la posición *I*,

de eso se sigue:

que la altura *A* del registro del barómetro desciende a la mitad si el émbolo *E* se mueve de la posición extrema izquierda a la posición extrema derecha mientras la válvula *V* se encuentra en la posición *I*."

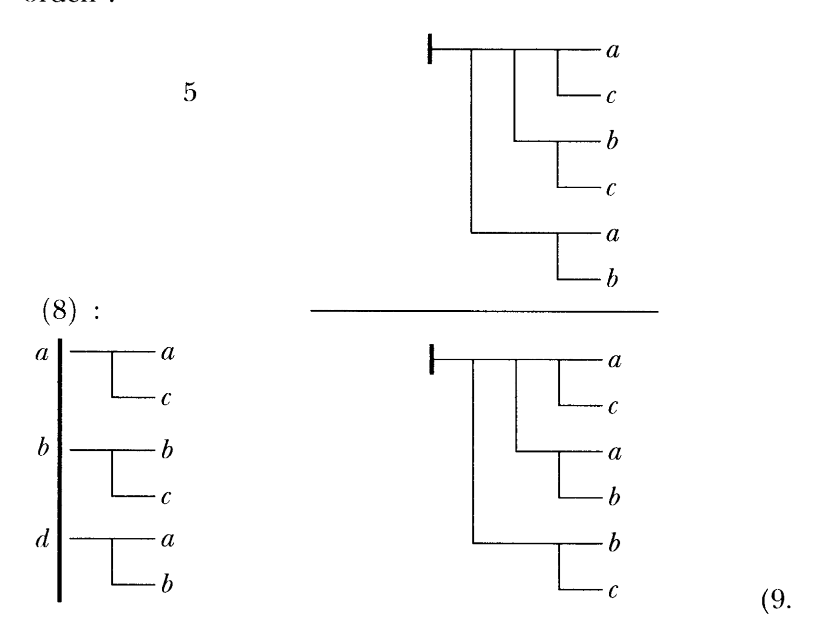
§ 16.

(8.

significa que no tiene lugar el caso en el que *a* se niegue, pero *b* y *d* se afirmen;

significa lo mismo, y (8) dice que se excluye el caso en que, y se afirma.

Eso también se puede expresar así: "si una proposición es consecuencia de dos condiciones, entonces es indiferente su orden".



Esta proposición se distingue sólo de manera no esencial de (5).

8

a | *b*

b | *e*

(9) :

(10.

1

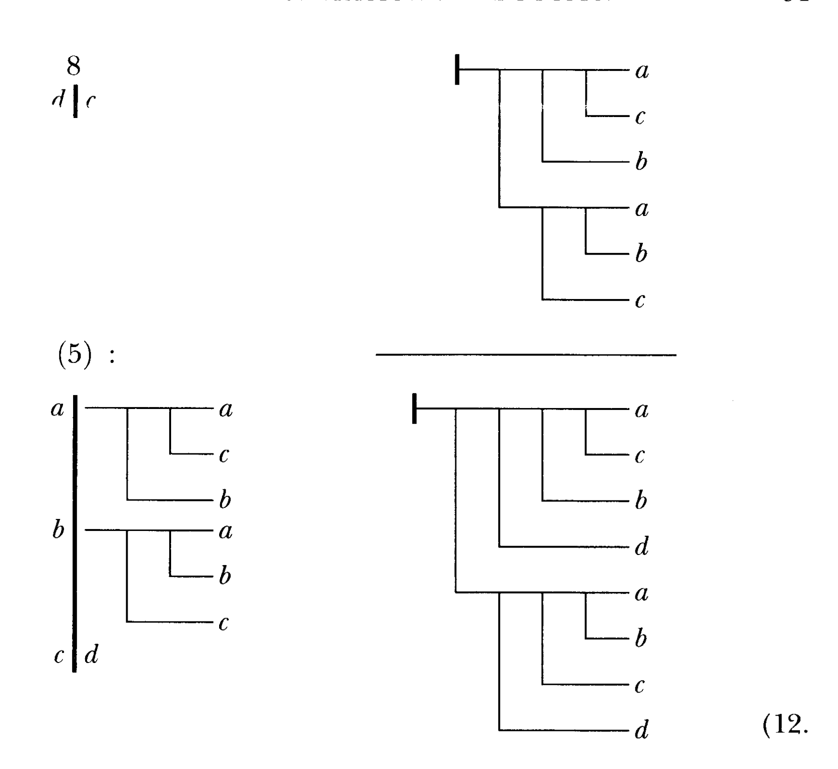
a | *b*

b | *c*

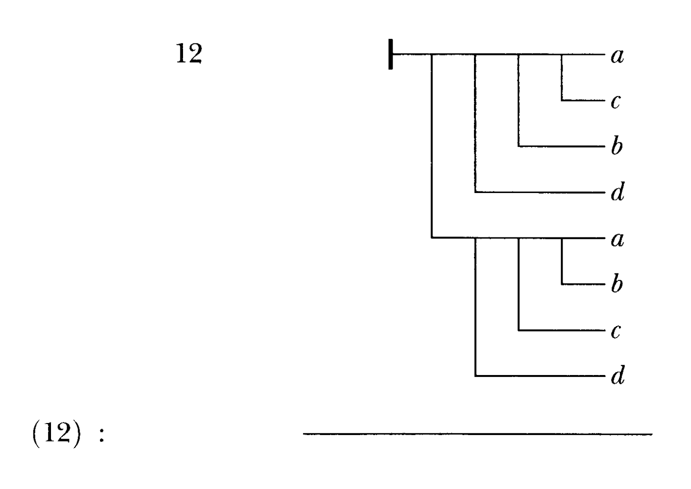
(9) :

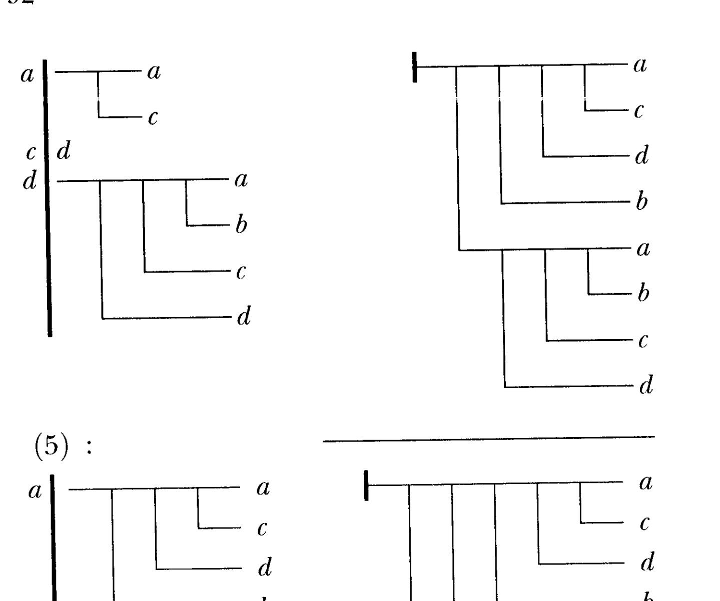
(11.

Esta fórmula se puede traducir así: "si la proposición de que *b* tiene lugar o *c* no tiene lugar es condición suficiente para *a*, entonces *b*, sola, es una condición suficiente para *a*".



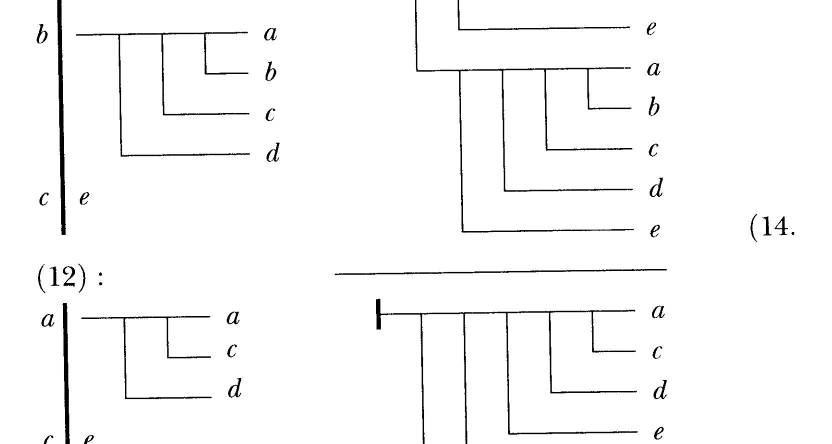
Las proposiciones (12) a (17) y la (22) muestran cómo se puede cambiar el orden cuando hay varias condiciones.





(13.

(5) :



(14.

(12) :

(15.

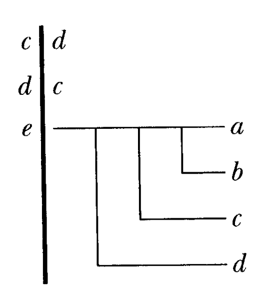
12

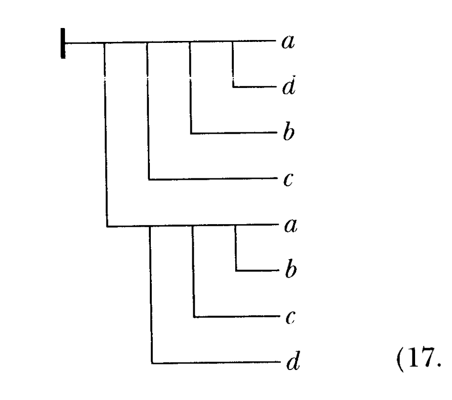
(5) :

(16.

8

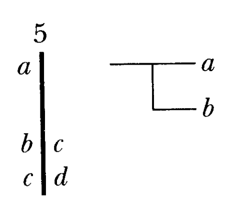
(16) :

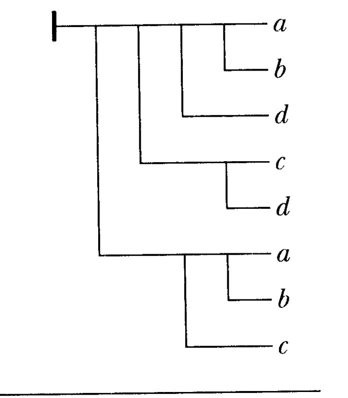




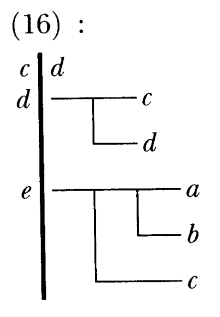
(17.

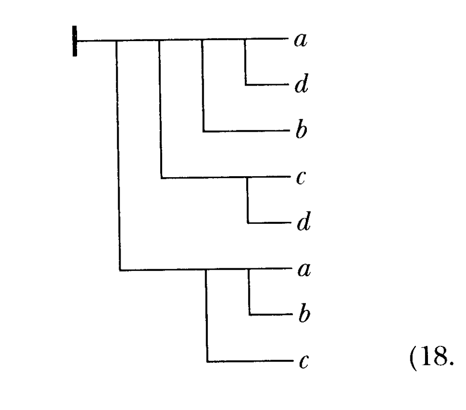
5





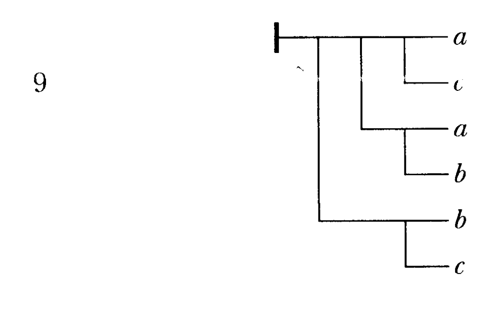
(16) :



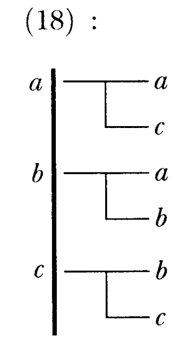


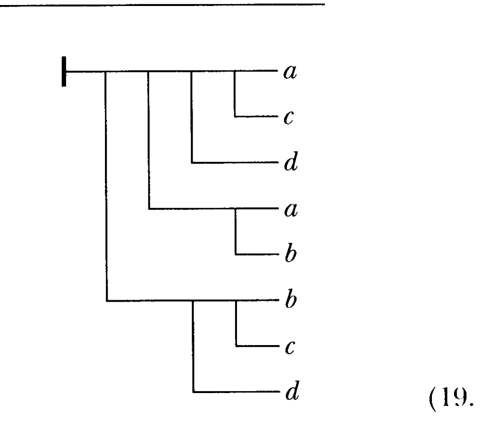
(18.

9



(18) :

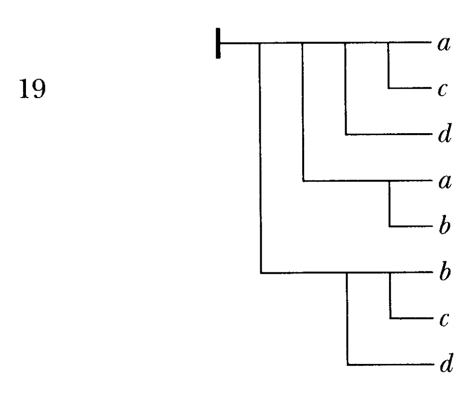




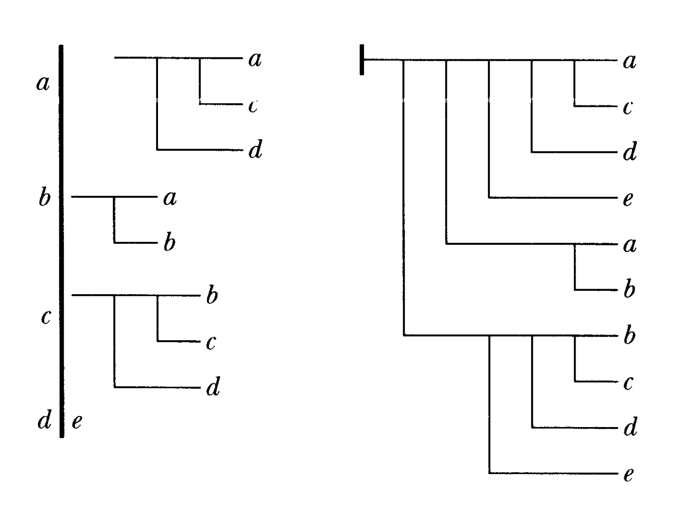
(19.

Esta proposición difiere de (7) sólo de manera no esencial.

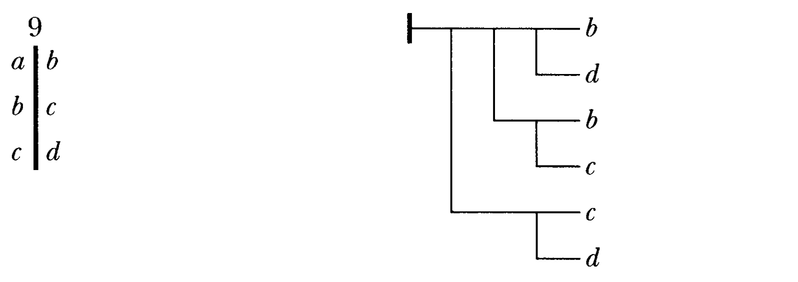
19



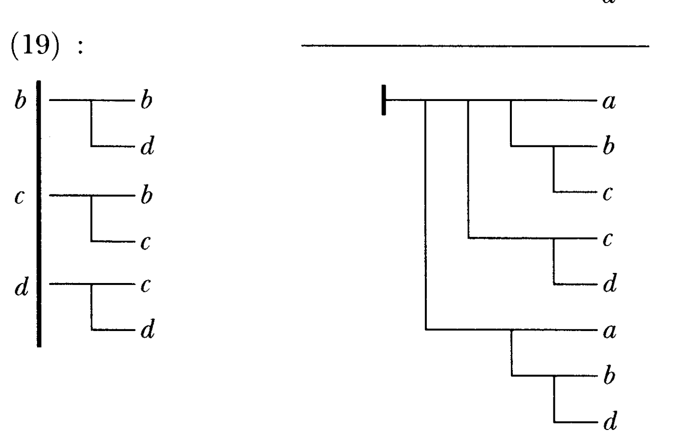
(18) :



(20.

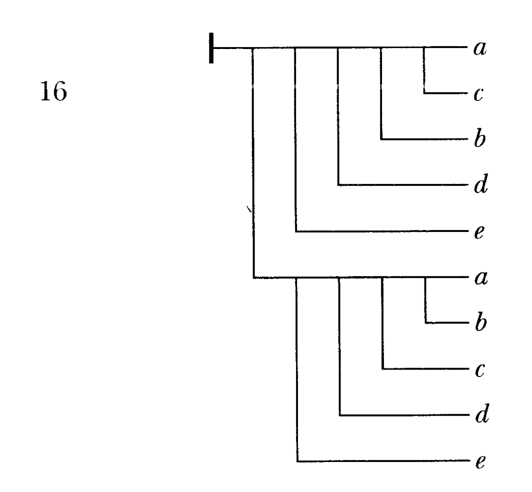


(19) :

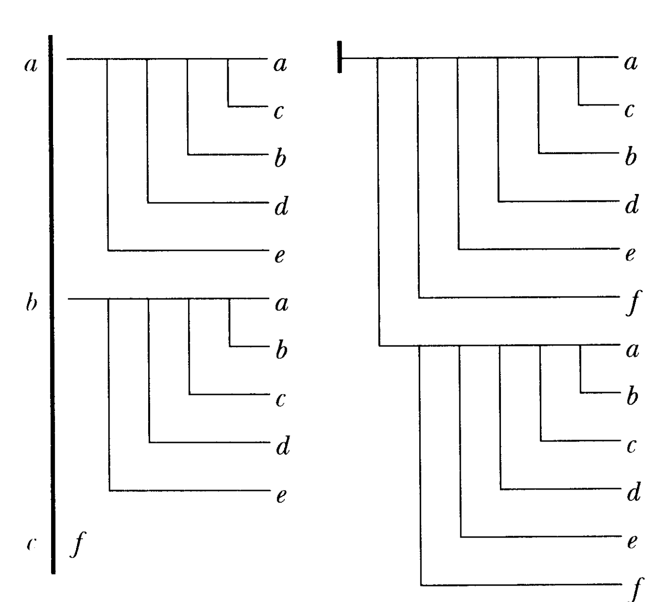


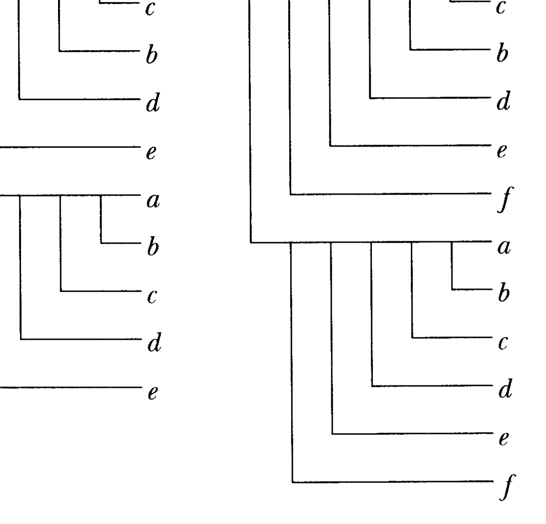
(21.

16

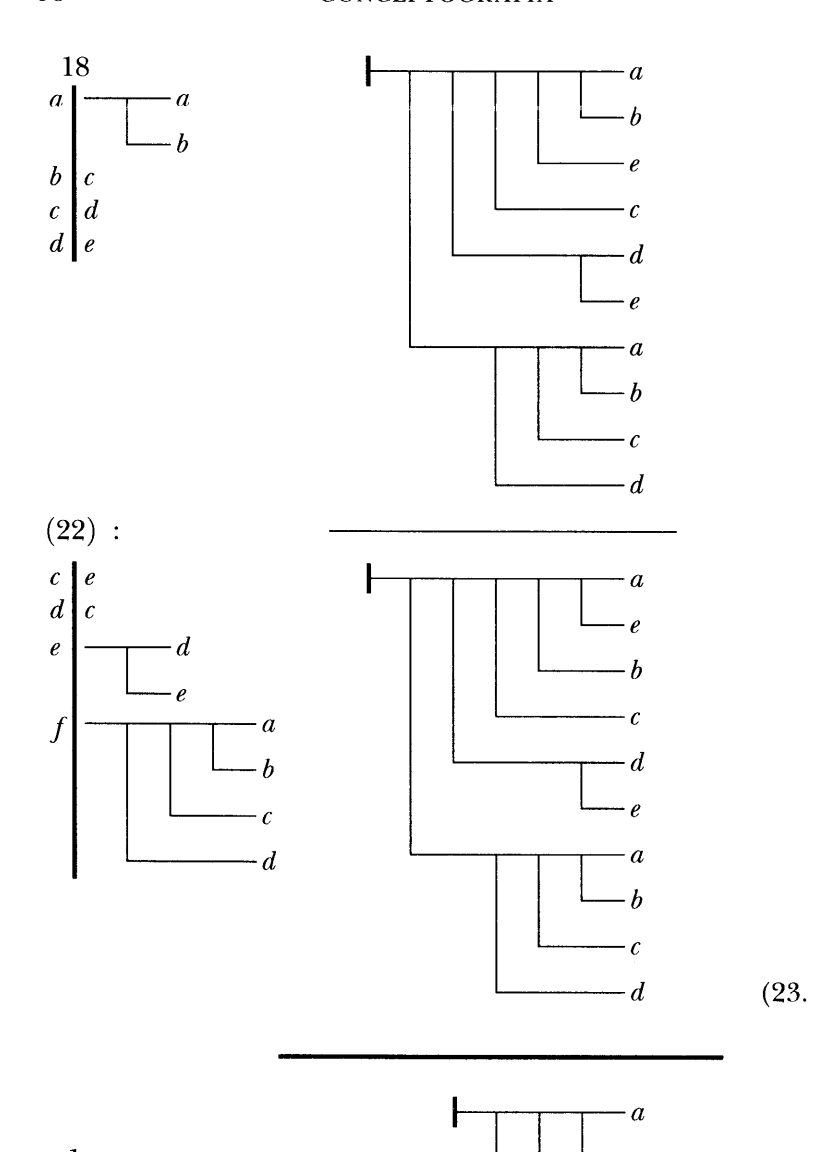


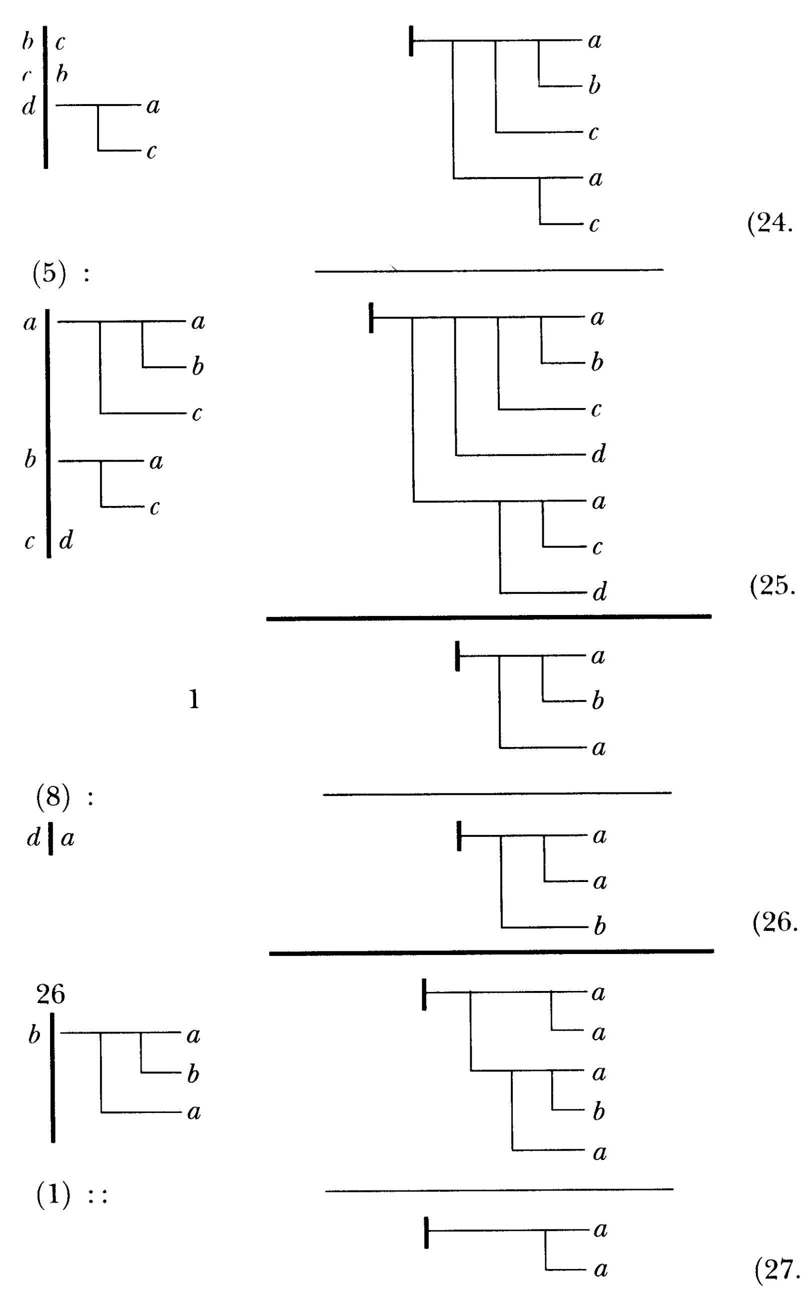
(5) :





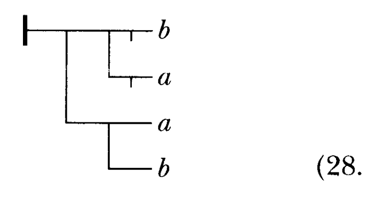
(22.





No se puede (a la vez) afirmar *a* y negar *a*.

§ 17.



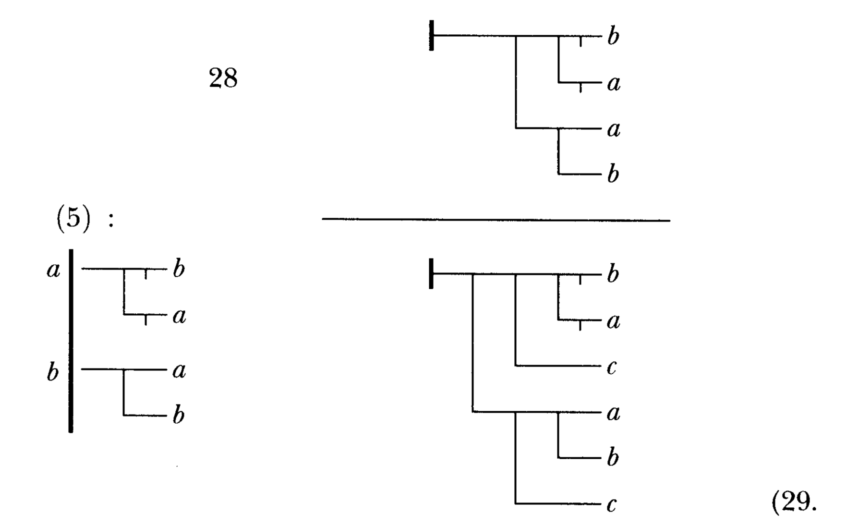
(28.

significa “el caso en que ⊤ *b* ⊤ *a* se niega y *a* *b* se afirma no tiene lugar”. La negación de ⊤ *b* ⊤ *a* significa que ⊤ *a* se afirma y ⊤ *b* se niega; es decir, que *a* se niega y *b* se afirma. Este caso se excluye por *a*. *b*. Este juicio justifica el paso de *modus ponens* a *modus tollens.* Por ejemplo, sea que:

> *b* signifique la proposición de que el hombre H vive
> *a* signifique la proposición de que H respira.

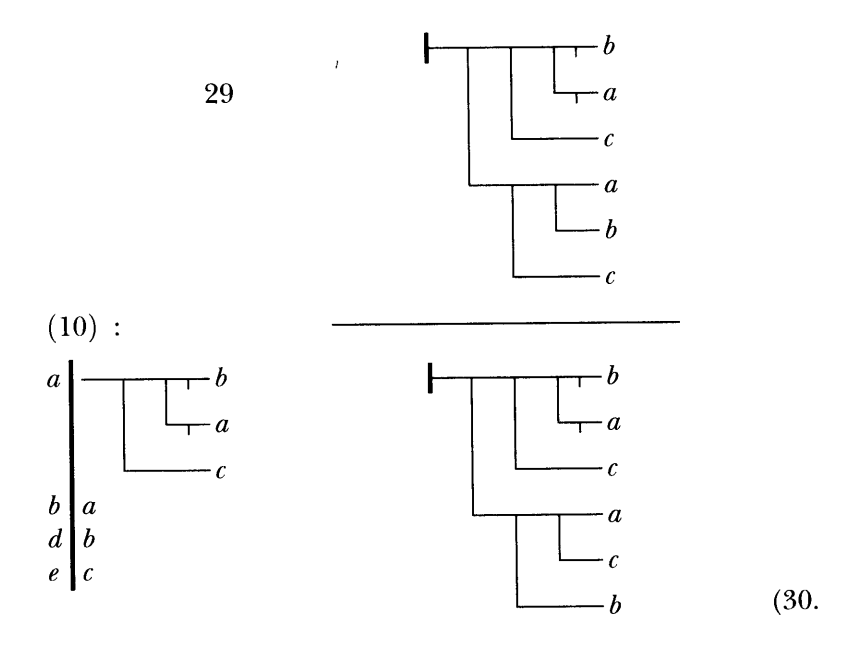
Así, tenemos el juicio:

> “si de la circunstancia de que H vive se puede inferir que respira, entonces de la circunstancia de que H no respira se puede inferir su muerte”.



(29.

Si *b* y *c* son condiciones suficientes para *a*, entonces, de la negación de *a* y de la afirmación de una condición *c* se puede inferir la negación de la otra condición.



(30.

§ 18. *a* ⊤⊤ *a* (31.

⊤⊤ *a* significa la negación de la negación, por tanto, la afirmación de *a*. Así, no se pude negar *a* y (a la vez) afirmar ⊤⊤ *a*. *Duplex negatio affirmat*. La negación de la negación es afirmación.

31
a | *b*

b ⊤⊤ *b*

(7) :

(32.

(28) : :

(33.

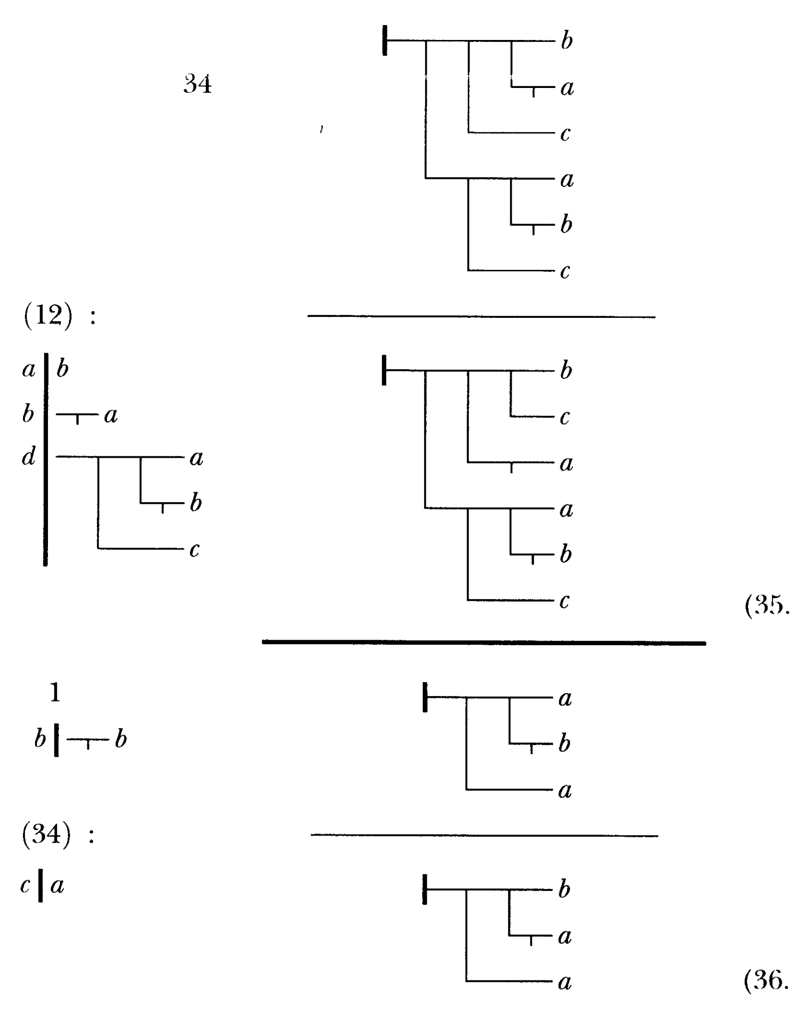
Si *a* o *b* tiene lugar, entonces *b* o *a* tiene lugar.

33

(5) :

(34.

Si al quitar el obstáculo *b*, la presencia de la circunstancia *c* tiene como consecuencia que *a* tenga lugar, entonces, de que no tenga lugar *a* al presentarse *c* se puede inferir la presencia del obstáculo *b*.

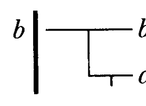


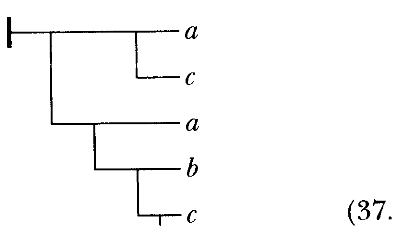
El caso en que *b* se niega, se afirma *a* y se afirma —┬— *a*, no ocurre. Esto se puede expresar así: "si *a* ocurre, entonces tiene lugar una de dos, *a* o *b*".

36

a | *c*

(9) :





(37.

Si *a* es la consecuencia necesaria de que ocurra *b* o *c*, entonces *a* es la consecuencia necesaria de *c* sola. Por ejemplo, sea que:

b signifique la circunstancia de que el primer factor de un producto *P* es 0

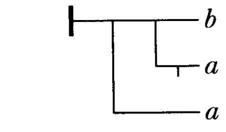
c signifique la circunstancia de que el segundo factor de *P* es 0

a signifique la circunstancia de que el producto *P* es 0.

Luego, tenemos el juicio:

> "si el producto *P* es 0, en caso de que el primero o el segundo de los factores sea 0, entonces de la desaparición del segundo factor se puede inferir la desaparición del producto."

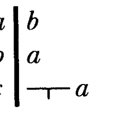
36

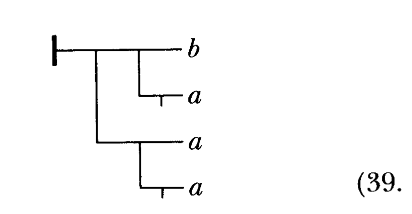


(8) :

(38.

(2) :





(39.

(35) :

(40.

§ 19.

(41.

La afirmación de *a* niega la negación de *a*.

27

(41) :

(42.

(40) :

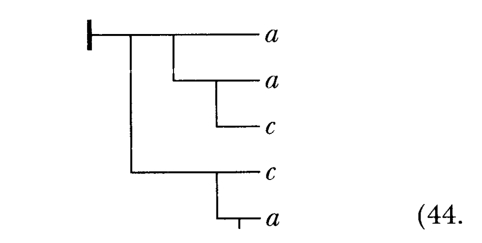
(43.

Si sólo hay una opción entre *a* y *a*, entonces *a* tiene lugar. Por ejemplo, uno tiene que distinguir dos casos que agotan todas las posibilidades. Al seguir la primera se llega al resultado de que *a* tiene lugar, lo mismo si se sigue la segunda. Luego, la proposición *a* vale.

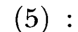
43

(21) :

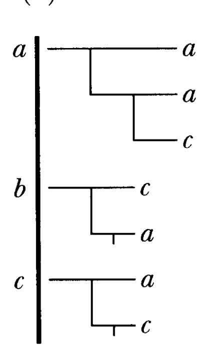
b | a
d | ⊤ a

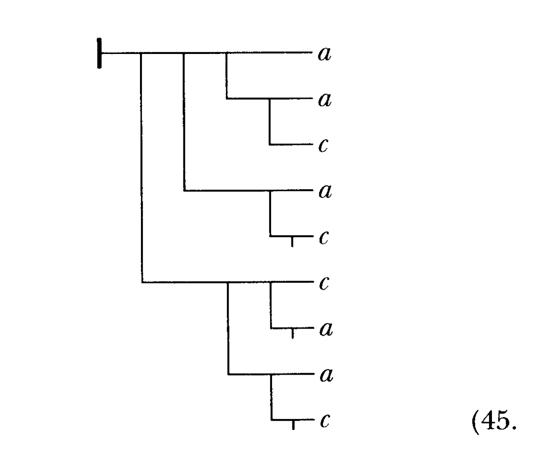


(44.



(5) :





(45.

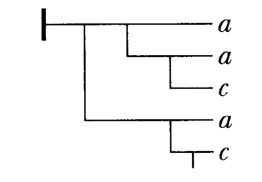
(33) : :

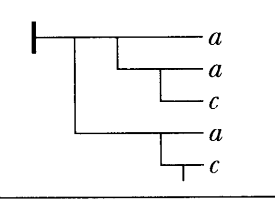
b | c

(46.

Si *a* vale tanto en el caso en que ocurra *c* como en el caso en que no ocurra *c*, entonces, *a* vale. Otra expresión es: "si ocurre *a* o *c*, y si el que ocurra *c* tiene como consecuencia necesaria a *a*, entonces, *a* tiene lugar".

46





(21) :

46

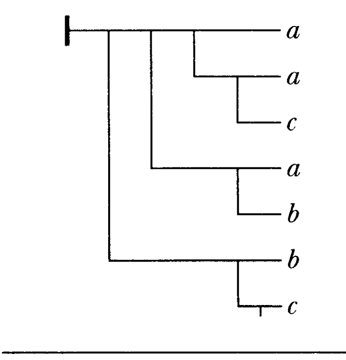
(21) :

a |
b | a
d | ⊤ c
c | b

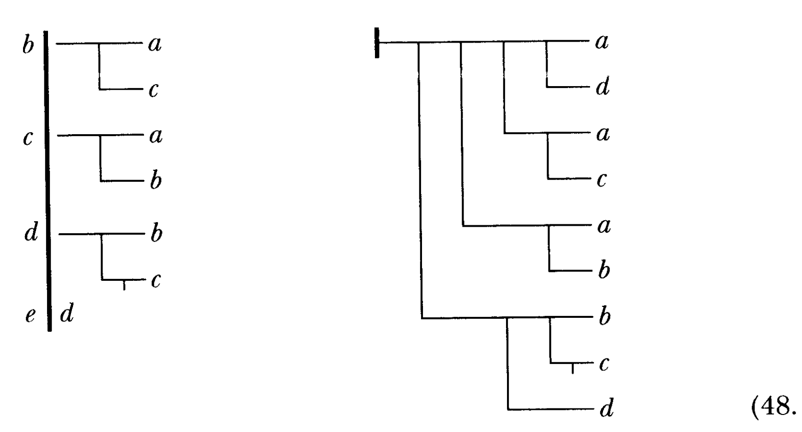
(47.

Esta proposición se puede expresar así: "si tanto *c* como *b* son condiciones suficientes para *a*, y si *b* tiene lugar o *c* tiene lugar, entonces la proposición *a* vale". Este juicio se aplica cuando en una prueba hay que distinguir dos casos. Cuando se presentan más casos, siempre se los puede reducir a dos, al considerar a uno de éstos como el primero y a la totalidad de los restantes como el segundo caso. A estos últimos se los puede dividir de nuevo en dos casos, y se puede proseguir así mientras la división sea posible.

47



(23) :



(48.

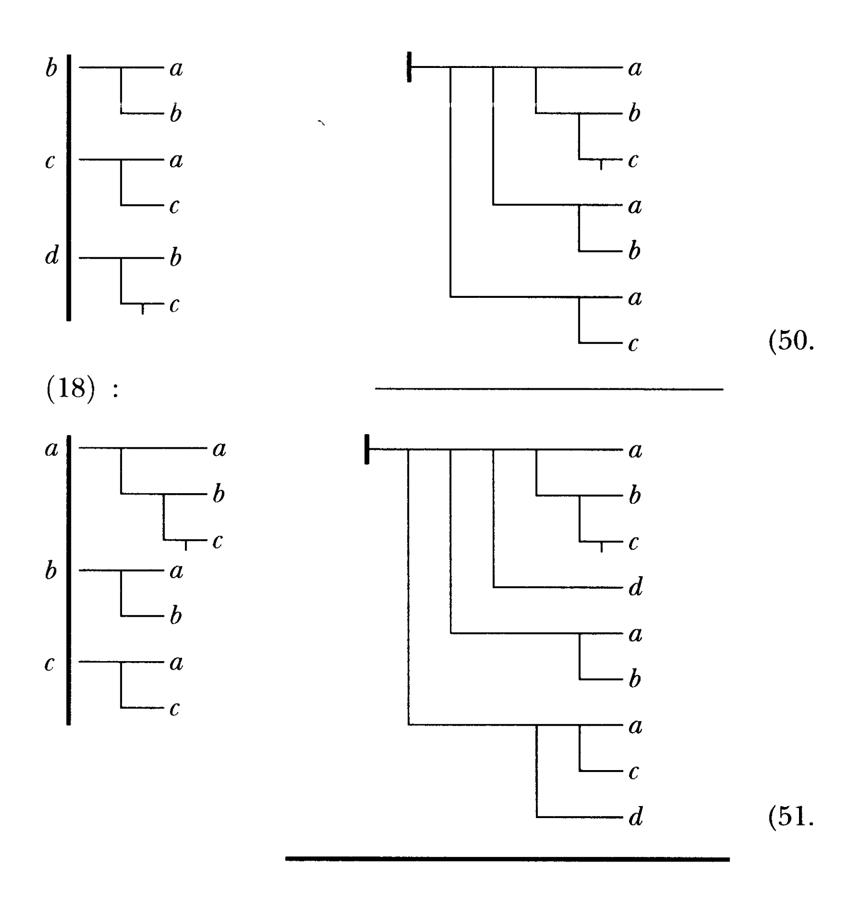
Si d es una condición suficiente [*hinreihende*] para que b o c tengan lugar, y si tanto b como c son condiciones suficientes para a, entonces d es una condición suficiente para a. Un ejemplo de aplicación lo proporciona la deducción de la fórmula (101).

47

(12) :

(49.

(17) :

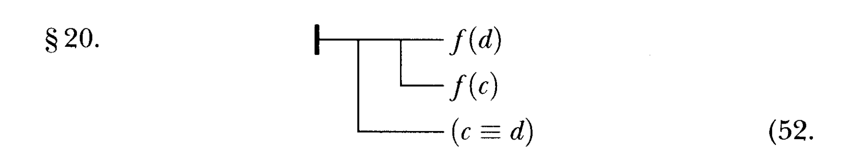


(50.

(18) :

(51.

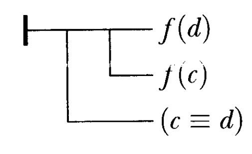
§ 20.



(52.

El caso en que el contenido de c sea igual al contenido de d, y en que $f(c)$ se afirme y $f(d)$ se niegue, no tiene lugar. Esta proposición expresa que si $c \equiv d$, d se puede poner en lugar de c en todas partes. En $f(c)$, c también puede aparecer en otros lugares, además de en los lugares de argumento. Por tanto, c puede incluso estar incluida también en $f(d)$.

52



(8) :

a | $f(d)$
b | $f(c)$
d | $(c \equiv d)$

$f(d)$; $(c \equiv d)$; $f(c)$ (53.

§ 21. $(c \equiv c)$ (54.

El contenido de c es igual al contenido de c.

54 $(c \equiv c)$

(53) :

$f(A)$ | $(A \equiv c)$

$(d \equiv c)$; $(c \equiv d)$ (55.

(9) :

b | $(d \equiv c)$
c | $(c \equiv d)$
a | $f(c)$; $f(d)$

$f(c)$; $f(d)$; $(c \equiv d)$; $f(c)$; $f(d)$; $(d \equiv c)$ (56.

(52) : :

d | c
c | d

$f(c)$; $f(d)$; $(c \equiv d)$. (57.

§ 22. $f(c)$; $\smile^{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a})$ (58.

$\smile^{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a})$ significa que $f(\mathfrak{a})$ tiene lugar, sea lo que fuere lo que se entienda por $\mathfrak{a}$; por tanto, si $\smile^{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a})$ se afirma, entonces $f(c)$ no puede negarse. Esto es lo que expresa nuestra proposición. Aquí $\mathfrak{a}$ sólo puede aparecer en los lugares de argumento en f, ya que esta función también aparece en el juicio fuera del alcance de $\mathfrak{a}$.

58

$f(A)$ | $f(A)$; $g(A)$
c | b

$f(b)$; $g(b)$; $\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$; $g(\mathfrak{a})$

(30) :

a | $f(b)$
c | $g(b)$
b | $\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$; $g(\mathfrak{a})$

$\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$; $g(\mathfrak{a})$; $f(b)$; $g(b)$ (59.

Ejemplo. Sea que

b signifique un avestruz, es decir, un animal individual perteneciente a esa especie;
$g(A)$ signifique "A es un pájaro",
$f(A)$ signifique "A puede volar".

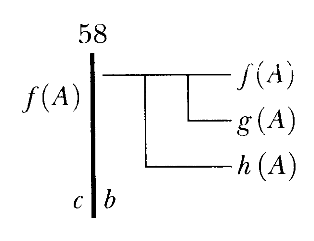
Así, tenemos el juicio:

> "Si este avestruz es un pájaro y no puede volar, entonces de esto se infiere que no todos los pájaros pueden volar."[10]

Se ve cómo este juicio remplaza un modo de inferencia, a saber, Felapton o Fesapo, entre los cuales no se hace aquí distinción alguna, pues no se destaca un sujeto.

[10] Véase § 12, nota p. 75.

58



(12) :

(60.

58

(9) :

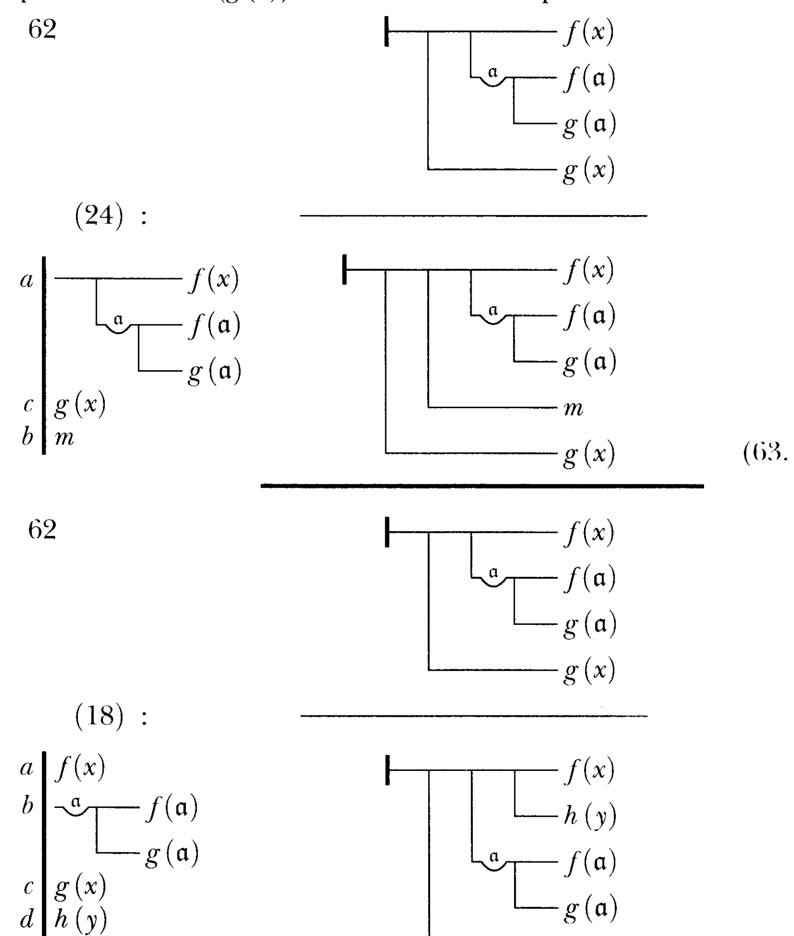
(61.

58

(8) :

(62.

Este juicio remplaza al modo de inferencia Barbara cuando la premisa menor $(g(x))$ tiene un contenido particular.



62

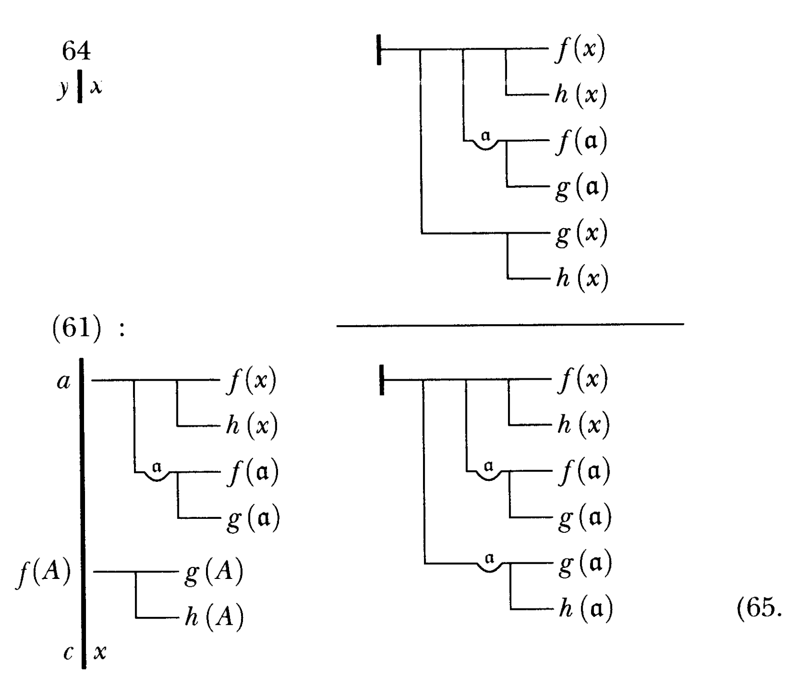
(24) :

(63.

62

(18) :

(64.



(65.

Aquí aparece 𝔞 con dos alcances, sin que esto indique una relación especial. En el primero también se podía haber escrito 𝔢 en lugar de 𝔞. Este juicio remplaza el modo de inferencia Barbara cuando la premisa menor [𝔞: g(𝔞), h(𝔞)] tiene un contenido universal. El lector que se haya familiarizado con el modo de derivación de esta conceptografía estará también en posición de derivar los juicios que corresponden a otros modos de inferencia. Aquí, basten estos ejemplos.

65

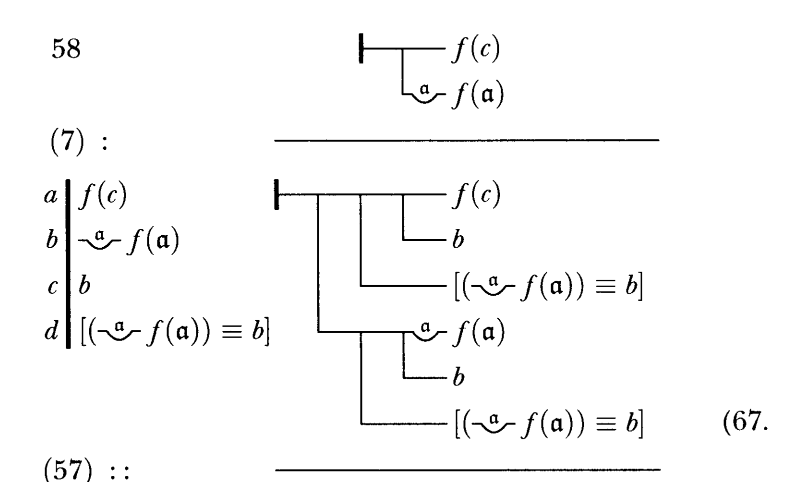
f(x)
h(x)
f(𝔞)
g(𝔞)
g(𝔞)
h(𝔞)

(8) :

a | f(x), h(x)
b | 𝔞: f(𝔞), g(𝔞)
d | 𝔞: g(𝔞), h(𝔞)

f(x)
h(x)
g(𝔞)
h(𝔞)
f(𝔞)
g(𝔞)

(66.



(67.

(57) : :

f(A) | A
c | 𝔞 f(𝔞)
d | b

f(c)
b
[(𝔞 f(𝔞)) ≡ b]

(68.

III. ALGUNAS CUESTIONES DE UNA TEORÍA GENERAL DE LAS SERIES

§23. Las siguientes derivaciones deben dar una idea general del manejo de esta conceptografía, aun cuando quizás no basten para hacer totalmente reconocible su utilidad. Ésta sólo aparecerá con mayor claridad en proposiciones más complicadas. Además, en estos ejemplos se ve cómo el pensamiento puro que prescinde de todo contenido dado por los sentidos, o también por una intuición *a priori*, puede –sólo del contenido que nace de su propia naturaleza– producir juicios que, a primera vista, sólo parecen ser posibles con base en alguna intuición. Esto se puede comparar con la condensación por medio de la cual se logra transformar el aire, que para una conciencia infantil da la impresión de ser nada, en un líquido sensible que forma gotas. Las proposiciones sobre series desarrolladas en lo que sigue superan con mucho en generalidad a todas las semejantes que se pueden derivar a partir de cualquier intuición de series. Por tanto, si alguien considerase más adecuado poner como base una idea intuitiva de serie, entonces no habría que olvidar que las proposiciones alcanzadas de esa manera, aunque tuvieran casi la misma fraseología que las que aquí se ofrecen, ni con mucho significarían, sin embargo, tanto como éstas, ya que sólo tendrían validez en el dominio preciso de la intuición en la que se fundaron.

§ 24.
$$\Vdash \left(\left(\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{d}}\!\!\smile^{\mathfrak{a}} F(\mathfrak{a}) \\ \quad f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \\ \quad F(\mathfrak{d}) \end{array} \right) \equiv \begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta,\alpha)\end{array} \right) \right) \qquad (69.$$

Esta proposición se distingue de las consideradas hasta ahora, en que algunos símbolos que aparecen en ella no han sido definidos previamente; ella misma da esa definición. No dice "el lado derecho de la igualdad tiene el mismo contenido que el izquierdo", sino "debe tener el mismo contenido". Por tanto, esta proposición no es un juicio y, en consecuencia, *tampoco un juicio* sintético, para servirme de una expresión kantiana. Indico esto, porque Kant tenía por sintéticos a todos los juicios de la matemática. Si (69) fuera un juicio sintético, entonces, también lo serían las proposiciones derivadas de ella. Pero podemos prescindir de la notación introducida por medio de esta proposición y, por tanto, de ella misma como su definición: nada se sigue de ella que no pudiera inferirse sin ella. Tales definiciones sólo tienen el propósito de producir una simplificación extrínseca mediante la introducción de una abreviación. Además, sirven para destacar una particular combinación de símbolos frente a la totalidad de las combinaciones posibles y, con ello, ganar una más firme captación de la idea. De esta manera, aunque la mencionada simplificación es apenas perceptible en los pocos juicios presentados aquí, he tomado, sin embargo, esta fórmula con el propósito de dar un ejemplo.

Si bien originariamente (69) no es un juicio, de inmediato se transforma en uno; ya que una vez que se ha fijado el significado de los nuevos símbolos, éste queda fijo y, por tanto, la fórmula (69) se convierte en un juicio, pero en uno analítico, que sólo resalta otra vez lo introducido en los nuevos símbolos. Esta dualidad de la fórmula se indica mediante la duplicación de la barra de juicio. Por tanto, en las siguientes derivaciones (69) puede tratarse como un juicio ordinario.

Las letras griegas minúsculas que aparecen aquí por primera vez, no representan contenido independiente alguno, como las letras góticas y las latinas. En ellas sólo hay que atender a su igualdad o diversidad, de modo que se pueden poner cualesquiera otras letras griegas en los lugares de α y δ con tal de que ocupen letras iguales los lugares antes ocupados por letras iguales, y siempre que no se sustituyan letras distintas por letras iguales. *Esta igualdad o diversidad de las letras griegas, empero, sólo tiene significado dentro de la fórmula para la que se hayan introducido especialmente, como lo fueron para:*

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right. .$$

Sirven para el propósito de que, de la fórmula abreviada

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

se pueda siempre reproducir sin ambigüedad la fórmula detallada

$$\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\, F(\mathfrak{a})\\ \qquad\quad f(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\\ \qquad\quad F(\mathfrak{d})\end{array}$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{c}\alpha\\ |\\ \delta\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\delta)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

significa la expresión

$$\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\, F(\mathfrak{a})\quad ,\\ \qquad\quad f(\mathfrak{a},\mathfrak{d})\\ \qquad\quad F(\mathfrak{d})\end{array}$$

mientras que

$$\begin{array}{c}\alpha\\ |\\ \delta\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

carece de sentido. Se ve que la expresión detallada, sin importar cuán complicadas puedan ser las funciones F y f, con toda seguridad puede ser nuevamente encontrada, salvo en cuanto a la elección arbitraria de letras góticas.

$$\vdash f(\Gamma,\Delta)$$

se puede traducir por "Δ es resultado de una aplicación del procedimiento f sobre Γ", o por "Γ es el objeto de una aplica-

ción del procedimiento f, cuyo resultado es Δ", o por "Δ está en la relación f respecto a Γ", o por "Γ está en la relación conversa de f respecto a Δ", expresiones que se han de tomar como equivalentes.

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

se puede traducir: "la circunstancia de que la propiedad F se hereda en la serie f". Quizás el siguiente ejemplo pueda hacer aceptable esta expresión. Sea que

$\Lambda(M,N)$ signifique la circunstancia de que N es hijo de M.
$\Sigma(P)$ signifique la circunstancia de que P es un ser humano. Así,

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}\Sigma(\alpha)\\ \\ \Lambda(\delta,\alpha)\end{array}\right. \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{l}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\, \Sigma(\mathfrak{a})\\ \qquad\quad \Lambda(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\\ \qquad\quad \Sigma(\mathfrak{d})\end{array}$$

es la circunstancia de que todo hijo de un ser humano es a su vez un ser humano, o que la propiedad de ser un ser humano se hereda. Incidentalmente, se ve que la reproducción en palabras puede ser difícil, y aún imposible, si en los lugares de F y f aparecen funciones muy complicadas. Según esto, la proposición (69) se podría expresar así en palabras:

"*Si de la proposición de que* $\mathfrak{d}$ *tiene la propiedad* F, *sea lo que fuere* $\mathfrak{d}$, *se puede inferir en general que todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* $\mathfrak{d}$ *tiene la propiedad* F,

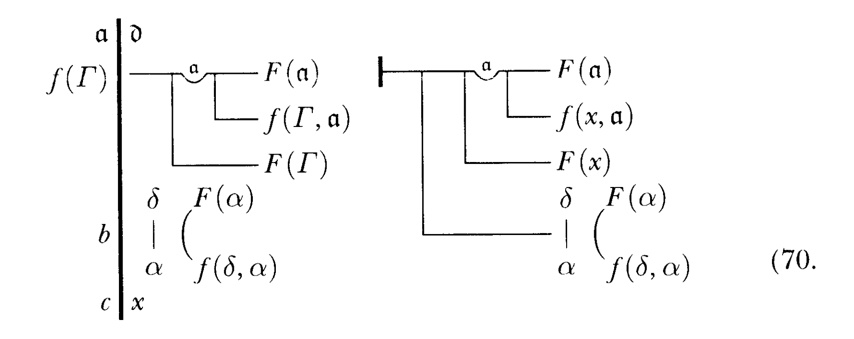
entonces, digo:

'La propiedad F *se hereda en la serie* f'."

§ 25.

$$69 \qquad \vdash \left(\left(\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\, F(\mathfrak{a})\\ \qquad\quad f(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\\ \qquad\quad F(\mathfrak{d})\end{array}\right) \equiv \begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.\right)$$

(68) : ______________________________



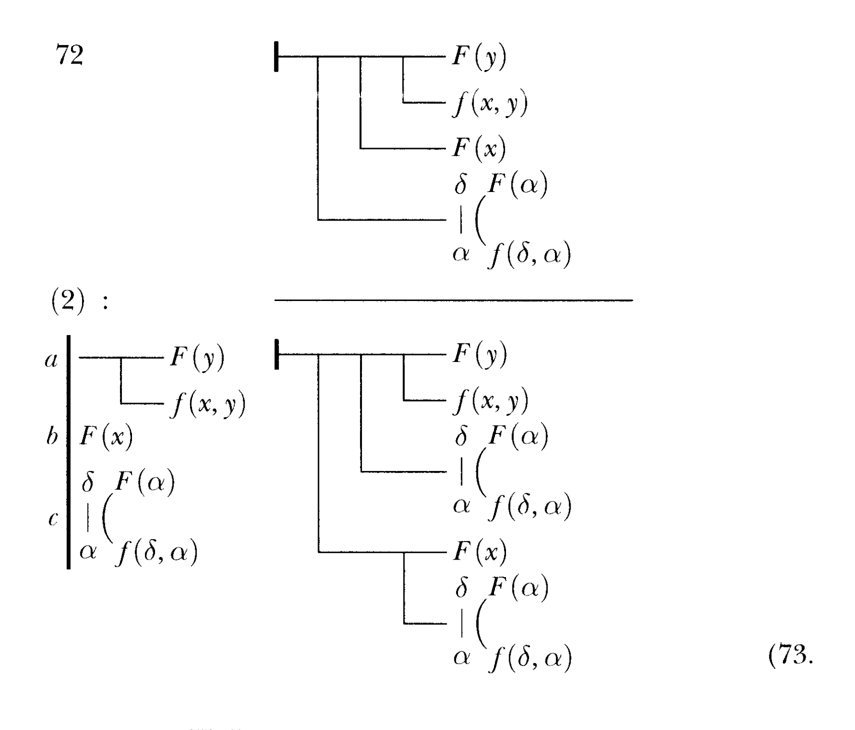
(19) :

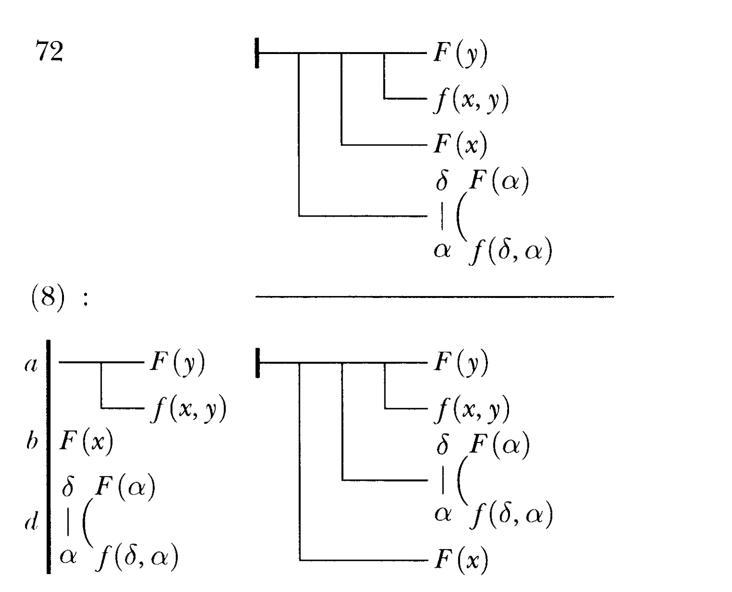
(71.

(58) : :

(72.

Si la propiedad F *se hereda en la serie* f, *si* x *tiene la propiedad* F y y *es el resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* x, *entonces* y *tiene la propiedad* F.





Si x *tiene una propiedad* F *que se hereda en la serie* f, *entonces, todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre la serie* x, *tiene la propiedad* F.

```
69   ⊢ (( ⌣𝔡⌣𝔞─── F(𝔞)          ≡   δ  F(α)   )
          │  └─── f(𝔡, 𝔞)  )       |  (
          └────── F(𝔡)             α  f(δ, α)  )
(52) : ─────────────────────────────────────────

c     │ ⌣𝔡⌣𝔞─── F(𝔞)             ⊢─────────── δ F(α)
      │  │  └─── f(𝔡, 𝔞)            │          | (
      │  └────── F(𝔡)               │          α f(δ, α)
      │ δ F(α)                      └ ⌣𝔡⌣𝔞─── F(𝔞)
d     │ | (                            │  └─── f(𝔡, 𝔞)
      │ α f(δ, α)                      └────── F(𝔡)
f(Γ)  │ Γ                                                (75.
```

Si de la proposición de que 𝔡 *tiene la propiedad* F, *sea lo que fuere* 𝔡, *se puede inferir que todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* 𝔡 *tiene la propiedad* F, *entonces la propiedad* F *se hereda en la serie* f.

§ 26.

```
||⊢ (( ⌣𝔉──────────── 𝔉(y)             ≡ γβ f(x_γ, y_β) )
        │  └ ⌣𝔞─── 𝔉(𝔞)
        │     └─── f(x, 𝔞)
        │          δ 𝔉(α)
        └───────── | (
                   α f(δ, α)     )                        (76.
```

Ésta es la definición de la combinación de símbolos que está a la derecha, $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$. En cuanto a la duplicación de la barra de juicio y a las letras griegas, remito al lector al § 24. No procedería escribir simplemente

$$\overset{x}{\underset{y}{\smile}} f(x, y)$$

en lugar de la expresión anterior, ya que, en una función de x y y escrita detalladamente, estas letras podrían aparecer, incluso, fuera de los lugares de argumento y, entonces, no se vería qué lugares habría que considerar como lugares de argumento. Estos últimos, por tanto, se tienen que indicar como tales. Esto se hace aquí por medio de los índices γ y β. Éstos se tienen que elegir diferentes en consideración al caso en que los dos argumentos fueran iguales entre sí. Adoptamos las letras griegas para tener cierta variedad, lo cual nos permite, en caso de que

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

incluyera dentro de sí una expresión estructurada similarmente, elegir una notación para los lugares de argumento en la expresión incluida diferentes de los de la incluyente. *Aquí la igualdad y diversidad de las letras griegas sólo tiene significado dentro de la expresión*

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)\ ;$$

pueden aparecer las mismas letras fuera, sin que con ello se señale relación alguna con éstas.

Traducimos

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

por "y sigue a x en la serie f"; modo de expresión que, ciertamente, sólo es posible si la función f está determinada. Según esto, (76) se puede expresar verbalmente más o menos así:

> *Si de las dos proposiciones, de que todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* x *tiene la propiedad* F *y de que la propiedad* F *se hereda en la serie* f, *sea lo que fuere* F, *se puede inferir que* y *tiene la propiedad* F,

entonces, digo:

"y *sigue a* x *en la serie* f", *o* "x *precede a* y *en la serie* f".[11]

[11] Para hacer más clara la generalidad del concepto de seguirse en una serie que se ofrece aquí, quisiera recordar algunas posibilidades. Lo que quiero dar

§ 27.

76 $\vdash \left(\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{F}}{\smile}\ \mathfrak{F}(y) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \quad\quad f(x,\mathfrak{a}) \\ \quad \left(\begin{smallmatrix}\delta & \mathfrak{F}(\alpha) \\ \alpha & f(\delta,\alpha)\end{smallmatrix}\right) \end{array}\right) \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)\right)$

(68) : ______________________________

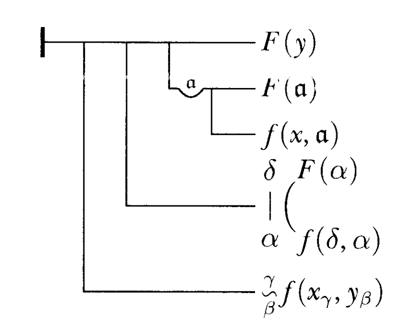
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{F}$
$f(\Gamma)$	$\Gamma(y)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \Gamma(\mathfrak{a})$, $f(x,\mathfrak{a})$; $\left(\begin{smallmatrix}\delta & \Gamma(\alpha) \\ \alpha & f(\delta,\alpha)\end{smallmatrix}\right)$
b	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
c	F

$\vdash$ $F(y)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a})$, $f(x,\mathfrak{a})$; $\left(\begin{smallmatrix}\delta & F(\alpha) \\ \alpha & f(\delta,\alpha)\end{smallmatrix}\right)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$ (77.

De acuerdo con el § 10, hay que considerar aquí a $F(y)$, $F(\mathfrak{a})$ y $F(\alpha)$ como diferentes funciones del argumento F. (77) significa:

> *Si* y *sigue a* x *en la serie* f, *si la propiedad* F *se hereda en la serie* f, *si todo resultado de la aplicación del procedimiento* f *sobre* x *tiene la propiedad* F, *entonces,* y *tiene la propiedad* F.

a entender con él no es sólo una alineación, como la de unas perlas en una sarta, sino también una ramificación como la de un árbol genealógico, una agrupación de varias ramas, o un proceso circular que vuelve sobre sí mismo.

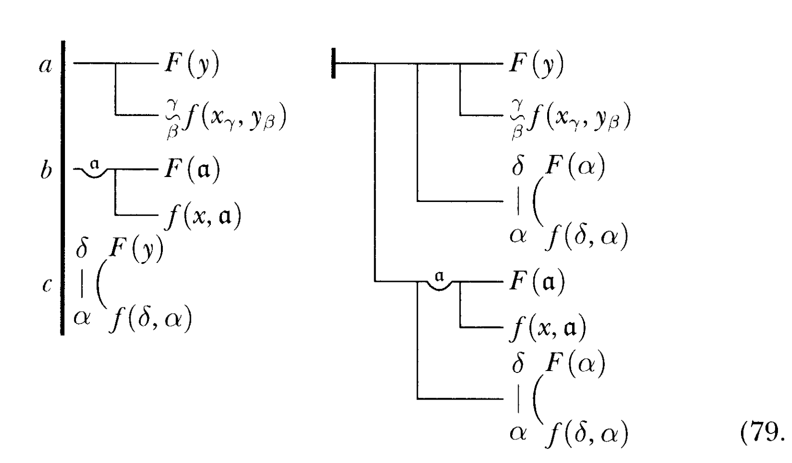
77 

(17) : ______________________________

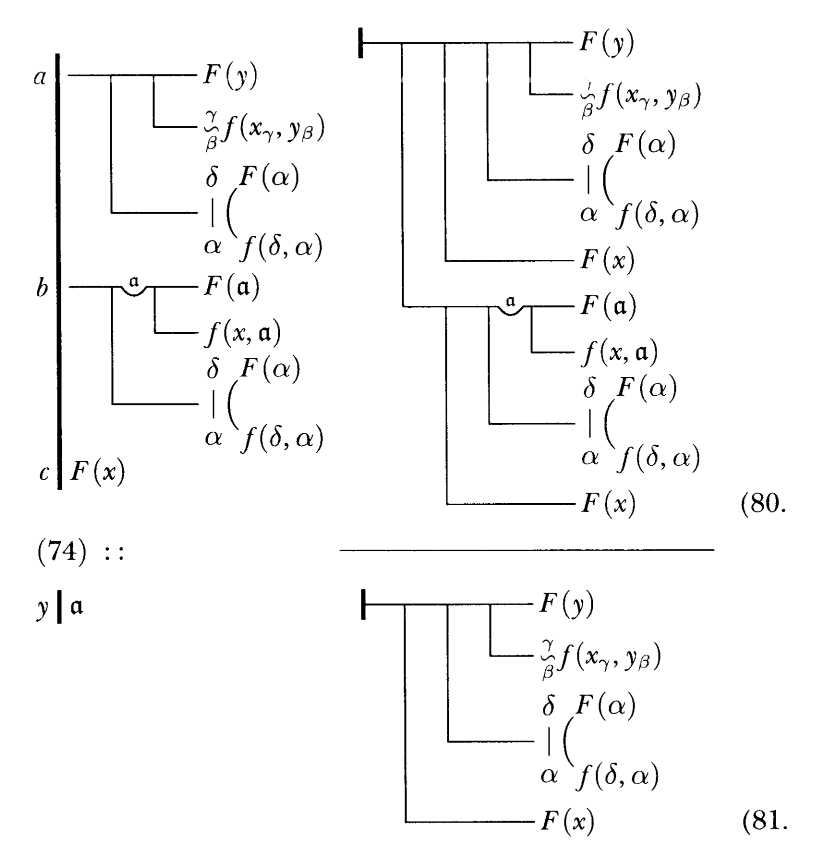
a	$F(y)$
b	$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a})$, $f(x,\mathfrak{a})$
c	$\left(\begin{smallmatrix}\delta & F(\alpha) \\ \alpha & f(\delta,\alpha)\end{smallmatrix}\right)$
d	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$

$\vdash$ $F(y)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a})$, $f(x,\mathfrak{a})$; $\left(\begin{smallmatrix}\delta & F(\alpha) \\ \alpha & f(\delta,\alpha)\end{smallmatrix}\right)$ (78.

(2) : ______________________________



(5) : ______________________________



Puesto que en (74) la y sólo aparece en —┬— $F(y)$ └— $f(x, y)$, según el § 11, la concavidad puede preceder inmediatamente a esta expresión cuando se sustituye la y por la letra gótica $\mathfrak{a}$. Se puede traducir (81) así:

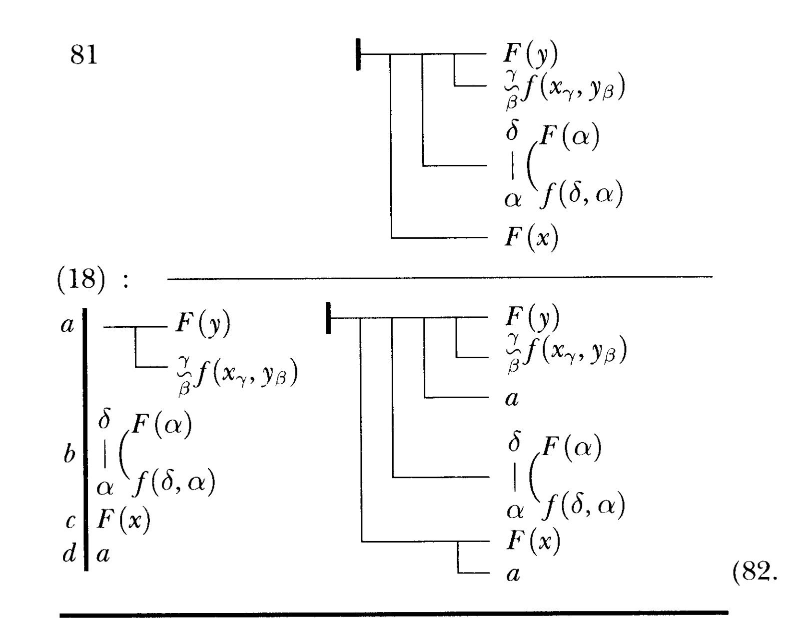
> *Si* x *tiene una propiedad* F *que se hereda en la serie* f, *y si* y *sigue a* x *en la serie* f, *entonces* y *tiene la propiedad* F.[12]

Por ejemplo, sea F la propiedad de ser un montón de alubias; sea f el procedimiento de quitar una alubia de un montón de alubias, de modo que

$$f(a, b)$$

[12] En esto descansa la inducción bernoulliana.

significa la circunstancia de que b contiene todas las alubias del montón a menos una, y nada más. Por tanto, si la propiedad de ser un montón se hereda en la serie f, según nuestra proposición se llegaría al resultado de que una alubia sola, o incluso ninguna alubia, es un montón de alubias. Sin embargo, éste no es en general el caso, ya que hay ciertos z en los que, debido a la indeterminación del concepto "montón", $F(z)$ no es juzgable.



82

(36) ::

$b \mid g(x)$
$a \mid h(x)$

$g(y)$
$h(y)$
$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
$h(x)$
$\delta \mid \alpha \left(g(\alpha),\ h(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$ (83.

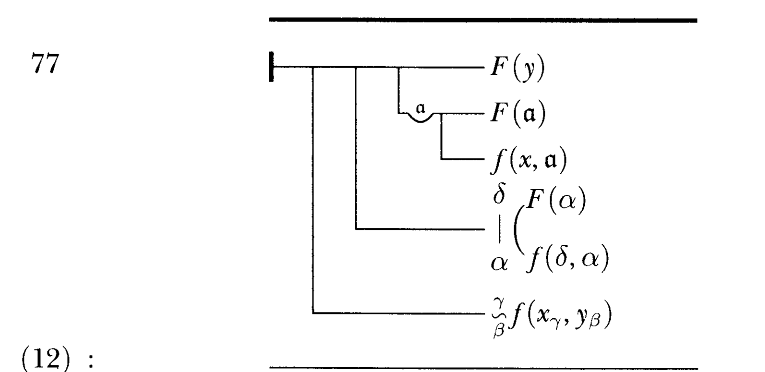
81

$F(y)$
$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
$\delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$F(x)$

(8) :

$a \mid F(y),\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
$b \mid \delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$d \mid F(x)$

$F(y)$
$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
$F(x)$
$\delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$ (84.



$a \mid F(y)$
$b \mid \overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a}),\ f(x, \mathfrak{a})$
$c \mid \delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$d \mid \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$

$F(y)$
$\delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$
$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$ (85.

(19) :

$b \mid F(y),\ \delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$c \mid \overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a}),\ f(x, \mathfrak{a})$
$d \mid \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
$a \mid F(z),\ f(y, z),\ \delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$

$F(z)$
$f(y, z)$
$\delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$
$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
$F(z)$
$f(y, z)$
$\delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$F(y)$
$\delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$ (86.

(73) :

$y \mid z$
$x \mid y$

$F(z)$
$f(y, z)$
$\delta \mid \alpha \left(F(\alpha),\ f(\delta, \alpha) \right)$
$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$
$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$ (87.

La derivación de esta proposición, en palabras, dirá aproximadamente lo siguiente:

(α) sea que y siga a x en la serie f;
(β) sea que todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre x tenga la propiedad F;
(γ) sea que la propiedad F se herede en la serie f.

Según (85), de estos supuestos se sigue:

(δ) y tiene la propiedad F.
(ε) sea z el resultado de aplicar el procedimiento f sobre y.

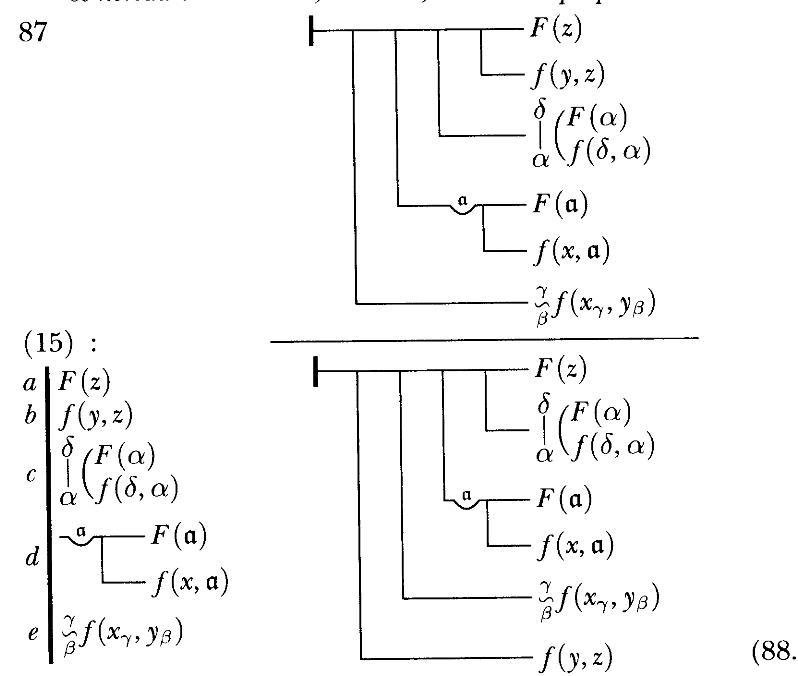
Según (72), así, de (γ), (δ), (ε), se sigue:

z tiene la propiedad F.

Por tanto:

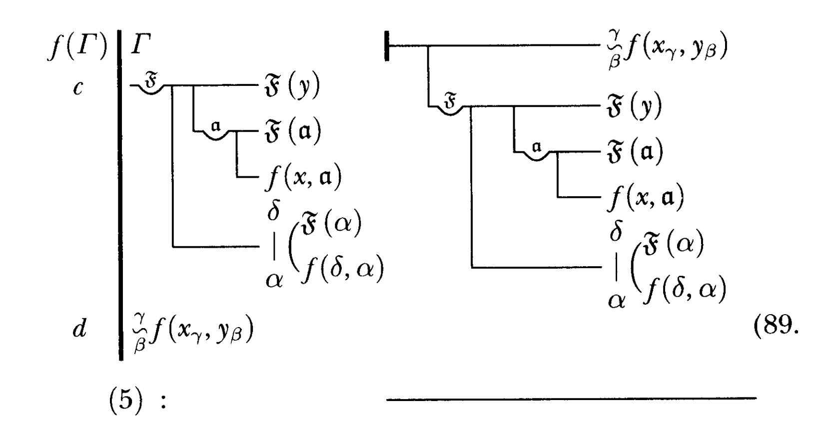
Si z *es el resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre un objeto* y *que sigue a* x *en la serie* f, *y si todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* x *tiene la propiedad* F *que se hereda en la serie* f, *entonces,* z *tiene esa propiedad* F.

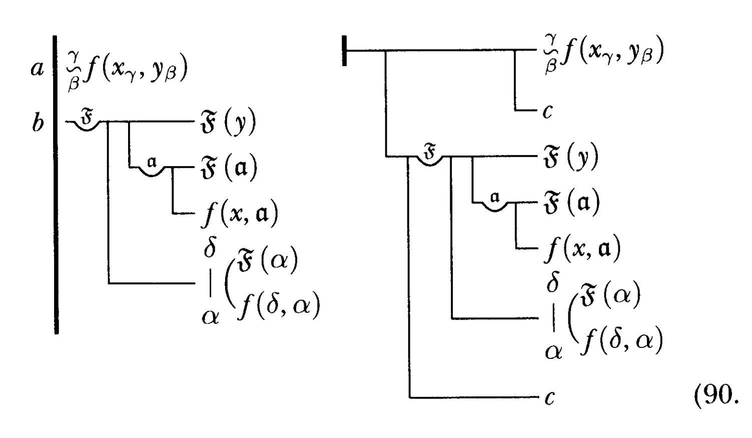
87

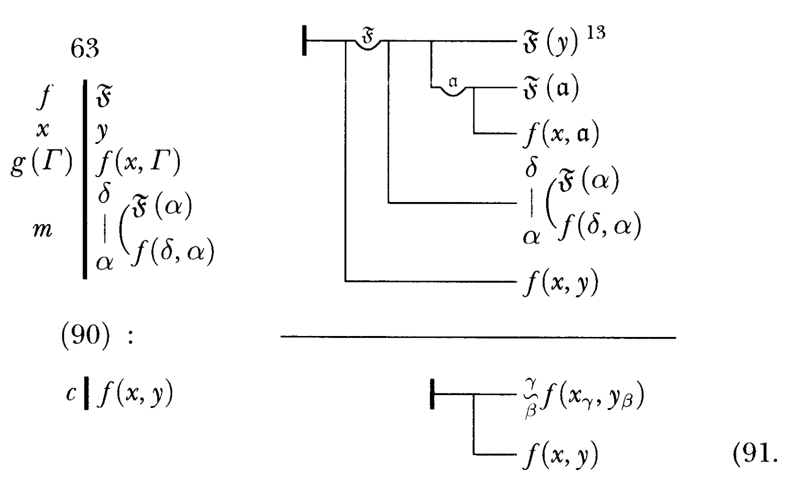


§ 28.

76 $\vdash \left(\left(\mathfrak{F}(y),\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}),\ f(x,\mathfrak{a}),\ \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\begin{pmatrix}\mathfrak{F}(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{pmatrix} \right) \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta) \right)$







(90) :

c | $f(x, y)$

$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$

$f(x, y)$ (91.

Demos aquí, en palabras, la derivación de la proposición (91). De la proposición:

(α) "todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre x tiene la propiedad $\mathfrak{F}$",

sea lo que fuere $\mathfrak{F}$, se puede inferir:

todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre x tiene la propiedad $\mathfrak{F}$.

Por tanto, de la proposición (α) y de la proposición de que la propiedad $\mathfrak{F}$, sea lo que fuere $\mathfrak{F}$, se hereda en la serie f, se puede inferir también:

todo resultado de una aplicación de un procedimiento f sobre un objeto x tiene la propiedad $\mathfrak{F}$.

Por tanto, según (90) vale la proposición:

Todo resultado de una aplicación de un procedimiento f *sobre un objeto* x *sigue a ese* x *en la serie* f.

91

$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$

$f(x, y)$

(53) :

[13] En referencia a la concavidad con $\mathfrak{F}$, véase el § 11.

$f(A)$ | $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(A_\gamma, y_\beta)$, $f(x, y)$
c | x
d | z

$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(z_\gamma, y_\beta)$

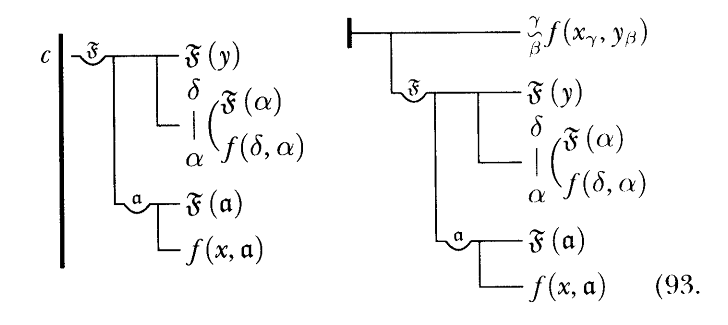
$f(x, y)$

$(x \equiv z)$ (92.

60
$\mathfrak{a}$ | $\mathfrak{F}$
$f(\Gamma)$ | $\Gamma(y)$
$g(\Gamma)$ | δ, α, $\Gamma(\alpha)$, $f(\delta, \alpha)$
$h(\Gamma)$ | $\mathfrak{a}$, $\Gamma(\mathfrak{a})$, $f(x, \mathfrak{a})$
b | $\mathfrak{F}$

$\mathfrak{F}(y)$
$\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{F}(\alpha)$
$f(\delta, \alpha)$
$\mathfrak{F}(y)$
$\mathfrak{F}(\alpha)$
$f(\delta, \alpha)$
$\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$

(90) :



93

$y \mid z$

$$\vdash \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\quad \mathfrak{F}(z)$$
$$\quad \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\left(\begin{matrix}\mathfrak{F}(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}\right)$$
$$\quad \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$$
$$\quad f(x,\mathfrak{a})$$

(7) :

$a \mid \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$

$b \mid \mathfrak{F}(z)$, $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\left(\begin{matrix}\mathfrak{F}(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}\right)$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, $f(x,\mathfrak{a})$

$c \mid \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, y_\beta)$

$d \mid f(y,z)$

$$\vdash \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, y_\beta)$$
$$\quad f(y,z)$$
$$\quad \mathfrak{F}(z)$$
$$\quad \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\left(\begin{matrix}\mathfrak{F}(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}\right)$$
$$\quad \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$$
$$\quad f(x,\mathfrak{a})$$
$$\quad \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, y_\beta)$$
$$\quad f(y,z) \qquad (94.$$

(88) : :

$F \mid \mathfrak{F}$

$$\vdash \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, y_\beta)$$
$$\quad f(y,z) \qquad (95.$$

(8) :

$a \mid \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$

$b \mid \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, y_\beta)$

$c \mid f(y,z)$

$$\vdash \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\quad f(y,z)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, y_\beta) \qquad (96.$$

Todo resultado de una aplicación del procedimiento f *sobre un objeto, el cual sigue a* x *en la serie* f, *sigue a* x *en la serie* f.

96

$z \mid \mathfrak{a}$

$y \mid \mathfrak{d}$

$$\vdash^{\mathfrak{d}}\smile^{\mathfrak{a}}\smile \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$$
$$\quad f(\mathfrak{d},\mathfrak{a})$$
$$\quad \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, \mathfrak{d}_\beta)$$

(75) :

$F(\Gamma) \mid \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$

$$\vdash \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\left(\begin{matrix}\frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, \alpha_\beta)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}\right) \qquad (97.$$

La propiedad de seguir a x *en la serie* f, *se hereda en la serie* f.

97

$$\vdash \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\left(\begin{matrix}\frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, \alpha_\beta)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}\right)$$

(84) :

$F(\Gamma) \mid \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$

$x \mid y$

$y \mid z$

$$\vdash \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\beta}f(y_\gamma, z_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, y_\beta) \qquad (98.$$

Si y *sigue a* x *en la serie* f *y si* z *sigue a* y *en la serie* f, *entonces,* z *sigue a* x *en la serie* f.

§ 29.

$$\Vdash \left(\left(\begin{matrix}(z \equiv x)\\ \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)\end{matrix}\right) \equiv \frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)\right) \qquad (99.$$

Remito aquí a lo dicho en relación con las fórmulas (69) y (76), acerca de la introducción de nuevos símbolos. Se puede traducir

$$\frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, z_\beta)$$

por "z pertenece a la serie f que comienza con x" o por "x pertenece a la serie f que termina con z". De esta manera, (99) se lee así en palabras:

Si z *es lo mismo que* x *o sigue a* x *en la serie* f, *entonces digo:*

"z *pertenece a la serie* f *que comienza con* x" *o* "x *pertenece a la serie* f *que termina con* z."

99

$$\vdash \left(\left(\begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right) \equiv \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \right)$$

(57) :

$$\begin{array}{l|l} f(\Gamma) & \Gamma \\ c & \begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \\ d & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} (z \equiv z) \\ \quad \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \qquad (100.$$

(48) :

$$\begin{array}{l|l} b & (z \equiv x) \\ c & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ d & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ a & \begin{array}{l} \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, v_\beta) \\ f(z, v) \end{array} \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, v_\beta) \\ \quad f(z, v) \\ \quad \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \quad \begin{array}{l} \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, v_\beta) \\ \quad f(z, v) \\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \\ \quad \begin{array}{l} \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, v_\beta) \\ \quad f(z, v) \\ (z \equiv x) \end{array} \end{array} \qquad (101.$$

(96, 92) ::

$$\begin{array}{l|l} y & z \\ z & v \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x & z \\ z & x \\ y & v \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, v_\beta)\ ^{14} \\ \quad f(z, v) \\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \qquad (102.$$

[14] Acerca de la última inferencia, véase § 6.

Demos aquí, en palabras, la derivación de (102).

Si z es lo mismo que x, entonces, según (92), todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre z sigue a x en la serie f. Si z sigue a x en la serie f, entonces, según (96), todo resultado de una aplicación de f sobre z sigue a x en la serie f.

De estas dos proposiciones, de acuerdo con (100), se sigue:

Si z *pertenece a la serie* f *que comienza con* x, *entonces, todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* z *sigue a x en la serie f.*

100

$$\vdash \begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \quad \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array}$$

(19) :

$$\begin{array}{l|l} b & (z \equiv x) \\ c & \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ d & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ a & (x \equiv z) \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} (x \equiv z) \\ \quad \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \quad \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \quad \begin{array}{l} (x \equiv z) \\ (z \equiv x) \end{array} \end{array} \qquad (103.$$

(55) ::

$$\begin{array}{l|l} d & x \\ c & z \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} (x \equiv z) \\ \quad \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \qquad (104.$$

---

§ 30.

99

$$\vdash \left(\left(\begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right) \equiv \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \right)$$

(52) :

$f(\Gamma) \mid \Gamma$

$c \mid$ $z \equiv x$, $\neg\, \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$d \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$

(37) :

$$\vdash \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$(z \equiv x)$$
$$\neg\, \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta) \qquad (105.$$

$a \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$b \mid (z \equiv x)$

$c \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$$\vdash \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta) \qquad (106.$$

Lo que sigue a x *en la serie* f, *pertenece a la serie* f *que comienza con* x.

106

$x \mid z$

$z \mid v$

$$\vdash \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$$

(7) :

$a \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$

$b \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$

$c \mid f(y, v)$

$d \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, y_\beta)$

$$\vdash \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$$
$$f(y, v)$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, y_\beta)$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$$
$$f(y, v)$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, y_\beta) \qquad (107.$$

(102) : :

$x \mid z$

$z \mid y$

$$\vdash \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$$
$$f(y, v)$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(z_\gamma, y_\beta) \qquad (108.$$

Demos aquí la derivación de (108) en palabras:

Si y pertenece a la serie f que comienza con z, entonces, según (102), todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, sigue a z en la serie f.

Según (106), pues, todo resultado de una aplicación de un procedimiento f sobre y, pertenece a la serie f que comienza con z.

Por lo tanto:

Si y *pertenece a la serie* f *que comienza con* z, *entonces, todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* y, *pertenece a la serie* f *que comienza con* z.

108

$v \mid \mathfrak{a}$

$z \mid x$

$y \mid \mathfrak{d}$

$$\vdash^{\mathfrak{d}}\ {}^{\mathfrak{a}}\ \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$$
$$f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, \mathfrak{d}_\beta)$$

(75) :

$F(\Gamma) \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$

$$\vdash \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(\begin{matrix} \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, \alpha_\beta) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right. \qquad (109.$$

La propiedad de pertenecer a la serie f *que comienza con* x, *se hereda en la serie* f.

109

$$\vdash \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(\begin{matrix} \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, \alpha_\beta) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$$

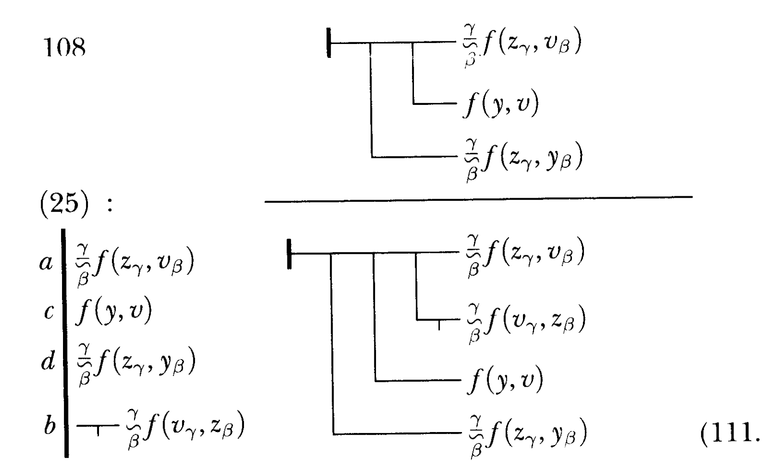
(78) :

$F(\Gamma) \mid \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$

$x \mid y$

$y \mid m$

$$\vdash \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
$${}^{\mathfrak{a}}\ \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$$
$$f(y, \mathfrak{a}) \qquad (110.$$



Lo que sigue es, en palabras, la derivación de (111).

Si y pertenece a la serie f que comienza con z, entonces, según (108), todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, pertenece a la serie f que comienza con z.

Por tanto, entonces, todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, pertenece a la serie f que comienza con z o precede a z en la serie f.

Por lo tanto:

Si y *pertenece a la serie* f *que comienza con* z, *entonces todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* y, *pertenece a la serie* f *que comienza con* z *o precede a* z *en la serie* f.

105

$$\vdash \; \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \quad | \quad (z \equiv x) \quad | \quad \top\, \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta)$$

(11) :

a | $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta)$
b | $(z \equiv x)$
c | $\top\, \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta)$

$$\vdash \; \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \quad | \quad (z \equiv x) \qquad (112.$$

(7) :

a | $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta)$
b | $(z \equiv x)$
c | $\top\, \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta)$
d | $\frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta)$

$$\vdash \; \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \quad | \quad \top\, \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta) \quad | \quad \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta) \quad | \quad (z \equiv x) \quad | \quad \top\, \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta) \quad | \quad \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta) \qquad (113.$$

(104) : :

x | z
z | x

$$\vdash \; \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \quad | \quad \top\, \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta) \quad | \quad \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, x_\beta) \qquad (114.$$

Lo que sigue es, en palabras, la derivación de esta fórmula:

Sea que: x pertenece a la serie f que empieza con z.

Entonces, según (104), z es lo mismo que x; o x sigue a z en la serie f.

Si z es lo mismo que x, entonces, según (112), z pertenece a la serie f que comienza con x.

De las dos últimas proposiciones se sigue: z pertenece a la serie f que comienza con x; o x sigue a z en la serie f.

Por lo tanto:

Si x *pertenece a la serie* f *que comienza con* z, *entonces* z *pertenece a la serie* f *que comienza con* x; *o* x *sigue a* z *en la serie* f.

§ 31.

$$\Vdash \left(\left(\overset{\mathfrak{e}}{\smile} \overset{\mathfrak{d}}{\smile} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e}) \;|\; f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \;|\; f(\mathfrak{d}, \mathfrak{e}) \right) \equiv \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon) \right)^{15} \qquad (115.$$

[15] Véase § 24.

Traduzco:

$$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

por "la circunstancia de que el procedimiento f es unívoco" [*eindeutig*].* Así, (115) se puede trasladar de esta manera:

> *Si de la circunstancia de que* $\mathfrak{e}$ *es resultado de una aplicación de* f *sobre* $\mathfrak{d}$*, sea lo que fuere* $\mathfrak{d}$*, se puede inferir que todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* $\mathfrak{d}$ *es lo mismo que* $\mathfrak{e}$*,*

entonces, digo:

> *"el procedimiento* f *es unívoco".*

115 $\vdash$ (($\mathfrak{e}$ $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e})$; $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$; $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{e})$) $\equiv \overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$)

(68) : ______________________

$f(\Gamma)$ | $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv \Gamma)$; $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$; $f(\mathfrak{d}, \Gamma)$

b | $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

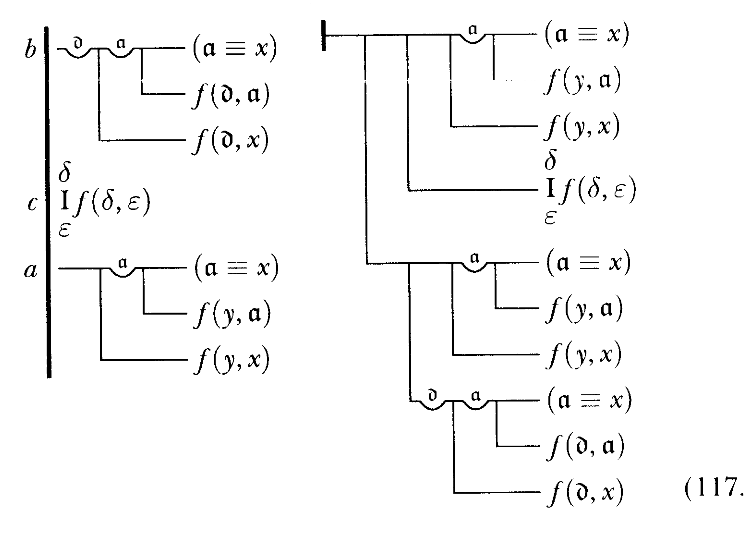
c | x

$\mathfrak{a}$ | $\mathfrak{e}$

$\vdash$ $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$; $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$; $f(\mathfrak{d}, x)$; $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$ (116.

(9) : ______________________

* La palabra alemana "*eindeutig*" se traduce comúnmente como "unívoco" (en inglés se suele traducir como "*single-valued*"); califica a un procedimiento que siempre da como resultado un solo valor. [N. del t.]



(58) :: ______________________

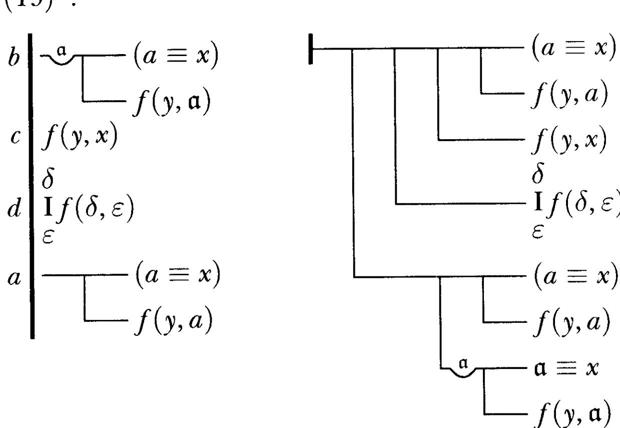
$\mathfrak{a}$ | $\mathfrak{d}$

$f(\Gamma)$ | $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} \equiv x$; $f(\Gamma, \mathfrak{a})$; $f(\Gamma, x)$

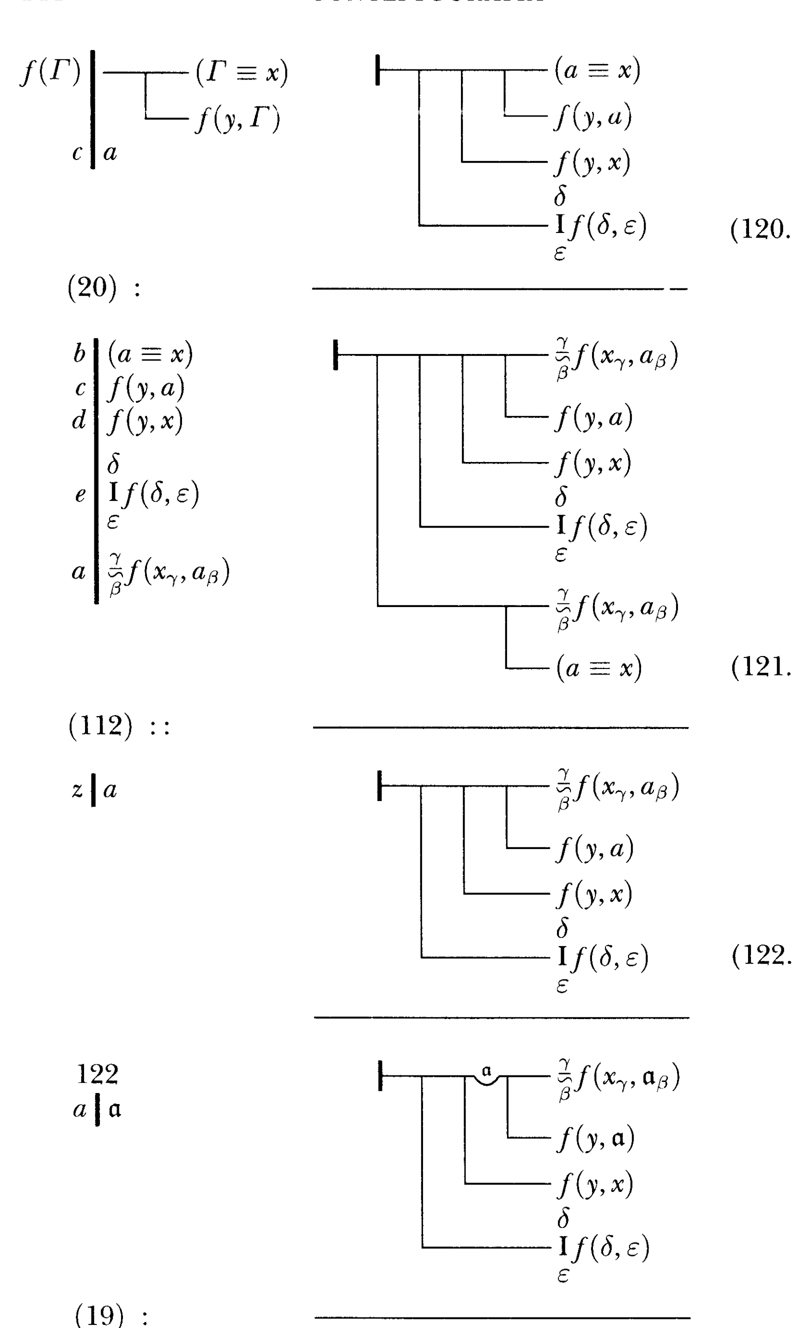
c | y

$\vdash$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$; $f(y, \mathfrak{a})$; $f(y, x)$; $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$ (118.

(19) : ______________________



(58) :: ______________________



b | $\mathfrak{a}$ $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$ — $f(y, \mathfrak{a})$
c | $f(y, x)$
d | $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$
a | $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, m_\beta)$ — $\frac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, m_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, m_\beta)$
$\frac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, m_\beta)$
$f(y, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$
$\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, m_\beta)$
$\frac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, m_\beta)$
$\mathfrak{a}$ $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$
$f(y, \mathfrak{a})$ (123.

(110) : :

$\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, m_\beta)$
$\frac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, m_\beta)$
$f(y, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$ (124.

Demos aquí, en palabras, la derivación de las fórmulas (122) y (124).

Sea x resultado de una aplicación del procedimiento unívoco f sobre y.

Luego, según (120), todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, es lo mismo que x.

Por lo tanto, según (112) todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, pertenece a la serie f que comienza con x.

Así:

> *Si* x *es resultado de una aplicación del procedimiento unívoco* f *sobre* y, *entonces, todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* y, *pertenece a la serie* f *que comienza con* x. (Fórmula 122).

Sea que m sigue a y en la serie f. Luego, de (110) se deduce:

> si todo resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y pertenece a la serie f que comienza con x, entonces m pertenece a la serie f que comienza con x.

Esto, junto con (122), muestra que:

> si x es resultado de una aplicación del procedimiento unívoco f sobre y, m pertenece a la serie f que comienza con x.

Así:

> *Si* x *es resultado de una aplicación del procedimiento unívoco* f *sobre* y, *y si* m *sigue a* y *en la serie* f, *entonces* m *pertenece a la serie* f *que comienza con* x. (Fórmula 124).

124

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, m_\beta) \\
\quad \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(y_\gamma, m_\beta) \\
\quad f(y, x) \\
\quad \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)
\end{array}$$

(20) :

$$\begin{array}{ll}
b & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, m_\beta) \\
c & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(y_\gamma, m_\beta) \\
d & f(y, x) \\
e & \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon) \\
a & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(m_\gamma, x_\beta) \\
  & \quad \neg\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, m_\beta)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(m_\gamma, x_\beta) \\
\quad \neg\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, m_\beta) \\
\quad \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(y_\gamma, m_\beta) \\
\quad f(y, x) \\
\quad \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon) \\
\quad \left(\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(m_\gamma, x_\beta) \;\; \neg\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, m_\beta) \right) \\
\quad \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, m_\beta)
\end{array}$$ (125.

(114) :

$$\begin{array}{l|l}
x & m \\
z & x
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(m_\gamma, x_\beta) \\
\quad \neg\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, m_\beta) \\
\quad \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(y_\gamma, m_\beta) \\
\quad f(y, x) \\
\quad \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)
\end{array}$$ (126.

Lo que sigue es, en palabras, la derivación de estas fórmulas.

Sea x resultado de una aplicación del procedimiento unívoco f sobre y.

Siga m a y en la serie f.

Así, según (124), m pertenece a la serie f que comienza con x.

En consecuencia, según (114), x pertenece a la serie f que comienza con m; o m sigue a x en la serie f.

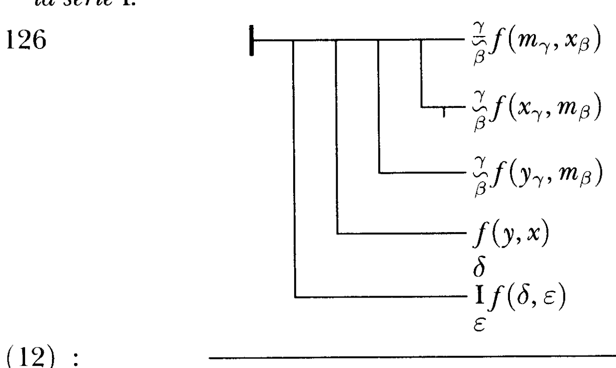
Esto también se puede expresar así:

> x pertenece a la serie f que comienza con m, o precede a m en la serie f.

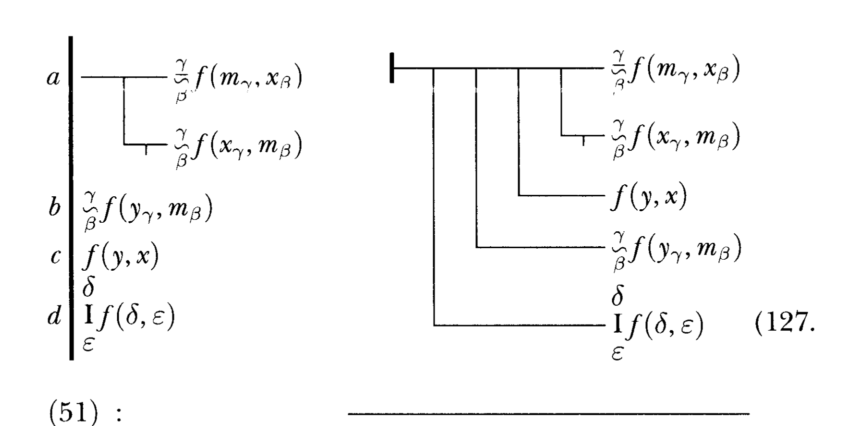
Por lo tanto:

> *Si* m *sigue a* y *en la serie* f, *y si el procedimiento* f *es unívoco, entonces todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* y, *pertenece a la serie* f *que comienza con* m, *o precede a* m *en la serie* f.

126



(12) :



(127.

(51) :

a | $\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, x_\beta)$; $\frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, m_\beta)$; $f(y, x)$

c | $\frac{\gamma}{\beta}f(y_\gamma, m_\beta)$

d | $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

b | $\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, y_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, x_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, m_\beta)$

$f(y, x)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, y_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(y_\gamma, m_\beta)$

$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, x_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, m_\beta)$

$f(y, x)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, y_\beta)$

(128.

(111) ::

z | m
v | x

$\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, x_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(x_\gamma, m_\beta)$

$f(y, x)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(m_\gamma, y_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta}f(y_\gamma, m_\beta)$

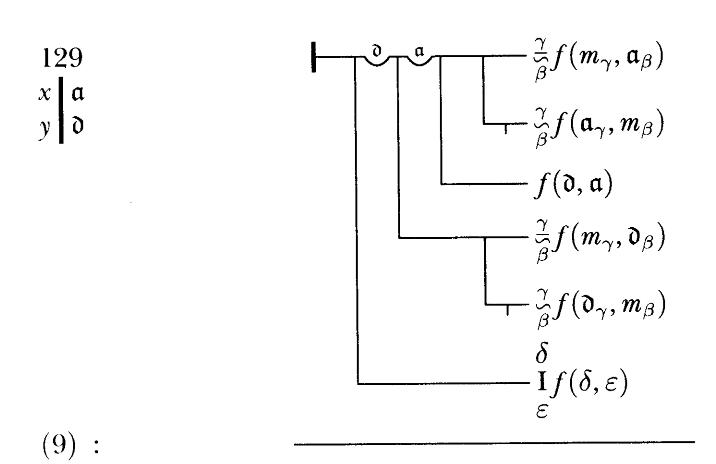
$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

(129.

En palabras, (129) se lee así:

> *Si el procedimiento* f *es unívoco, y si* y *pertenece a la serie* f *que comienza con* m *o precede a* m *en la serie* f, *entonces, todo resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* y *pertenece a la serie* f *que comienza con* m *o precede a* m *en la serie* f.

129
x | $\mathfrak{a}$
y | $\mathfrak{d}$



(9) :

$$b \quad \stackrel{\mathfrak{d}}{\smile}\ \stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\ \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \mathfrak{a}_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{a}_\gamma, m_\beta) \quad f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \mathfrak{d}_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{d}_\gamma, m_\beta)$$

$$c \quad \stackrel{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

$$a \quad \stackrel{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \alpha_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta) \quad f(\delta, \alpha) \right)$$

$$\vdash \quad \stackrel{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \alpha_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta) \quad f(\delta, \alpha) \right) \quad \stackrel{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon) \quad \stackrel{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \alpha_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta) \quad f(\delta, \alpha) \right)$$

$$\stackrel{\mathfrak{d}}{\smile}\ \stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\ \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \mathfrak{a}_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{a}_\gamma, m_\beta) \quad f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \mathfrak{d}_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{d}_\gamma, m_\beta) \qquad (130.$$

(75) : :

$$F(\Gamma) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \Gamma_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\Gamma_\gamma, m_\beta)$$

$$\vdash \quad \stackrel{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \alpha_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta) \quad f(\delta, \alpha) \right) \quad \stackrel{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon) \qquad (131.$$

En palabras, (131) se lee así:

> *Si el procedimiento* f *es unívoco, entonces en la serie* f *se hereda la propiedad de pertenecer a la serie* f *que comienza con* m *o de preceder a* m *en la serie* f.

131

$$\vdash \quad \stackrel{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \alpha_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta) \quad f(\delta, \alpha) \right) \quad \stackrel{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

(9) :

$$b \quad \stackrel{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \alpha_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta) \quad f(\delta, \alpha) \right)$$

$$c \quad \stackrel{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

$$a \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, y_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, m_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$$

$$\vdash \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, y_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, m_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta) \quad \stackrel{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, y_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, m_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta) \quad \stackrel{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\tfrac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, \alpha_\beta) \quad \tfrac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta) \quad f(\delta, \alpha) \right) \qquad (132.$$

(83) : :

$$g(\Gamma) \;\Big|\; \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(m_\gamma, \Gamma_\beta)$$

$$h(\Gamma) \;\Big|\; \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(\Gamma_\gamma, m_\beta)$$

$$\vdash \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(m_\gamma, y_\beta)$$
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$$
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon) \qquad (133.$$

Esta proposición, en palabras, se lee así

> *Si el procedimiento* f *es unívoco, y si* m *y* y *siguen a* x *en la serie* f, *entonces,* y *pertenece a la serie* f *que comienza con* m *o precede a* m *en la serie* f.

En la página siguiente se da una tabla en la que se ve en qué lugares se hizo uso de una fórmula para la derivación de otra. Nos podemos servir de ella para revisar las maneras como se ha aplicado una fórmula. En ella se advierte, también, la frecuencia de aplicación de una fórmula.

A la derecha aparece siempre el número de la fórmula en cuya derivación se usó la fórmula mencionada a la izquierda.

1	3	8	62	19	21	47	48	69	75	100	101
1	5	8	66	19	71	47	49	70	71	100	103
1	11	8	74	19	86	48	101	71	72	101	102
1	24	8	84	19	103	49	50	72	73	102	108
1	26	8	96	19	119	50	51	72	74	103	104
1	27	9	10	19	123	51	128	73	87	104	114
1	36	9	11	20	121	52	53	74	81	105	106
2	3	9	19	20	125	52	57	75	97	105	112
2	4	9	21	21	44	52	89	75	109	106	107
2	39	9	37	21	47	52	105	75	131	107	108
2	73	9	56	22	23	52	75	76	77	108	109
2	79	9	61	23	48	53	55	76	89	108	111
3	4	9	117	24	25	53	92	77	78	109	110
4	5	9	130	24	63	54	55	77	85	110	124
5	6	9	132	25	111	55	56	78	79	111	129
5	7	10	30	26	27	55	104	78	110	112	113
5	9	11	112	27	42	56	57	79	80	112	122
5	12	12	13	28	29	57	68	80	81	113	114
5	14	12	15	28	33	57	100	81	82	114	126
5	16	12	16	29	30	58	59	81	84	115	116
5	18	12	24	30	59	58	60	82	83	116	117
5	22	12	35	31	32	58	61	83	133	117	118
5	25	12	49	32	33	58	62	84	98	118	119
5	29	12	60	33	34	58	67	85	86	119	120
5	34	12	85	33	46	58	72	86	87	120	121
5	45	12	127	34	35	58	118	87	88	121	122
5	80	13	14	34	36	58	120	88	95	122	123
5	90	14	15	35	40	59	–	89	90	123	124
6	7	15	88	36	37	60	93	90	91	124	125
7	32	16	17	36	38	61	65	90	93	125	126
7	67	16	18	36	83	62	63	91	92	126	127
7	94	16	22	37	106	62	64	92	102	127	128
7	107	17	50	38	39	63	91	93	94	128	129
7	113	17	78	39	40	64	65	94	95	129	130
8	9	18	19	40	43	65	66	95	96	130	131
8	10	18	20	41	42	66	–	96	97	131	132
8	12	18	23	42	43	67	68	96	102	132	133
8	17	18	51	43	44	68	70	97	98	133	–
8	26	18	64	44	45	68	77	98	–		
8	38	18	82	45	46	68	116	99	100		
8	53	19	20	46	47	69	70	99	105		

SOBRE LA JUSTIFICACIÓN CIENTÍFICA DE UNA CONCEPTOGRAFÍA*

[1882]

En las partes más abstractas de la ciencia, se ha hecho patente permanentemente la falta de un medio para evitar malentendidos con los demás y, a la vez, para evitar fallas en el pensamiento propio. Ambos defectos tienen su origen en la imperfección del lenguaje. Puesto que requerimos símbolos sensibles para pensar, nuestra atención, por naturaleza, se dirige a lo externo. Las impresiones sensibles sobrepasan tanto en viveza a las imágenes de la memoria, que casi sólo ellas determinan el curso de nuestras representaciones, como en los animales. Y apenas podríamos escapar a esta dependencia si el mundo externo no fuera también dependiente en alguna medida de nosotros. La mayor parte de los animales, por su capacidad para cambiar de sitio, tienen influencia en sus impresiones sensibles: pueden apartarse de unas, buscar otras. Y no sólo esto: también pueden realizar transformaciones en las cosas. Ahora bien, esta capacidad la posee el hombre en mayor proporción. Sin embargo, tampoco nuestro curso de representaciones alcanzaría, con ello, plena libertad; se limitaría a lo que formara nuestra mano, a lo que pudiera entonar nuestra voz, si no fuera por la invención de los símbolos que nos hacen presente lo ausente, lo invisible y, tal vez, lo insensible. No niego que, también sin símbolos, la percepción de una cosa puede concentrar un círculo

*Título original: "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift", publicado en *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 81, 1882, pp. 48-56.

Traducción de Hugo Padilla, revisada para el presente volumen.

de imágenes de la memoria. Pero no podríamos seguirlas: una nueva percepción hunde esta imagen en la noche y hace surgir otra. Pero si producimos el símbolo de una representación que nos sea recordada por una percepción, creamos con ello un nuevo centro firme en el que se concentran las representaciones. De éstas, nuevamente, elegimos una para crear su símbolo. Así, paso a paso, nos introducimos en el mundo interior de nuestras representaciones y nos movemos ahí a discreción, aprovechando lo sensible mismo para librarnos de su limitación. Los símbolos tienen para el pensar la misma importancia que para la navegación tiene la ocurrencia de usar el viento para navegar a contra viento. Por tanto, nadie debe despreciar los símbolos. No poco depende de su atinada selección. De ese modo, su valor no disminuye porque después de mucha práctica ya no tengamos necesidad de pronunciar realmente el símbolo, que no tengamos más que aludirlo en voz alta para pensar; pues, a pesar de ello, pensamos con palabras, y cuando no lo hacemos con palabras, lo hacemos con símbolos matemáticos de otro tipo.

Sin símbolos, también sería difícil remontarnos hasta el pensamiento conceptual. Al dar el mismo símbolo a cosas diferentes aunque similares, propiamente ya no designamos la cosa individual, sino lo que tienen en común: el concepto. Y el concepto lo alcanzamos, primero, cuando lo designamos; puesto que en sí no se percibe, requiere un representante sensible que pueda hacérnoslo aparecer. Así, lo sensible nos abre el mundo de lo no sensible.

Con ello no se agotan los servicios de los símbolos. Sin embargo, puede ser suficiente el manifestar su indispensabilidad. Pero el lenguaje se muestra incapaz, cuando de esto se trata, para librar de fallas al pensamiento. Incluso, no cumple el primer requisito que a este respecto se le pone: el de ser inequívoco. Los más peligrosos son los casos en los que los significados de la palabra sólo son un poco distintos, las oscilaciones leves pero no indiferentes. De múltiples ejemplos, sólo se mencionará aquí un fenómeno general: la misma palabra sirve para la designación de un concepto y de un objeto individual que cae bajo aquél. En general, no se ha acuñado diferencia alguna entre concepto e individuo. "El caballo" puede designar un ser individual, pero también la especie, como en la proposición: "el caballo es un animal herbívoro". Finalmente, caballo puede significar un concepto como en la proposición: "esto es un caballo". El lenguaje no está dominado por leyes lógicas, de manera que la observancia de la gramática garantice ya la corrección formal del proceso del pensamiento. Las formas en que se expresan los argumentos son tan variadas, tan laxas y tan dúctiles, que fácilmente se pueden colar presupuestos inadvertidos que sean pasados por alto en la enumeración de las condiciones necesarias para la validez de las conclusiones. Éstas cobran una generalidad mayor que la que les corresponde por derecho. Aun un escritor tan escrupuloso y estricto como Euclides, usó con frecuencia calladamente de presupuestos no asentados ni en sus postulados ni en los presupuestos de los teoremas particulares. Así, en la prueba del teorema 19 del libro primero de los *Elementos* (en todo triángulo el ángulo mayor subtiende el lado mayor), calladamente utilizó las proposiciones:

1) Si una línea no es mayor que otra, entonces es igual a ésta o menor que ésta.
2) Si un ángulo es igual a otro, entonces no es mayor que éste.
3) Si un ángulo es menor que otro, entonces no es mayor que éste.

Sin embargo, el lector sólo reparará por una especial atención en el salto de estas proposiciones, sobre todo porque parecen estar, en cuanto a originalidad, tan cerca de las propias leyes del pensamiento, que son usadas como éstas mismas. Un círculo estrictamente delimitado de formas de inferencia no se encuentra a la mano en el lenguaje, así que en la forma lingüística un proceso sin lagunas no se distingue de un salto en los miembros intermedios. Por tanto, se puede decir que el primero casi no se encuentra en el lenguaje, que se resiste a la sensibilidad lingüística en virtud de que se aparejaría a una insufrible prolijidad. Las relaciones lógicas casi siempre son sólo indicadas por medio del lenguaje dejadas al acierto casual, pero no expresadas propiamente.

La palabra escrita sólo tiene la ventaja de la permanencia frente a la palabra hablada. Se puede abarcar con la vista varias

veces un curso de pensamientos, y examinar, así, más a fondo su precisión. De esta manera, las reglas de la lógica se vierten externamente como pauta, pues en la naturaleza de la escritura misma no hay garantía suficiente. También por ello a los ojos del examinador se escapan fácilmente fallas, en especial las que surgen de mínimas diferencias en el significado. El que tanto en la vida como en la ciencia nos orientemos tan tolerablemente a pesar de esto, lo debemos a los múltiples medios de revisión que por lo general tenemos a nuestra disposición. La experiencia, la intuición espacial nos resguarda de muchas fallas. Por otra parte, las reglas lógicas nos dispensan poca protección, como nos muestran ejemplos en campos en que los medios de revisión empiezan a fallar. Estas reglas tampoco han preservado de errores a grandes filósofos y escasamente han librado siempre a la alta matemática de fallas, ya que de continuo han permanecido ajenas al contenido.

Los defectos señalados tienen su causa en cierta deleznabilidad e inestabilidad del lenguaje que, por otra parte, es condición de su múltiple utilidad y su capacidad de desarrollo. En este respecto, el lenguaje puede ser comparado a la mano, la cual no basta, a pesar de su capacidad, para acomodarse a las más diversas tareas. Producimos manos artificiales, herramientas para fines específicos que trabajan con una exactitud que la mano no lograría. ¿Por qué es posible esta exactitud? Justo por la rigidez, la estabilidad de las partes, cuya carencia hace a la mano tan vastamente diestra. Así, tampoco la escritura es suficiente. Requerimos un complejo de símbolos del que se destierre toda multivocidad, y a cuya forma lógica rigurosa no pueda escapar el contenido.

Ahora se pregunta si tienen primacía los símbolos para los oídos o los símbolos para los ojos. Por lo pronto, los primeros ofrecen la ventaja de que su producción es independiente de circunstancias externas. Especialmente puede hacerse valer la estrecha afinidad de los sonidos con los procesos internos. Para ambos, la forma del fenómeno es la secuencia temporal; a la vez, ambos son fugaces. En especial para la vida emotiva, los tonos tienen una relación más íntima que las formas y los colores; y la voz humana con su infinita flexibilidad permite satisfacer también las más finas combinaciones e inflexiones del sentimiento. Pero, por valiosas que puedan ser estas ventajas para otros fines, para el rigor de las deducciones carecen de significación. Esta estricta adaptación de los símbolos auditivos a las condiciones anímicas y corporales de la razón tiene, tal vez, la desventaja de hacer más dependiente ésta de aquéllos.

Lo visible es del todo distinto; las figuras son especialmente apropiadas. Por lo general, están definidas con precisión y diferenciadas claramente. Esta seguridad del símbolo escrito conducirá también a una acuñación más precisa de lo designado. Y ya tal efecto sobre las representaciones es de desear para el rigor de la deducción. Pero sólo se alcanzará si el símbolo significa inmediatamente la cosa.

Una ventaja más de lo escrito es la mayor duración e invariabilidad. También en esto es semejante, como debe serlo, al concepto, aunque ciertamente nada semejante a los infatigables vuelos de nuestros procesos reales de pensamiento. La escritura ofrece la posibilidad de hacer presentes muchas cosas al mismo tiempo, y aunque sólo podamos mirar una pequeña parte de ella en cada momento, retenemos, sin embargo, una impresión general del resto y, cuando lo necesitamos, está siempre a nuestra disposición. Las relaciones espaciales de los símbolos escritos en una superficie bidimensional pueden ser empleados de múltiples maneras para expresar relaciones internas, que rebasan las del mero seguir y preceder en el tiempo unidimensional, y esto significa el encontrar aquello a lo que queremos dirigir nuestra atención. De hecho, tampoco la simple ordenación corresponde, en manera alguna, a la multiplicidad de relaciones lógicas por medio de las cuales se interconectan los pensamientos.

Así, las propiedades por medio de las cuales la escritura se aparta del curso de la representación son precisamente las más apropiadas para remediar ciertos defectos de nuestra constitución. Si no se trata de presentar el pensamiento natural tal como se ha estructurado en su efecto recíproco con el lenguaje verbal, sino de complementar esa limitación que se ha producido por su estrecho trato con el sentido del oído, entonces, según esto, se ha de preferir la escritura al habla. Para aprovechar las ventajas peculiares de los símbolos visibles, tal escritura tiene que ser diferente de todo lenguaje verbal. No se requiere

mencionar que estas ventajas casi no tienen valor en la escritura verbal. La posición recíproca de las palabras en la superficie donde se escribe depende en gran medida de la posición de los renglones y, por tanto, carece de significación. Pero existen ya otros tipos de escritura que aprovechan mejor esas ventajas. El lenguaje de fórmulas aritmético es una conceptografía, puesto que sin mediación de la voz expresa inmediatamente las cosas. Como tal, logra una brevedad que permite despachar el contenido de un juicio simple en un renglón. Tales contenidos —en este caso, igualdades y desigualdades— se escriben unos bajo otros, en cuanto unos se infieren de otros. Si de dos se infiere un tercero, se separa al tercero de los dos primeros por una barra horizontal que se puede traducir por "por lo tanto". De esta manera se utiliza la superficie bidimensional donde se escribe para ganar claridad. La deducción es aquí muy uniforme y casi siempre descansa en que transformaciones iguales realizadas con números iguales conducen a resultados iguales. Ciertamente no es ésta la única manera de inferir en la aritmética. Pero si el progreso lógico acontece de otra manera, por lo general será necesario expresarlo por medio de palabras. Por lo tanto, en el lenguaje de fórmulas aritmético faltan expresiones para las conexiones lógicas; y, así, no merece el nombre de una conceptografía en sentido pleno. Todo lo contrario pasa con el modo de simbolización que proviene de *Leibniz*[1] para las relaciones lógicas, que *Boole*, *R. Grassman*, *Stanley Jevons*, *E. Schröder* y otros han renovado recientemente. Sin duda se tienen aquí las formas lógicas, si bien no cabalmente completas; pero falta el contenido. Cada intento de poner aquí expresiones de contenidos —digamos ecuaciones analíticas— en el lugar de las simples letras, indicará, por la oscuridad, lo pesado y aun lo multívoco de las fórmulas correspondientes, cuán poco apropiado es este modo de simbolización para la construcción de una verdadera conceptografía. De ésta me gustaría pedir: debe tener modos de expresión simples para las relaciones lógicas que, limitadas en número a lo necesario, se puedan dominar con facilidad y seguridad. Estas formas deben ser apropiadas para combinarse

[1] "Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis", ed. Erdmann, p. 94 [recogido y traducido al inglés en G.H.R. Parkinson (ed.), *Leibniz Logical Papers: A Selection*, Clarendon, Oxford, 1966].

lo más íntimamente posible con un contenido. Por tanto, debe aspirar a una brevedad tal que la superficie bidimensional donde se escribe pueda ser bien aprovechada para la claridad de la exposición. Los símbolos para significados de contenido son poco esenciales. Una vez que están ahí las formas generales, se podrían crear en la medida en que se requiriera. Cuando no se logra o no parece necesario descomponer un concepto en sus componentes últimos, puede uno conformarse con símbolos provisionales.

Fácilmente surgen preocupaciones innecesarias acerca de la viabilidad del asunto. Es imposible, se dice, que por medio de una conceptografía se haga progresar a la ciencia; pues el descubrimiento de la primera presupone ya la perfección de la última. Exactamente la misma dificultad aparente surge en el lenguaje. Éste debe haber hecho posible el desarrollo de la razón; pero ¿cómo pudo el hombre producir el lenguaje sin razón? Para investigar las leyes naturales los físicos requieren aparatos; éstos sólo pueden ser producidos por una técnica avanzada que, a su vez, descansa sobre el conocimiento de las leyes naturales. El círculo se resuelve en todos los casos de la misma manera. Un progreso en la física tiene como consecuencia un progreso en la técnica, y ésta hace posible construir nuevos aparatos por medio de los cuales avanza la ciencia. La aplicación a nuestro caso resulta patente.

He intentado ahora[2] complementar el lenguaje de fórmulas matemático por medio de símbolos para las relaciones lógicas, de modo que produzca para el campo de la matemática, por lo pronto, una conceptografía tal como la he presentado aquí en cuanto deseable. No se excluyen aplicaciones de mis símbolos a otros campos. Las relaciones lógicas aparecen por todas partes, y los símbolos para los contenidos especiales pueden ser elegidos de tal suerte que encajen en el marco de la conceptografía. Sea que acontezca esto o no, en todo caso una presentación intuitiva de las formas del pensamiento tiene un significado que va mas allá de las matemáticas. Por eso, espero que también los filósofos concedieran alguna atención al asunto.

[2] Véase mi *Begriffsschrift* [*Conceptografía, supra*, pp. 39-154.]

LÓGICA (1897)

[Selección]*

Separación del pensamiento de sus envolturas

En una oración afirmativa suelen estar íntimamente conectadas estas dos cosas: el pensamiento expresado y la afirmación de su verdad. De ahí que no se distinga entre ambos claramente. Sin embargo, también se puede expresar un pensamiento sin afirmar al mismo tiempo su verdad. Un científico que realiza un descubrimiento considera primeramente un pensamiento y se pregunta si es verdadero o falso; y sólo después de que la investigación resulta favorable a la hipótesis se atreve a formularlo como verdadero. En la pregunta "¿es condensable el gas oxígeno?" y en la oración "el gas oxígeno es condensable" está expresado el mismo pensamiento, conectado en un caso con una interrogación, en el otro con una afirmación.

Cuando reconocemos internamente un pensamiento como verdadero, hacemos un juicio; cuando damos a conocer ese reconocimiento por nuestra parte, lo afirmamos.

Podemos pensar sin llegar a juzgar.

Hemos visto que la serie de sonidos que componen una oración a menudo no basta para expresar de forma completa un pensamiento. Si queremos captar con toda nitidez la esencia de un pensamiento, debemos tener presente que tampoco es raro el caso contrario, a saber, el caso en el que una oración hace

* Se traducen solamente las pp. 150-161 del texto *Logik* (1897), recogido en Frege 1969, vol. 1, la sección que se traduce da nombre al subtítulo del presente capítulo.

Traducción de Xavier de Donato.

más que expresar un pensamiento y afirmar su verdad. En muchos casos, [la oración] tiene además que provocar algún efecto sobre las ideas y los sentimientos del oyente, tanto más cuanto más cerca se esté del lenguaje poético. Ya hemos señalado que el lenguaje es poco apropiado para evocar a voluntad en el oyente determinadas ideas con exactitud. ¿Quién se atrevería a hacer surgir en la mente de otro, a través de las palabras, una imagen exacta de Apolo tal como resulta fácil de conseguir gracias a la contemplación de una escultura? Sin embargo, se suele decir que el poeta pinta. Y, en efecto, no se puede negar que la palabra oída afecta a las ideas [*Vorstellungen*]* por el mero hecho de entrar en la conciencia como un complejo de sensaciones auditivas. La mera sucesión de sonidos, el timbre de la voz, la entonación, el ritmo son percibidos con sentimientos de placer o displacer. Estas sensaciones sonoras se vinculan con representaciones [*Vorstellungen*] auditivas parecidas y éstas, a su vez, se conectan con otras representaciones suscitadas por ellas. Éste es el ámbito de la onomatopeya. A este respecto, podemos poner como ejemplo el verso homérico (*Odisea*, IX, 71): τριχθά τε καὶ τετραχθὰ διέσχισεν ἶς ἀνέμοιο.†

Esto es completamente independiente del propósito de las palabras de expresar pensamientos. Los sonidos actúan aquí sólo como estímulos sensoriales. Pero, puesto que las sucesiones de sonidos supuestamente tienen un sentido, ejercen una influencia sobre la imaginación aún de otro modo. El que oye la palabra "caballo" entendiendo su significado probablemente en seguida se figurará en la mente la imagen de un caballo. Esta imagen no debe confundirse, sin embargo, con el sentido de la palabra "caballo", ya que en la palabra "caballo" no se está dando pista alguna sobre el color del caballo, ni sobre su postura en reposo o en movimiento, ni sobre el lado desde el que es visto y otras cosas similares. Si varias personas pudieran proyectar inmediatamente en una pantalla las ideas que

*Traduzco "Vorstellungen" por "ideas", aunque algunas veces, y dado el contexto, también uso el término "representaciones". Ambos términos son traducciones válidas. [N. del t.]

† En la versión de Luis Segalá: "el impetuoso viento rasgó las velas en tres o cuatro pedazos" (Homero, *Odisea*, Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1964 (Austral Clásica, 70), p. 89). [N. del t.]

les vienen a la mente cuando escuchan la palabra "caballo", lo que se proyectaría en la pantalla serían imágenes bastante diferentes. Incluso en un mismo hombre la palabra "caballo" no siempre hace surgir la misma representación. Mucho dependerá aquí del contexto. Piénsese, por ejemplo, en las oraciones "Qué contento cabalga sobre su brioso caballo" y "Acabo de ver un caballo desplomarse en el húmedo asfalto".

Por tanto, no es para nada el caso que con la palabra "caballo" esté asociada siempre la misma idea. Esa palabra, en virtud de su sentido, ciertamente nos sugiere la formación de una idea, pero por sí misma está lejos de determinar completamente esa idea. En general, podremos suponer que hay una concordancia de ideas entre el oyente y el hablante aunque sólo de una manera aproximada. Cuando varios artistas ilustran el mismo poema independientemente uno del otro, diferirán entre sí considerablemente en la representación del mismo suceso. El poeta no pinta realmente nada, sino que incita a pintar y proporciona pistas para hacerlo, dejando al oyente la tarea de dar cuerpo a sus palabras. Y, para este cometido, al poeta le resulta útil disponer de varias palabras que puedan sustituirse unas por otras sin alterar por ello los pensamientos, pero que pueden actuar de manera diferente en las ideas y los sentimientos del oyente. Piénsese, por ejemplo, en las palabras "andar", "caminar" y "pasear". En el vocabulario común, estas palabras se usan aproximadamente para el mismo fin. Si comparamos la oración "Este perro ha aullado toda la noche" con "Este chucho ha aullado toda la noche", nos parece que el pensamiento [expresado] es el mismo. La primera oración no nos dice ni más ni menos que la segunda. Pero mientras que la palabra "perro" no suscita asociaciones ni positivas ni negativas, la palabra "chucho" está definitivamente más asociada con el desagrado y da pie a representarse el perro como algo maleducado. Incluso si esto fuera injusto con el animal, no podríamos decir que, por ello, la segunda oración fuese falsa. Es cierto que quien la profiere expresa con ello un cierto menosprecio, pero esto no pertenece al pensamiento expresado. Lo que distingue a la segunda de la primera oración tiene el valor de una interjección. Se podría pensar que, con la segunda oración, se nos está diciendo más que con la primera, a saber, que el hablante

tiene una opinión despectiva del perro. En tal caso, la palabra "chucho" contendría un pensamiento completo. La prueba de esto se ha de hacer de la siguiente manera.

Supongamos que nuestra primera oración es verdadera y que alguien profiere la segunda oración, sin sentir realmente el menosprecio que parece ocultarse bajo el término "chucho". Si la objeción fuera correcta, la segunda oración contendría dos pensamientos, de los cuales uno sería falso; de modo que afirmaría algo en conjunto falso, mientras que la primera oración sería verdadera. A esto difícilmente se asentirá; más bien, el uso de la palabra "chucho" no impedirá considerar también verdadera la segunda oración. Porque hay que distinguir entre el pensamiento que uno expresa y el pensamiento que uno induce a los demás a tomar como verdadero sin llegar a expresarlo. Si un comandante esconde sus debilidades al enemigo haciendo que sus tropas aparezcan con distintos uniformes, no está propiamente mintiendo, ya que no expresa pensamiento alguno, si bien su acción tiene el propósito de inducir a tener un determinado pensamiento. Tales acciones también pueden darse en el caso del habla, como cuando la voz adquiere un cierto tono o se escogen ciertas palabras. Si alguien, sin estar realmente triste, profiere con voz triste una noticia auténtica acerca de la muerte de alguien, el pensamiento expresado seguirá siendo verdadero aun cuando el tono triste se haya adoptado con el propósito de mover a engaño. Este tono de voz puede sustituirse por palabras como "¡ah!" o "desafortunadamente" sin cambiar nada del pensamiento. Otra cosa es cuando se acuerdan ciertas acciones con el fin específico de dar una noticia. El uso general sustituye a dichos acuerdos en el lenguaje. Obviamente, pueden producirse casos problemáticos debido a cambios en el lenguaje. Debido al uso continuo en casos del mismo tipo, algo que originalmente no había sido usado para expresar un pensamiento puede finalmente servir para ese propósito. Un pensamiento que antes sólo había sido sugerido mediante cierta expresión, puede acabar siendo explícitamente afirmado por ella. Y en el período intermedio serán posibles distintas interpretaciones. Sin embargo, la diferencia en sí no queda abolida por estos vaivenes del idioma. Para nosotros aquí sólo es esencial que una diferencia lingüística no siempre comporte una diferencia

en el pensamiento expresado y que tengamos un medio para distinguir lo que pertenece al pensamiento y lo que no, aun si en ocasiones, debido a la naturaleza orgánica del lenguaje, su aplicación pueda resultar difícil.

Aquí también es oportuno mencionar la diferencia entre voz activa y voz pasiva. Las oraciones "*M* entregó a *N* el documento *A*", "El documento *A* fue entregado a *N* por *M*" y "*N* recibió de *M* el documento *A*" expresan exactamente el mismo pensamiento; ninguna de estas oraciones da a entender ni la más mínima cosa de más ni de menos que las otras. Por esta misma razón resulta imposible que una sea verdadera y alguna de las otras sea falsa. Lo que aquí puede ser verdadero o falso es exactamente lo mismo. Con todo esto, no estamos en posición de decir que sea por completo indiferente cuál de estas oraciones se use. Razones estilísticas y estéticas darán por lo común preferencia a una de ellas. Si alguien pregunta "¿Por qué *A* ha sido llevado preso?", la respuesta "*B* ha sido asesinado por él" no sería natural, ya que exigiría un innecesario salto de atención de *A* a *B*. Hacia dónde se dirija la atención, dónde recaiga el énfasis, puede muy bien ser de interés en otro ámbito, pero no le interesa a la lógica.

En la traducción de una lengua a otra se hace a veces imperioso echar por la borda la construcción gramatical original. No obstante, se mantiene el mismo pensamiento, y así debe ser si la traducción es correcta. Por el contrario, las indicaciones relativas a la representación y el tono deben, en ocasiones, dejarse de lado.

Como ya se ha indicado anteriormente, en las dos oraciones "Federico el Grande venció en Rossbach" y "Es verdad que Federico el Grande venció en Rossbach" se expresa el mismo pensamiento con distinta forma lingüística. Cuando afirmamos el pensamiento de la primera oración, afirmamos automáticamente el pensamiento de la segunda, y a la inversa. No se trata de dos actos de juicio diferentes, sino de uno solo.

(Se colige de lo anterior que las categorías gramaticales de sujeto y predicado no son de ninguna relevancia para la lógica.)

La distinción entre lo que es parte del pensamiento expresado por una oración y lo que meramente se adhiere al pensamiento es de gran importancia para la lógica. La pureza de

lo que se investiga no sólo es de importancia para el químico. ¿Cómo podría éste reconocer con completa seguridad que ha llegado al mismo resultado por otros medios, si la diferencia surgida pudiera tener su raíz en las impurezas de la sustancia utilizada? Los primeros y más importantes descubrimientos en una ciencia suelen ser reconocimientos. Así, nos parece obvio que el Sol que ayer se puso y hoy salió sea el mismo, pero, por más que nos pueda parecer insignificante, éste fue de hecho uno de los mayores descubrimientos de la astronomía, acaso el más fundamental. También fue de gran importancia reconocer que la estrella matutina es la estrella vespertina y que el triple de cinco es igual al quíntuplo de tres. Es tan importante no diferenciar lo que es lo mismo como reconocer diferencias allí donde no resultan evidentes. Es, pues, completamente erróneo creer que nunca se pueden hacer demasiadas distinciones. Está simplemente mal señalar diferencias allí donde no son relevantes. Así, en la mecánica general uno se cuida de hablar de la diferencia química de las sustancias o de formular una versión particular de la ley de la inercia para, digamos, cada elemento químico. Sólo se tendrán en cuenta las diferencias que sean esenciales para la formulación de las leyes con las que se esté trabajando en ese momento. Sobre todo, no podemos dejarnos engañar por factores externos y ver diferencias allí donde no las hay.

En la lógica, tenemos que rechazar todas las distinciones que se hacen desde puntos de vista meramente psicológicos. Lo que en ocasiones se llama una profundización psicológica de la lógica no es más que una falsificación psicológica.

En los seres humanos es natural que el pensamiento se entremezcle con el imaginar y el sentir. La lógica tiene la tarea de aislar lo que es puramente lógico, no de modo que lleguemos a pensar sin imágenes, lo cual sería imposible, sino de modo que distingamos conscientemente entre lo lógico y lo que le añaden la imaginación y el sentimiento. Una dificultad estriba en que pensamos en una lengua determinada, y la gramática, que tiene para la lengua la misma importancia que la lógica para el juicio, entremezcla lo lógico con lo psicológico. Si no fuera así, todas las lenguas tendrían necesariamente la misma gramática. Ciertamente se pueden expresar los mismos pensamientos en diferentes lenguas; pero los accesorios psicológicos, el ropaje del pensamiento, serán con frecuencia diferentes. A partir de esto se reconoce la importancia de aprender lenguas extranjeras para la formación lógica. Al comprobar que el ropaje del pensamiento es diferente, aprendemos a separarlo claramente del núcleo con el que está inextricablemente unido en cada lengua particular. Es así como las diferencias entre las lenguas nos facilitan el aislamiento de lo lógico. Pero no se vencen así todas las dificultades y nuestros tratados de lógica aún acarrean cosas, como por ejemplo las nociones de sujeto y predicado, que propiamente no pertenecen a la lógica. Por esta razón resulta de utilidad el conocimiento de modos de representación del pensamiento radicalmente diferentes, como son los que tenemos en el lenguaje de fórmulas de la aritmética o en mi *Conceptografía*.

La primera y más importante tarea es la de representar claramente los objetos que se han de investigar. Ya sólo haciendo esto será uno capaz de efectuar los actos de reconocimiento que, también en la lógica, constituyen descubrimientos probablemente fundamentales. No olvidemos nunca que dos oraciones diferentes pueden expresar el mismo pensamiento y que del contenido de una oración sólo nos ha de interesar aquello que puede ser verdadero o falso.

Si hubiera un atisbo más de pensamiento contenido en la forma pasiva que en la activa, sería pensable que ese atisbo de más fuera falso, en tanto que el pensamiento expresado en la forma activa fuese verdadero; y en tal caso no sería legítimo pasar sin más de la forma activa a la forma pasiva. Del mismo modo, si la forma activa contuviera un atisbo más de pensamiento que la pasiva, no se podría pasar sin reparo de la pasiva a la activa. Sin embargo, si ambas transiciones son posibles sin perjuicio de la verdad, estamos ante la confirmación de que lo que en ellas es verdadero, es decir, el pensamiento, no es afectado por la forma de expresarlo. Esto nos debe prevenir, por tanto, de dar demasiado peso a la expresión lingüística como generalmente le dan los lógicos cuando, por ejemplo, aceptan que todo pensamiento, o juicio, como frecuentemente se le llama, tiene un sujeto y un predicado, de modo que lo que sean el sujeto y el predicado está determinado por el pensamiento, al

igual que sujeto y predicado están inequívocamente dados en la oración. Uno se embrolla así en innecesarias dificultades y, lidiando infructíferamente con ellas, refuerza la impresión de que la lógica es una ciencia del todo superflua.

Evitaremos por completo las expresiones "sujeto" y "predicado", tan queridas de los lógicos, no sólo porque hacen más difícil los actos de reconocimiento, sino también porque ocultan diferencias reales. En lugar de seguir ciegamente la gramática, el lógico debería más bien ver su tarea como la de liberarnos de las ataduras del lenguaje. Pues, aunque hay que reconocer que el pensamiento sólo fue posible, al menos en sus formas superiores, gracias al lenguaje, debemos cuidarnos de depender del lenguaje; pues muchos errores de razonamiento tienen su origen en las imperfecciones lógicas del lenguaje. Indudablemente, si se cree que la tarea de la lógica consiste en describir cómo piensan realmente las personas, entonces naturalmente se le concederá gran importancia al lenguaje. Pero en tal caso estaríamos llamando lógica a lo que en realidad no sería más que una mera rama de la psicología, de manera parecida a como alguien que desarrolla una teoría físico-psicológica de la visión a través de un telescopio imagina estar haciendo astronomía. Los objetos propios de la lógica quedan en aquel caso tan alejados del punto de mira como en este caso los problemas de la astronomía. Los tratamientos psicológicos de la lógica tienen su origen en la falsa creencia de que el pensamiento (o el juicio, como también se le llama) es algo psicológico, como lo es una representación. Esto conduce irremisiblemente a un idealismo epistemológico; ya que, en tal caso, las partes que se distinguen en el pensamiento, como el sujeto y el predicado, pertenecerían a la psicología, al igual que el propio pensamiento. Como todo conocimiento se realiza mediante juicios, eso significaría que se perdería todo contacto con lo que es objetivo. Y todo lo que nos es permitido hacer en nuestra lucha por alcanzar lo objetivo es sacarnos del río tirando de nuestros propios cabellos. Lo más que podemos hacer es intentar aclarar cómo llega a parecernos que hay objetividad, cómo llegamos a asumir que hay algo que no pertenece a nuestra mente, sin que esta asunción esté justificada en absoluto. El caso más llamativo de esta derivación hacia el idealismo lo tenemos en la

psicología fisiológica, pues contrasta de forma muy marcada con su punto de partida realista. Se empieza con fibras nerviosas y células ganglionares, se hacen suposiciones acerca de impulsos y de cómo son transmitidos y con ello se busca hacer más inteligible la representación [*Vorstellen*], ya que las células ganglionares y fibras nerviosas se tienen, de forma automática, por más inteligibles que la representación. Tal como corresponde a una ciencia digna de ese nombre, se presupone sin mayor reparo que las células ganglionares y fibras nerviosas son objetivas y reales. Esto probablemente funcionará siempre y cuando nos limitemos a [explicar] la representación. Pero no nos quedamos allí: pasamos asimismo al pensamiento y al juicio, y lo que empezó siendo realismo se convierte de pronto en idealismo extremo, y de esta forma esta teoría corta la rama sobre la que está asentada. Todo se disuelve ahora en representaciones y, como resultado, las explicaciones del principio se tornan ilusorias. La anatomía y la fisiología se convierten en ficciones. Toda la base anatómico-fisiológica de fibras nerviosas, células ganglionares, estímulos, impulsos y transmisión de impulsos se desvanece. ¿Y qué nos queda? Representaciones de fibras nerviosas, representaciones de células ganglionares, representaciones de estímulos, etc. ¿Y qué es lo que al principio había que explicar? ¡El representarse todas estas cosas! ¿Puede acaso decirse ahora de cualquiera de estas explicaciones que valga o sea verdadera? De pie junto a un río solemos observar remolinos en el agua. ¿No sería absurdo pretender que uno de estos remolinos es válido o verdadero o que, por el contrario, es falso? Y aun si la danza de átomos y moléculas en mi cerebro es más animada y frenética que la de los mosquitos en una bella tarde de verano, ¿no sería igualmente absurdo afirmar que esta danza es válida o que es verdadera? Y si las explicaciones que buscamos consistieran en estas danzas, ¿podríamos acaso decir que estas danzas son verdaderas? ¿Y sería acaso muy diferente si estas explicaciones no fueran a fin de cuentas sino colecciones de representaciones? ¿Son acaso verdaderos los fantasmas que pasan por la mente del enfermo de tifus en constante cambio y como en procesión? Pues no son ni verdaderos ni falsos, sino meramente procesos, como son procesos los remolinos del agua. Y si hemos de hablar de

un derecho, sólo puede tratarse del derecho a ocurrir como ocurre. Un fantasma contradice a otro no más de lo que un remolino en el agua contradice a otro.

Si asociamos la representación visual de una rosa con la representación de una delicada fragancia y también con la representación auditiva de las palabras "rosa" y "fragancia" y aun con las representaciones motoras de la pronunciación de estas palabras, y si continuáramos añadiendo asociación tras asociación de modo que diéramos lugar a la más elaborada de las representaciones, ¿en qué nos aprovecha? ¿Cree alguien en serio que esta representación así formada sería un pensamiento? Lo es tan poco como un autómata es un ser vivo por más ingeniosamente que esté diseñado. Trozos sin vida ensamblados no pueden dar lugar a otra cosa que a algo inerte y sin vida. Representaciones unidas a representaciones dan lugar a una representación y toda la habilidad y artificiosidad de las asociaciones no pueden dar lugar a otra cosa. Aunque amenicemos el todo con sentimientos y estados anímicos, no será de gran ayuda. La ley de la gravitación no puede surgir de este modo, pues ésta es por completo independiente de lo que ocurra en mi mente y de cualquier cambio o fluctuación en mis ideas. ¡Por supuesto, la captación de esta ley es un fenómeno mental! ¡Claro que sí! Pero es un fenómeno que ocurre en los confines de lo mental y que, por eso mismo, no podrá ser completamente comprendido desde una perspectiva psicológica, pues hay algo que entra en juego en él de forma esencial y que ya no es propiamente mental, a saber, el pensamiento; y quizás es este fenómeno el más misterioso de todos. Pero, en la medida en que es de tipo mental, no necesitamos ocuparnos de él en la lógica. Nos basta con que podamos comprender pensamientos y reconocerlos como verdaderos; cómo suceda esto, es en sí mismo un problema[1]. También al químico le basta poder ver, oler y gustar; y su tarea no es, desde luego, saber cómo ocurren estas cosas. No carece de importancia para el éxito de una investigación científica que las cuestiones que puedan tratarse independientemente unas de las otras no se confundan entre

[1] Este problema está lejos de ser comprendido en su justa dimensión. A menudo uno se contenta con colar el pensamiento por la puerta trasera, de modo que ya no se sabe cómo realmente pudo entrar allí.

ellas, creando así dificultades innecesarias. Esto fácilmente provoca que se nos tuerza la vista. En consecuencia, no nos debe preocupar cómo ocurre realmente el pensamiento, la adquisición de una creencia. Lo que nos interesa no es el mantener que algo es verdadero, sino las leyes de la verdad. Éstas pueden ser entendidas asimismo como prescripciones para hacer juicios, a las cuales se debe uno conformar si no se quiere faltar a la verdad. Si se las llama leyes del pensamiento o, mejor aún, leyes del juicio, lo que no debemos olvidar es que se trata de leyes que, como las leyes de la moral o las leyes del estado, prescriben cómo hay que actuar y no determinan cómo ocurren de hecho los fenómenos, como sí lo hacen las leyes de la naturaleza. El pensamiento real no está siempre en consonancia con las leyes de la lógica, como tampoco el comportamiento real está en consonancia con la ley moral. Por eso, en lógica, es mejor prescindir enteramente del término "leyes del pensamiento", pues induce a tomar las leyes lógicas como si fueran leyes de la naturaleza. Si ése fuera realmente el caso, tendríamos que asignarlas a la psicología. Podríamos, con la misma justificación, pensar en las leyes de la geometría o de la física como leyes del pensamiento o del juicio, esto es, como prescripciones de acuerdo con las cuales debe regirse el juicio en otros ámbitos si ha de estar de acuerdo con la verdad. La lógica es un lugar tan poco adecuado como la geometría o la física para realizar investigaciones psicológicas. Por supuesto que explicar cómo tienen lugar el pensamiento y el juicio es una tarea posible, pero no es en absoluto del dominio de la lógica.

De acuerdo con lo anterior, el lógico no tiene que preguntarse cuál es el decurso natural del pensamiento en la mente humana. Lo que es natural para uno, para otro puede muy bien no serlo. De ello dan buen testimonio las enormes diferencias en las gramáticas. Ningún reproche debe temer menos el lógico que el de que sus proposiciones no estén de acuerdo con la manera como naturalmente pensamos. Si a alguien sin instrucción se le enseñan los rudimentos de las matemáticas con el mayor rigor lógico, lo encontrará generalmente muy antinatural debido precisamente a dicho rigor. Un profesor juicioso renunciará de antemano a ese rigor y luego procurará introducir la necesidad de ser rigurosos poco a poco. También

en la historia de las matemáticas hallamos que el mayor rigor viene hacia el final y que, en consecuencia, el rigor está lo más alejado de lo natural. Pretender exponer el decurso natural del pensamiento nos desvía por completo de la lógica. Si el lógico quisiera tomar en cuenta la objeción de que lo que dice no se ajusta a lo natural, correría el peligro de meterse en interminables disputas sobre lo que es natural, objeto de controversia sobre el que la lógica no puede decidir absolutamente nada y que, de hecho, no pertenece en absoluto a la lógica. Para ello necesitaríamos seguramente recurrir a la observación de los pueblos primitivos.

Hay que cuidarse especialmente de la opinión de que la tarea de la lógica es investigar cómo pensamos y juzgamos de hecho cuando lo hacemos de acuerdo con las leyes de la verdad. Si ese fuese el caso, tendríamos constantemente un ojo en una cosa y otro en otra y continuaríamos teniendo la atención en ésta cuando miramos de reojo a aquélla y el resultado fácilmente sería perder de vista un objetivo determinado. Esto nos induciría a formular preguntas imprecisas y resultaría imposible llegar a un resultado satisfactorio en nuestra investigación.

Lo que a menudo se llaman "leyes del pensamiento", es decir, leyes según las cuales, al menos en casos normales, se conduce el juicio, no pueden ser más que leyes para tomar algo por verdadero y no leyes de la verdad. Quien toma algo como verdadero, y seguramente los lógicos psicologistas tendrán al menos sus propios enunciados por verdaderos, reconoce por ello mismo que hay tal cosa como el ser verdadero. Pero entonces es muy probable que también haya leyes de la verdad y, si las hay, éstas tienen que proveernos la norma para tomar algo por verdadero. Y ésas son las auténticas leyes lógicas. En el suplemento no. 26 del año 1897 de la revista *Allgemeine Zeitung*, Th. Achelis escribe lo siguiente en un ensayo titulado "Volkerkunde und Philosophie" ["Etnología y filosofía"]:*

> Pero ahora tenemos claro que las normas válidas que valen en general para el pensamiento y la acción no pueden obtenerse por un proceso de abstracción puramente deductiva, sino que lo que se requiere es una determinación empírico-crítica de los principios objetivos de nuestra organización psicofísica válidos en todo momento para la consciencia de todo ser humano.

*Recensión del libro de Alfred Vierkandt: *Naturvölker und Kulturvölker, ein Beitrag zur Sozialphilosophie* (Leipzig, 1896). El suplemento apareció el 3 de febrero. [N. del t.]

No está tan claro si se trata de leyes de acuerdo con las cuales juzgamos de hecho, o más bien leyes de acuerdo con las cuales deberíamos juzgar. Parece que se trata de ambas. Es decir, que las leyes de acuerdo con las cuales hacemos juicios se usan luego como normas de cómo debemos juzgar. Pero ¿para qué tenemos que hacer esto? ¿No se ajusta el juicio por sí mismo a estas leyes? ¡No! No automáticamente, sí normalmente, pero no siempre. Se trata además de leyes que tienen excepciones, pero esas excepciones a su vez están reguladas por leyes. De modo que las leyes que ahora se formulan no son todas las leyes. ¿Por qué entonces separar una parte del conjunto total de leyes y presentarlas como normas? Es como si quisiéramos presentar como normas las leyes de Kepler del movimiento de los planetas y luego descubriésemos que los planetas, en su testarudez, no se comportan estrictamente como dicen esas leyes, sino que, como niños traviesos, se molestan unos a otros. Tal conducta debería, pues, ser reprendida con severidad.

Vista así la cosa, tendremos que tomar todas las precauciones para apartarnos de la senda que ha tomado la gran mayoría. Tenemos incluso que desconfiar de los grandes genios, pues si éstos fueran normales, serían mediocres.

En la concepción psicológica de la lógica se nos escapa la diferencia entre las razones que justifican una convicción y las causas que la provocan. En tal caso, una auténtica justificación [de la convicción] es imposible. En su lugar tenemos una historia de cómo se llegó a tal convicción, de lo que se desprende que todo ha tenido su causa psicológica. De este modo, se ponen en el mismo nivel una superstición y un conocimiento científico.

Cuando se toman las leyes lógicas como psicológicas, uno se siente fácilmente inclinado a preguntar si dichas leyes son o no cambiantes, como le sucede a la gramática de una lengua, que puede cambiar con el tiempo. Y esta posibilidad es verdaderamente ineludible si sostenemos que la autoridad de

las leyes lógicas se deriva del mismo modo que la de las leyes gramaticales, si son leyes sólo porque rara vez nos desviamos de ellas y porque el juicio que discurre de acuerdo con ellas es tan normal como el caminar derecho. Del mismo modo que para nuestros ancestros pudo en algún momento no haber sido normal caminar derechos, así para el pensamiento pudo ser normal algo que ahora no lo es y podría ocurrir que algo que ahora es anormal pueda volverse normal en el futuro. De manera similar a como ocurre con una lengua que todavía no está fijada, es decir, una lengua en la que resulta poco fiable nuestra sensibilidad idiomática respecto de algunos puntos de la gramática, así tendría que ocurrir con las leyes lógicas cuando nos encontramos en un periodo de transición. Podríamos, por ejemplo, vacilar con respecto a si es correcto pensar que todo objeto es idéntico a sí mismo. Si ése fuera el caso, no podríamos hablar con propiedad de leyes lógicas, sino sólo de reglas lógicas que expresan lo que en un momento dado es considerado normal. No podríamos formular esa regla así: "Todo objeto es idéntico a sí mismo", ya que aquí no se hace mención de la clase de seres para quienes esto resulta válido, sino que más bien deberíamos decir algo como lo siguiente: "Para los seres humanos, con la posible excepción de ciertos hombres primitivos que aún no han investigado la cuestión, es normal juzgar que todo objeto es idéntico a sí mismo." Pero si hay leyes, aun si son psicológicas, tendrán que ser siempre verdaderas, como hemos visto, o, mejor aún, tendrán que ser atemporales, si es que son verdaderas. Tengamos en cuenta que si una ley deja de valer en un determinado momento, deberíamos decir que es completamente falsa. Lo que sí podríamos hacer, sin embargo, es intentar descubrir una condición que pudiera ser añadida a la ley. Supongamos por un momento que el juicio humano se adecuara por un cierto periodo de tiempo al principio de que todo objeto es idéntico a sí mismo, pero que después dejara de adecuarse a él. En tal caso, la causa podría ser, por ejemplo, que el contenido de fósforo del córtex cerebral en los seres humanos hubiese cambiado, de modo que tuviéramos que decir algo como: "Cuando el contenido de fósforo del córtex cerebral no supera el 4 %, su juicio concordará con la ley de que todo objeto es idéntico a sí mismo."

Leyes psicológicas que se refieran de este modo a la composición química o a la constitución anatómica del cerebro son por lo menos pensables. En el caso de las leyes lógicas, por el contrario, algo semejante sería del todo absurdo, pues en ellas no se trata en absoluto de lo que uno u otro sujeto toma por verdadero, sino de lo que es verdadero. Que alguien crea que "$2 \times 2 = 4$" es verdadero, o que es falso, puede muy bien depender de la constitución química de su cerebro, pero que tal pensamiento sea verdadero o falso no puede depender de eso. Análogamente, el que sea verdad que Julio César fue asesinado por Bruto no puede en absoluto depender de la constitución cerebral del profesor Mommsen.*

De cuando en cuando se plantea la cuestión de si las leyes lógicas pueden cambiar con el tiempo. Las leyes que rigen la verdad, como todos los pensamientos, son siempre verdaderas, si es que realmente son verdaderas. No pueden, por consiguiente, contener una condición que a veces se cumple, a veces no, ya que se trata de la verdad de pensamientos que, cuando son verdaderos, son verdaderos en todo momento. Si en cierto momento la verdad de un pensamiento se sigue de la verdad de otro, entonces siempre tiene que seguirse.

Permítasenos resumir brevemente las conclusiones a las que hemos llegado acerca de los pensamientos (propiamente dichos).

Los pensamientos [*Gedanken*], a diferencia de las representaciones [*Vorstellungen*], no pertenecen a una mente individual (no son subjetivos), sino que son independientes de nuestra mente y se nos hacen presentes a cada uno de la misma manera (objetiva); no son producidos [*gemacht*] por la mente, sino que son captados [*erfasst*] por ella. En esto son parecidos a los cuerpos físicos. Se distinguen de estos últimos en que no son espaciales ni en esencia temporales, como podría en verdad decirse, al menos en tanto que nada podría alterar su naturaleza intrínseca. En lo que respecta a su carácter no espacial, son semejantes a las representaciones.

Del carácter no mental de los pensamientos se sigue que todo tratamiento psicológico de la lógica resulta pernicioso.

* Se refiere al historiador y filólogo Theodor Mommsen (1817-1903), autor de una célebre *Historia de Roma*. [N. del t.]

La tarea de la lógica es depurarse de todo lo que le es extraño, y por lo tanto de todo lo psicológico, y de liberar al pensamiento de las ataduras del lenguaje, señalando las imperfecciones lógicas de éste. La lógica trata de las leyes de la verdad, no de las leyes del tomar algo por verdadero; trata no de cómo los seres humanos piensan, sino de cómo tienen que pensar, si es que no han de apartarse de la verdad.

17 ORACIONES CLAVE SOBRE LÓGICA

[1906 o anterior]*

1. Las conexiones que constituyen la esencia del pensar [*Denken*] son de diferente naturaleza que las asociaciones de ideas [*Vorstellungsassociationen*].
2. La diferencia no estriba meramente en un pensamiento concomitante del que derive el carácter de la razón de la conexión.
3. En el pensar no se conectan propiamente ideas, sino cosas, propiedades, conceptos, relaciones.
4. El pensamiento [*Gedanke*] contiene siempre algo que va más allá del caso particular, razón por la cual se nos presenta como si cayese bajo algo general.
5. La expresión lingüística para el carácter propio del pensamiento es la cópula o la terminación personal del verbo.
6. Una señal externa para ver si la conexión es la propia del pensamiento puede constituirla el hecho de que, en su caso, la pregunta de si es verdadero o falso tiene sentido. En cambio, las asociaciones de ideas no son ni verdaderas ni falsas.

* Título original: "17 Kernsätze zur Logik", en Frege 1969, vol. I. De acuerdo con una nota de Heinrich Scholz, el manuscrito hay que datarlo en 1906. Podría haber formado parte de los planes de Frege para un libro de texto sobre lógica y, en tal caso, habría que datarlo bastante antes. Una razón adicional para atribuirle una fecha más temprana es que, de acuerdo con notas de editores anteriores a Scholz, fue encontrado junto al material preparatorio para el diálogo con Pünjer sobre existencia; también allí aparece el nombre de "Leo Sachse".

Traducción de Xavier de Donato.

7. Qué sea lo verdadero, lo tengo por algo indefinible.
8. La expresión lingüística de un pensamiento es una oración [*Satz*]. En un sentido derivado, se habla también de la verdad de una oración.
9. Una oración puede ser verdadera o falsa sólo en la medida en que expresa un pensamiento.
10. La oración "Leo Sachse es un hombre" es la expresión de un pensamiento sólo si "Leo Sachse" designa algo. De la misma forma, la oración "esta mesa es redonda" expresa un pensamiento sólo si la expresión "esta mesa" designa algo, no es un término vacuo.
11. "2 por 2 es 4" sigue siendo verdadero aun cuando, a consecuencia de la evolución darwinista, todos los hombres acabasen por afirmar que 2 por 2 es 5. Toda verdad es eterna e independiente de que sea pensada y de las condiciones psicológicas del que la piensa.
12. La lógica comienza con el reconocimiento de que existe una diferencia entre la verdad y la falsedad.
13. Un juicio se justifica o bien retrotrayéndose a verdades conocidas anteriormente, o bien sin utilizar otros juicios. Sólo el primer caso, el inferir, es objeto de la lógica.
14. Las teorías de los conceptos y del juicio no son más que una preparación para la teoría de la inferencia.
15. La tarea de la lógica es establecer las leyes por medio de las cuales un juicio se justifica a partir de otros, independientemente de si éstos son verdaderos o no.
16. La observancia de las leyes lógicas garantiza la verdad de un juicio sólo en la medida en que los juicios a partir de los cuales se justifica dicho juicio sean a su vez verdaderos.
17. Las leyes de la lógica no pueden justificarse mediante ninguna investigación psicológica.

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA (1906)

[Selección]*

La separación de la fuerza asertiva y el predicado

Se puede expresar un pensamiento sin afirmarlo. Pero falta en los lenguajes una palabra o signo cuya función sea simplemente afirmar algo. A esto se debe que incluso en obras de lógica se confunda, según parece, el predicar con el juzgar. No se sabe con certeza si lo que los lógicos llaman juicio ha de considerarse como un pensamiento solo, o acompañado del juicio de que es verdadero. Si nos atenemos a la expresión literal, deberíamos considerar que se trata de un pensamiento *con* el juicio; pero el uso del lenguaje es tal que con frecuencia no se incluye el acto auténtico de juzgar, el reconocimiento de la verdad de algo. *Uso la palabra "pensamiento" aproximadamente como los lógicos usan "juicio".* Pensar es captar pensamientos. Después de captar un pensamiento, se lo puede reconocer como verdadero (*juzgarlo*) y expresar dicho reconocimiento (*afirmarlo*). Hay que distinguir también entre fuerza asertiva y *negación*. A todo pensamiento le corresponde un opuesto, de modo que rechazar uno equivale a aceptar el otro. Se puede decir que juzgar es elegir entre opuestos. El rechazo de uno y la aceptación del otro son *una* misma acción. Por tanto, no se necesita para el

* El presente texto proviene de las notas diarias de Frege escritas entre el 5 y el 12 de agosto de 1906 y está recogido bajo el título *Einleitung in die Logik (August 1906)* en Frege 1969, vol. 1. Parte de este texto fue revisado más tarde por Frege y constituye el texto titulado "Kurze Übersicht meiner logischen Lehren" ["Breve sumario de mis doctrinas lógicas"], publicado también en Frege 1969, vol. 1.
Traducción de Xavier de Donato.

rechazo de un pensamiento un nombre o un signo especial. Se puede hablar de la negación antes de haber distinguido partes en el pensamiento. Discutir sobre si la negación pertenece al pensamiento completo o a la parte predicativa resulta tan estéril como discutir si un abrigo viste a un hombre que ya está vestido o si forma un todo con las demás prendas de vestir. El abrigo, al cubrir al hombre que ya está vestido, se une por ello mismo a las demás prendas de vestir. Metafóricamente hablando, el componente predicativo del pensamiento se puede considerar como una envoltura del componente que hace las veces de sujeto. Cualesquiera otras envolturas que se añadan se unirán por ese mismo hecho a los que ya estén allí.

El modo hipotético de composición de oraciones

Cuando se dice que en un juicio hipotético se interrelacionan dos juicios, la palabra "juicio" se usa de tal modo que no implica el reconocimiento de la verdad. Pues si se expresa la oración compuesta completa con fuerza asertiva, no se afirma la verdad del pensamiento en el antecedente ni la verdad del pensamiento en el consecuente. El reconocimiento de la verdad se extiende más bien al pensamiento expresado en la oración compuesta tomada como un todo; y en un examen más detallado, encontramos en muchos casos que el antecedente, tomado aisladamente, no expresa un pensamiento, ni tampoco el consecuente (no son oraciones propiamente dichas). En esos casos, lo que tenemos la mayoría de las veces es la relación de subordinación entre conceptos. Aquí es bastante común mezclar dos cosas que probablemente yo fui el primero en distinguir: la relación que designo con la barra de condición, y la generalidad. La primera corresponde aproximadamente a lo que los lógicos quieren decir con "una relación entre juicios". Esto es, el signo para la relación (*la barra de condición*) conecta oraciones propiamente dichas entre sí, de modo que cada una de ellas expresa un pensamiento.

Si hacemos a un lado los mitos y la ficción y consideramos sólo aquellos casos en los que se trata de la verdad en sentido científico, podemos decir que *todo pensamiento es verdadero o falso, tertium non datur.* No tiene sentido hablar de casos en los que un pensamiento es verdadero y de casos en los que es falso. El mismo pensamiento no puede ser unas veces verdadero y otras falso; en los casos en los que la gente habla de esta manera se trata siempre de pensamientos diferentes. Y la razón por la que se cree que es un mismo pensamiento es que se usan los mismos sonidos y esos sonidos no forman una oración propiamente dicha. No siempre se distingue suficientemente entre el signo y lo que éste expresa.

Si tenemos dos pensamientos, sólo son posibles cuatro casos:

1) el primero es verdadero e igualmente el segundo;
2) el primero es verdadero y el segundo falso;
3) el primero es falso y el segundo es verdadero;
4) ambos son falsos.

Si el *tercero* de estos casos *no* se da, entonces se da la relación que he designado por medio de la *barra de condición*. La oración que expresa el primer pensamiento es el consecuente, la que expresa el segundo es el antecedente. Han pasado casi veintiocho años desde que propuse esta definición. Creí entonces que bastaba mencionarla y que todos los demás sabrían más de ella que yo mismo. Ahora, después de transcurrido más de un cuarto de siglo, la gran mayoría de los matemáticos no tienen ni idea del asunto, y lo mismo puede decirse de los lógicos. ¡Qué estulticia! Cómo me recuerda este comportamiento de los académicos al del buey delante de una nueva puerta: mira con ojos bien abiertos, muge, trata de pasar por el lado, pero atravesarla podría ser peligroso. Puedo admitir que a primera vista resulta extraño, pero, si no lo fuera, se habría descubierto hace mucho tiempo. Pero, ¿tenemos que guiarnos siempre por la primera impresión que nos cause un asunto? ¿Acaso no tenemos tiempo para reflexionar? No, ¿pues qué cosas buenas podríamos descubrir al hacerlo? Probablemente la gente echa en falta una relación interna entre los pensamientos; nos resulta difícil de aceptar que sólo haya de tomarse en cuenta la verdad o falsedad de los pensamientos, que el contenido mismo no cuente en absoluto. Esto está relacionado con algo de lo que me percaté sobre el *sentido* y la *referencia*. Pues bien, si alguien intentase dar una explicación en la que el contenido del pensamiento desempeñe un papel más relevante, probablemente resultaría que o bien lo que se ha añadido del pensamiento es

totalmente superfluo y que lo único que se logra es enredar el asunto sin beneficio alguno, o bien que las oraciones (antecedente y consecuente) no son oraciones propiamente dichas, ninguna de las cuales expresa un pensamiento, de modo que en realidad no se han puesto en relación con pensamientos, como se pretendía, sino conceptos o relaciones. ¿La relación que designo con la barra de condición es una relación que puede darse entre pensamientos? ¡Realmente no! Lo único que podemos decir es que *el signo de esa relación* (esto es, la barra de condición) *conecta oraciones*. Posteriormente se completa la explicación de tal manera que mediante la barra de condición se permita conectar también *nombres de objetos*. Y esto entra aún menos en la cabeza. Para hacerlo aceptable, es preciso examinar con más precisión la generalidad.

Generalidad

Es en este punto donde surge la necesidad de *descomponer un pensamiento en partes*, ninguna de las cuales es un pensamiento. El caso más sencillo es la división de un pensamiento en dos partes. Las partes son heterogéneas: una es no saturada, la otra es saturada (completa). Los pensamientos que hay que considerar aquí son los que en la lógica tradicional se denominan juicios *singulares*. En ellos se afirma algo de un objeto. La oración que expresa un pensamiento tal está compuesta de un *nombre propio* —y éste corresponde a la parte completa del pensamiento— y una parte *predicativa*, que corresponde a la parte no saturada del pensamiento. Por cierto, estrictamente hablando, no es el pensamiento en sí el que es singular, sino que lo es sólo respecto de una posible manera de descomponerlo. Es posible que el mismo pensamiento, descompuesto de otra manera, aparezca como particular (Cristo convirtió a algunos hombres a su doctrina). Los nombres propios designan objetos, y un pensamiento singular es acerca de objetos. Pero no se puede decir que el objeto sea parte del pensamiento, así como el nombre propio es parte de la oración correspondiente. El Mont Blanc, con su nieve y sus glaciares, no es parte del pensamiento de que el Mont Blanc mide más de 4 000 metros; sólo podemos decir que al objeto le corresponde, en determinada manera que habremos de considerar, una parte del pen-

samiento (sentido y referencia). Mediante la descomposición de pensamientos singulares se obtienen componentes completos y componentes no saturados, que por supuesto no pueden aparecer en forma aislada, pero cualquier componente de un género con cualquier componente del otro género forma un pensamiento. Si se mantiene fija la parte no saturada y se varía la parte completa, sería de esperar que los pensamientos así formados fuesen en unos casos verdaderos y en otros falsos. Aunque también puede suceder que fuesen todos verdaderos. Por ejemplo, sea el componente no saturado lo que se expresa con las palabras "es idéntico a sí mismo". Esto es entonces una condición particular de la parte no saturada. Así, obtenemos un nuevo pensamiento (todo es idéntico a sí mismo) que, comparado con los pensamientos singulares (el dos es idéntico a sí mismo, la Luna es idéntica a sí misma), es general. Ciertamente, la palabra "todo", que ocupa aquí el lugar de un nombre propio ("la Luna"), no es ella misma un nombre propio, no designa un objeto, sino que sirve para conferir generalidad de contenido a la oración. A menudo influye demasiado el lenguaje en la lógica, y por ello la conceptografía es valiosa para liberarnos de las formas lingüísticas. En lugar de decir "la Luna es idéntica a sí misma" podemos decir también, sin modificar el pensamiento, "la Luna es idéntica a la Luna". De aquí se sigue que un nombre propio puede aparecer en uno o más lugares de una oración. Pero, al pasar a la oración general, es imposible lingüísticamente que la palabra "todo" aparezca también en dos lugares. La oración "todo es igual a todo" no tendría el sentido deseado. Se puede, en el terreno matemático, usar una letra y decir "*a* es idéntico a *a*". Esta letra ocupa entonces el lugar (o lugares) de un nombre propio; pero no es un nombre propio, no tiene referencia; sólo sirve para conferir generalidad al contenido de la oración. Este uso de letras, por ser más simple, y desde el punto de vista de la lógica más apropiado, ha de preferirse a los medios que el lenguaje nos proporciona para este propósito.

Si un todo consta de dos oraciones conectadas por "y", y cada una de las cuales expresa un pensamiento, entonces también podemos considerar que el sentido del todo consiste en un pensamiento, pues ese sentido es verdadero o falso; es de-

cir, verdadero si ambos pensamientos que lo componen son verdaderos, y falso en cualquier otro caso; esto es, cuando al menos uno de los dos pensamientos que lo componen es falso. Si llamamos al pensamiento del todo la conjunción de los dos pensamientos componentes, entonces la conjunción tiene también su pensamiento opuesto, como lo tiene cualquier pensamiento. Ahora está claro cuál es el opuesto de una conjunción del opuesto de un primer pensamiento con un segundo pensamiento. Es lo que yo expreso mediante la barra de condición. De nuevo, la oración [que expresa] el primer pensamiento es el consecuente, la [que expresa] el segundo es el antecedente. Pero a la oración completa que expresa el opuesto de la conjunción del opuesto del primer pensamiento con el segundo pensamiento la podemos llamar oración hipotética, cuyo consecuente es la oración que expresa el primer pensamiento y cuyo antecedente es la oración que expresa el segundo pensamiento. Llamaremos pensamiento hipotético al pensamiento expresado por una oración hipotética cuyo consecuente expresa el primer pensamiento y cuyo antecedente expresa el segundo pensamiento. Si el mismo nombre propio aparece tanto en el antecedente como en el consecuente, podemos considerar al pensamiento hipotético como un pensamiento singular con respecto a la descomposición en la cual la parte completa corresponde al nombre propio y el resto a la parte no saturada. Si ahora mantenemos fija la parte no saturada y variamos la parte completa, puede suceder que siempre obtengamos un pensamiento verdadero, sea cual fuere lo que elijamos para la parte completa. Aquí, como a lo largo de estas investigaciones, presuponemos que no estamos operando en el ámbito del mito y la ficción, sino en el de la verdad (en el sentido científico), de modo que todo nombre propio consigue efectivamente su objetivo, es decir, designar un objeto y que, por consiguiente, no es vacío. Las partes completas de los pensamientos de las que aquí se trata no son, ciertamente, los objetos mismos designados por los nombres propios, pero sí están conectadas con ellos; y es esencial que existan esos objetos si no ha de caer todo en el terreno de la ficción. De otra manera, no podremos hablar en absoluto de la verdad de los pensamientos. Supóngase que obtenemos siempre un pensamiento verdadero

en un caso dado cuando, como dijimos antes, mantenemos fija la parte no saturada en un pensamiento hipotético que puede considerarse a la vez como singular y utilizamos cualquier parte completa para la saturación. De esta manera, llegamos al pensamiento general, y el pensamiento hipotético singular del que partimos surge como un caso particular de aquél. Por ejemplo:

Primer pensamiento: que el cuadrado de 3 es mayor que 2

Segundo pensamiento: que 3 es mayor que 2

Opuesto del primer pensamiento: que el cuadrado de 3 no es mayor que 2

Conjunción del opuesto del primer pensamiento con el segundo pensamiento: que el cuadrado de 3 no es mayor que 2 y que 3 es mayor que 2.

Opuesto de la conjunción del opuesto del primer pensamiento con el segundo pensamiento: que es falso que al mismo tiempo el cuadrado de 3 no es mayor que 2 y que 3 es mayor que 2.

Éste es el pensamiento hipotético cuya consecuencia es el primer pensamiento y cuya condición es el segundo pensamiento. La expresión "Si 3 es mayor que 2, entonces el cuadrado de 3 es mayor que 2" tiene algo de chocante, y más todavía la expresión que resulta de sustituir el "3" por un "2": "Si 2 es mayor que 2, entonces el cuadrado de 2 es mayor que 2". Pero que es falso que al mismo tiempo el cuadrado de 2 no es mayor que 2 y que 2 es mayor que 2, es un pensamiento verdadero. Así, se puede poner un número cualquiera en lugar de 3 y siempre obtendremos un pensamiento verdadero. Pero, ¿qué pasa si ponemos un objeto que no sea un número? Cualquier oración que se obtenga a partir de "*a* es mayor que 2" poniendo el nombre propio de un objeto en lugar de "*a*", expresa un pensamiento y ese pensamiento es siempre falso si el objeto no es un número. La cosa es diferente en el caso de la primera oración, porque la expresión que resulta cuando se pone el nombre propio de un objeto en lugar de *a* en "el cuadrado de *a*" sólo designará en el discurso habitual un objeto si ese objeto es un número. La

culpa de esto es la incompleción de la definición usual de "cuadrado". Este defecto puede subsanarse si se estipula que por el cuadrado de un objeto hemos de entender el objeto mismo si éste no es un número, pero que "el cuadrado de un número" ha de entenderse siempre en el sentido aritmético. Entonces, si en lugar de *a* ponemos el nombre propio de un objeto que no es un número, obtendremos a partir del esquema "el cuadrado de *a* es mayor que 2" una oración que expresa siempre un pensamiento falso. Una vez hecha esta estipulación, podemos poner en la oración hipotética de nuestro ejemplo el nombre propio de cualquier objeto en lugar del numeral "3" y obtendremos siempre una oración que expresa un pensamiento verdadero. De esta manera, el pensamiento general al que llegamos es, por lo tanto, también verdadero. Podríamos expresarlo de la siguiente manera: "Si algo es mayor que 2, entonces su cuadrado es mayor que 2" o, mejor aún: "Si *a* es mayor que 2, entonces el cuadrado de *a* es mayor que 2". Aquí la construcción con "si" parece ser la que mejor se ajusta al uso común. Pero ahora ya no tenemos dos pensamientos conectados. Si sustituimos la letra "*a*" por el nombre propio de un objeto, entonces la oración que obtenemos expresa un pensamiento que aparece como un caso particular del pensamiento general, y en ese caso particular tenemos dos pensamientos, presentes en el antecedente y el consecuente, además del pensamiento presente en la oración entera. Podemos captarlos separadamente. Pero no podemos continuar dividiendo la oración que expresa el pensamiento general sin convertir sus partes en sinsentidos. Pues la letra "*a*" confiere generalidad al contenido del todo, pero no a las oraciones que lo integran. La parte "*a* es mayor que 2" ya no expresa un pensamiento, ni verdadero ni falso, porque "*a*" ni designa un objeto como lo hace un nombre propio ni confiere a esa parte generalidad de contenido, en relación con esa parte no tiene ninguna función en absoluto, ni contribuye en nada a ella, como lo haría, por ejemplo, si le confiriera un sentido. Lo mismo vale para la otra parte: "el cuadrado de *a* es mayor que 2". La "*a*" de una parte remite a la "*a*" de la otra y precisamente por esta razón no podemos separar las cláusulas, pues si lo hiciéramos se destruiría por completo la contribución que "*a*" hace al sentido del todo, perdiéndose así su función. Del mismo modo, en latín una oración compuesta cuyas oraciones integrantes se introducen mediante "*quot*" y "*tot*" no se puede descomponer en esas oraciones sin convertirlas a ambas en sinsentidos. De una oración digo que no es *una oración propiamente dicha* cuando tiene la forma gramatical de una oración, pero no expresa un pensamiento, aunque pueda ser parte de una oración compuesta que expresa un pensamiento y de la que, por ello, pueda decirse que es una oración propiamente dicha. Por ende, en el caso de la oración general no se puede trazar la distinción que antes trazamos entre condición y consecuencia, puesto que el antecedente y el consecuente no son oraciones propiamente dichas que expresen un pensamiento. Ahora hablamos efectivamente como si la condición se satisficiera en unos casos y en otros no. Esto muestra a las claras que lo que aquí llamamos condición no es un pensamiento, ya que un pensamiento —dejando de lado como siempre el mito y la ficción— es solamente o verdadero o falso. No puede suceder que el mismo pensamiento sea unas veces verdadero y otras falso. Lo que tenemos en ese caso no es una oración propiamente dicha, aunque a partir de ella se pueden derivar oraciones genuinas, algunas de las cuales expresan pensamientos verdaderos y otras pensamientos falsos; pero esos pensamientos son distintos. Las letras que como nuestra "*a*" en el ejemplo sirven para conferir generalidad de contenido a una oración son, en virtud de esta finalidad, esencialmente diferentes de los nombres propios. Digo que un nombre propio designa (o refiere a) un objeto; "*a*" indica un objeto, no tiene referencia, no designa o no refiere a nada. Palabras como "algo" y "ello" desempeñan a menudo en el lenguaje ordinario el papel de las letras; pero en algunos casos las letras no parecen ser sustituibles en absoluto. El lenguaje es, en éste como en otros aspectos, defectuoso. Para discernir la estructura lógica es mejor usar letras que confiar en el lenguaje corriente. Consideremos ahora las oraciones, que no son oraciones propiamente dichas, de las que se compone nuestra oración general. Cada una de ellas contiene una letra. Si la sustituimos por el nombre propio de un objeto, obtenemos una oración propiamente dicha que estará compuesta manifiestamente del nombre propio y lo restante. Ese resto corresponde a la parte

no saturada del pensamiento y es también parte de la oración que no es una oración propiamente dicha. Así, cada una de esas oraciones componentes contiene, además de la letra, un componente que corresponde a la parte no saturada del pensamiento. Estas partes no saturadas de un pensamiento son a su vez partes de nuestro pensamiento general, pero necesitan de algún aglutinante que las una y las mantenga unidas; de la misma manera, dos partes completas de un pensamiento tampoco pueden mantenerse unidas sin algún tipo de aglutinante. Si expresamos el pensamiento general de nuestro ejemplo así: "Si a es mayor que 2, entonces a es algo cuyo cuadrado es mayor que 2", entonces las palabras "es algo cuyo cuadrado es mayor que 2" y "es mayor que 2" corresponden a las dos partes no saturadas del pensamiento a las que nos estábamos refiriendo. Pero, en este caso, el "es" tiene que tomarse como carente de fuerza asertiva. Lo que corresponde al aglutinante que las une son las palabras "si" y "entonces", la letra "a" y la posición de la palabra "es", primero inmediatamente después de "a" y luego después del "entonces". Sabemos, sin embargo, que este tipo de composición en realidad se efectúa negando, formando una conjunción, negando nuevamente y generalizando (*sic venia verbo*).

MIS IDEAS LÓGICAS BÁSICAS

[1915]*

Quizás el siguiente texto sirva a algunos como clave para comprender mis resultados

Cuando alguien reconoce algo como verdadero, está haciendo un juicio. Lo que reconoce como verdadero es un pensamiento. No se puede reconocer un pensamiento como verdadero si no se lo ha comprendido. Un pensamiento verdadero ya era verdadero antes de ser comprendido por alguien. El pensamiento no necesita de nadie como portador. El mismo pensamiento puede ser comprendido por muchas personas. El pensamiento que se reconoce como verdadero no se altera al hacer un juicio. Cuando se juzga algo, siempre se puede poner aparte el pensamiento reconocido como verdadero, y el acto de juzgar no forma parte de este último. La palabra "verdadero" no es un adjetivo en el sentido usual. Cuando a las palabras "el agua del mar" añado la palabra "salada" como predicado, construyo una oración que expresa un pensamiento. Reformulo la oración en su forma subordinada, "que el agua del mar es salada", para hacer más claro que estamos sólo ante la expresión de un pensamiento y no ante su afirmación. En lugar de esto podría yo dejar que un actor la dijera en el escenario, ya que sabemos que el actor en su papel habla sólo aparentemente con fuerza

* Según una nota de Heinrich Scholz acerca de las transcripciones en las que está basada la edición de Frege 1969, vol. 1, el texto que aquí traducimos dataría de 1915. Otra datación, aportada por editores anteriores, dice "De los años de la guerra (cara posterior)". [N. del t.]
Traducción de Xavier de Donato.

asertiva. Para comprender la oración es necesario conocer el sentido de las palabras "es salado", pues contribuye de forma esencial al pensamiento –en las meras palabras "el agua del mar" no tendríamos ninguna oración ni la expresión de ningún pensamiento–. Otra cosa completamente distinta ocurre con la palabra "verdadero". Cuando la añado como predicado a las palabras "que el agua del mar es salada", formo una oración, "Es verdadero que el agua del mar es salada", que expresa un pensamiento. Por la misma razón que antes, lo pongo en forma subordinada: "Que es verdadero que el agua del mar es salada". El pensamiento aquí expresado coincide con el sentido de la oración "que el agua del mar es salada". El sentido de la palabra "verdadero" no hace, pues, ninguna contribución esencial al pensamiento. Cuando afirmo "es verdadero que el agua del mar es salada" estoy afirmando lo mismo que cuando afirmo "el agua del mar es salada". De esta forma podemos reconocer que la afirmación no reside en la palabra "verdadero", sino en la fuerza asertiva con la cual es emitida la oración. Esto podría dar lugar a pensar que la palabra "verdadero" no tiene ningún sentido. Pero, si así fuera, la oración en la que figurara el predicado " verdadero" no tendría sentido. En consecuencia, sólo podemos decir que la palabra "verdadero" tiene sentido, pero que éste no contribuye al sentido de la oración en que figura.

Pero, precisamente por esta razón, parece esta palabra apropiada para hacer notar la esencia de la lógica. Cualquier otro adjetivo sería menos apropiado en virtud de su sentido particular. Así, parece que la palabra "verdadero" hace posible* lo imposible, esto es, consigue que lo que corresponde a la fuerza asertiva aparezca como si contribuyera al pensamiento. Y este intento, aunque frustrado o quizás precisamente por serlo, nos señala el carácter propio de la lógica, la cual parece en este punto radicalmente distinta de la ética o la estética. Pues la palabra "bello" indica la esencia de la estética, como "bueno" la de la "ética", en tanto que "verdadero" no hace más que un intento frustrado por indicar la esencia de la lógica, ya que aquello que concierne propiamente a la lógica no estriba en absoluto en la

* Otra versión del manuscrito dice "pretende [o quiere] hacer posible" en lugar de "hace posible". [N. del t.]

palabra "verdadero", sino en la fuerza asertiva con la que la oración es proferida.

Algunas cosas que, como la negación o la generalidad, acompañan al pensamiento, parecen estar más íntimamente relacionadas con la fuerza asertiva o la verdad.* El engaño desaparece en tanto las veamos ocurrir sin fuerza asertiva, por ejemplo, en oraciones condicionales o en boca de un actor como parte de su papel.

Ahora bien, puesto que parece estar vacía de contenido, ¿por qué no podemos prescindir de esta palabra, "verdadero"? ¿No podríamos al menos en el campo de la lógica evitar esta palabra, que sólo puede sembrar confusión? El que no podamos hacerlo radica en la imperfección del lenguaje. Si tuviésemos un lenguaje lógicamente más perfecto, no necesitaríamos de ninguna lógica o podríamos leerla directamente en el lenguaje. Pero estamos muy lejos de ello. En gran parte, la tarea de la lógica consiste precisamente en una lucha con las carencias lógicas del lenguaje, el cual, no obstante, es indudablemente una herramienta imprescindible. Pero sólo después del cumplimiento de nuestra tarea lógica podremos tener una herramienta más perfecta.

Lo que más claramente indica la esencia de la lógica es la fuerza asertiva con la que se profiere una oración. Pero la fuerza asertiva no corresponde ni a una palabra ni a una parte de la oración; la misma serie de palabras puede ser proferida en una ocasión con fuerza asertiva, sin ella en otra ocasión. En el lenguaje, la fuerza asertiva está ligada con el predicado.

* Los editores de Frege 1969, vol. 1, señalan que esta frase y la siguiente están tachadas en el manuscrito. [N. del t.]

PARTE II

SEMÁNTICA

CONTENIDOS:

INTRODUCCIÓN A LA PARTE II: SEMÁNTICA

SENTIDOS Y PENSAMIENTOS

por MAITE EZCURDIA

La influencia más grande de Frege en la filosofía actual proviene de su trabajo sobre el lenguaje natural, a pesar de no haber sido éste su principal objeto de estudio. Su interés principal fue el desarrollo de una lógica que rija sobre nuestro pensamiento que permita, en particular, identificar los razonamientos válidos y ampliar nuestro conocimiento por medio de inferencias que conduzcan sólo a verdades. Sin embargo, según Frege, el estudio del pensamiento no puede darse sin estudiar el lenguaje porque el pensamiento no es algo que pueda examinarse directamente sino que se presenta "envuelto en una forma lingüística perceptible" (Frege 1918–1919, p. 332 n).

En la *Conceptografía* (1879) el interés de Frege por desarrollar una lógica lo conduce a adoptar una concepción particular de los significados de ciertas expresiones del lenguaje. Y su examen sobre razonamientos matemáticos en "Función y concepto" (1891) encamina su propuesta novedosa sobre los significados de las expresiones del lenguaje natural. Sin embargo, es a partir de "Sobre sentido y referencia", artículo publicado en 1892, que su propuesta sobre los significados del lenguaje está más claramente motivada por cómo funciona el lenguaje natural. Es en este artículo, así como en "El pensamiento. Una investigación lógica" (1918–1919) y en "Investigaciones lógicas. Parte Tres: Composición de pensamientos" (1923) donde encontramos las ideas de Frege que han tenido mayor influencia en la filosofía del lenguaje contemporánea.

Hay numerosas contribuciones de Frege sobre el lenguaje cuya motivación se encuentra en cuestiones metafísicas o en

cuestiones lógicas. Éstas no son de mi interés aquí. Más bien mi interés radica en las contribuciones de Frege cuya motivación se deriva del estudio del propio lenguaje. Examinaré tres ideas suyas que considero centrales a la filosofía del lenguaje. La primera es su argumento para introducir sentidos, la segunda es la naturaleza de los sentidos y la tercera sus observaciones sobre las expresiones deícticas y lo que éstas expresan.[1] Mi objetivo es presentar un panorama crítico de las ideas de Frege, señalar algunos retos a su teoría y mostrar cómo algunas de sus propuestas incursionan en el estudio filosófico de la mente.

1. *Las oraciones de identidad*

La semántica clásica de Frege se distingue por reconocer dos niveles de significado para todas las expresiones significativas del lenguaje: el sentido y la referencia. Para Frege, las expresiones del lenguaje pueden dividirse en dos tipos. Por un lado, están lo que él llama *Nombres Propios*[2] y que incluyen los nombres propios gramaticales ("México", "Cicerón", "Héspero", etc.), los deícticos[3] ("yo", "hoy", "esto", etc.), las descripciones definidas singulares (expresiones de la forma **el F** o **la F**), y las oraciones declarativas. Por el otro lado, están los *Nombres de Función*, los cuales incluyen expresiones predicativas como "es calvo", "es mexicano", "es tío de", "es mayor que", etc. La diferencia entre estos dos tipos de expresiones radica en su referencia. Los Nombres Propios refieren a objetos, entidades que Frege consideraba saturadas o completas, mientras que los Nombres de Función refieren a funciones,[4] que Frege consideraba entidades incompletas.

[1] Algunas ideas expresadas aquí se desarrollan con mayor detalle en Ezcurdia 1994, 1995, 1997 y 2003.

[2] Uso mayúsculas para indicar el uso peculiar que da Frege a ciertas expresiones. Así, "Nombre Propio", "Pensamiento" y "Representación" significan las nociones fregeanas correspondientes y no la categoría gramatical de nombre propio o las nociones intuitivas de pensamiento y representación.

[3] En la bibliografía filosófica contemporánea, se ha adoptado también el término "indéxico" para hablar de estas expresiones.

[4] Entre las funciones están los conceptos, los cuales son funciones que van de un argumento a un valor de verdad. "Ser tío de" nombra una función pero no un concepto, pues requiere dos argumentos para obtener un valor de verdad, pero "ser mexicano" sólo requiere uno por lo cual nombra un concepto.

La clasificación de Frege es controversial por varias razones. Primero, no es claro que todo lo que él llama "Nombre Propio" siempre refiera a objetos y no a sucesos o estados de cosas. Segundo, para Frege las oraciones declarativas son Nombres Propios que refieren a valores de verdad, lo Verdadero y lo Falso, los cuales según él son objetos, algo difícil de aceptar.

Hoy en día se rechaza de entrada la caracterización sintáctica y semántica que Frege ofrece de las expresiones del lenguaje,[5] pero se acepta que un argumento suyo merece atención y discusión. Éste pretende mostrar que la referencia de las expresiones no agota su significado y que se requiere la categoría semántica de *sentido*. El argumento está presente en las primeras páginas de "Sobre sentido y referencia" y concierne a las oraciones de identidad, en particular, oraciones verdaderas de la forma **a** = **a** y **a** = **b**. Tyler Burge lo formula en términos de lo que él denomina "la paradoja de la identidad" y lo expone en el siguiente pasaje:

> La "paradoja" de la identidad dice que, si bien el enunciado de la forma **a** = **a** no es informativo, un enunciado de la forma **a** = **b** puede tener una importancia empírica considerable; pero "*a*" y "*b*" son términos singulares que refieren al mismo objeto; luego la diferencia en los enunciados debe ir más allá de aquello a lo que ellos refieren. La diferencia está en el modo en que el objeto denotado es presentado a un pensador mediante los términos singulares "*a*" y "*b*". Y Frege contaba esa diferencia como una diferencia en sentido. (Burge 1977, p. 354. La traducción es mía.)

Según esta versión del argumento de Frege, el contraste en informatividad entre oraciones de la forma **a** = **a** y oraciones de la forma **a** = **b** no puede capturarse si lo que expresan estas oraciones concierne exclusivamente a la referencia de los signos. En caso de ser así, oraciones de ambas formas —si son verdaderas— expresarían lo mismo, a saber, la identidad de un

[5] Cabe observar aquí que los argumentos de Russell 1905 y su teoría de las descripciones definidas, así como los argumentos de Kripke 1980, han puesto en duda que las descripciones definidas se puedan tratar semánticamente de la misma manera que los nombres propios gramaticales y que los deícticos.

objeto consigo mismo. De esto se sigue –continúa esta versión del argumento– que, para dar cuenta de la diferencia en informatividad o valor cognoscitivo entre oraciones de estas formas, se necesita recurrir a los sentidos, esto es, a los modos en los que los objetos nombrados se presentan a los sujetos.

No sólo Burge, sino muchos han asumido que éste es el argumento de Frege para introducir la categoría semántica de sentido y es este argumento (o versiones semejantes) que los defensores de semánticas de un solo nivel (teorías que toman a la referencia como el único significado de un nombre) han atacado.[6] Sin embargo, creo que esta asunción es equivocada. Si fuese correcta, dejaría sin explicación mucho de lo que dice Frege en "Sobre sentido y referencia". Dejaría en particular sin explicación por qué Frege afirma que la explicación que dio de las oraciones de identidad en su *Conceptografía* es equivocada. Creo que el argumento de Frege es más sutil y que para comprenderlo cabalmente debemos revisar la explicación de las oraciones de identidad en la *Conceptografía*.

El objetivo de Frege en su *Conceptografía* era desarrollar un lenguaje formalizado para obtener leyes de inferencia válida. Con esto en mente revisó el funcionamiento de formas lingüísticas como la negación ("no es cierto que…"), el condicional ("si… entonces…") y las oraciones de identidad. Según él, la negación y el condicional conciernen u operan sobre los significados de las oraciones. Al afirmar

1. No es cierto que los persas derrotaron a los griegos en Platea,

la negación opera sobre el significado de la oración "Los persas derrotaron a los griegos en Platea" y no sobre la oración misma. En otras palabras, lo que se niega no es la secuencia de signos sino lo que esos símbolos expresan. Para el Frege de la *Conceptografía*, lo que expresan los signos es lo que él llama "un contenido conceptual". Frege dice poco acerca de qué son los contenidos conceptuales. Dice que los contenidos conceptuales son juzgables, esto es, que se pueden juzgar como verdaderos o falsos. Y afirma que dos oraciones tienen

[6] Por ejemplo, Millikan 1991, Salmon 1986, Soames 2002.

el mismo contenido conceptual si y sólo si son lógicamente equivalentes, esto es, si y sólo si siempre puede sustituirse una oración por otra sin alterar el valor de verdad de la oración completa. Así, dado que en cualquier oración (incluida la oración 1 más arriba) podemos sustituir "Los persas derrotaron a los griegos en Platea" por "Los griegos fueron derrotados por los persas en Platea" sin alterar su valor de verdad, estas dos oraciones tienen el mismo contenido conceptual, un contenido que podemos juzgar como verdadero o falso.

Si bien la negación y el condicional operan sobre los contenidos conceptuales de oraciones, Frege recalcó en su *Conceptografía* que esto no era así en el caso de las oraciones de identidad. El signo de identidad "=", según Frege, no relaciona contenidos, sino los signos mismos, de suerte que oraciones de identidad como 2 y 3:

2. Doroteo Arango es Pancho Villa,
3. Doroteo Arango es Doroteo Arango,

no expresan una relación de identidad entre el contenido de los nombres. Si lo hicieran, tendrían el mismo contenido conceptual: las dos expresarían una relación de identidad de una persona consigo misma. No habría en este caso diferencia entre el juicio de que Doroteo Arango es Doroteo Arango y el de que Doroteo Arango es Pancho Villa o, de forma más general, no habría diferencia entre juzgar que $a = b$ y juzgar que $a = a$ (cuando a de hecho es b). Además, todas las afirmaciones que se hicieran con oraciones de identidad que fuesen verdaderas serían triviales. No obstante, Frege advierte que esto no siempre es así. En su *Conceptografía* afirma que oraciones de la forma $\mathbf{a} = \mathbf{a}$ difieren de oraciones (verdaderas) de la forma $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ en que las primeras son analíticas (esto es, verdaderas en virtud sólo de su significado) pero las segundas no, y en que las primeras no amplían nuestro conocimiento pero las segundas sí. La solución que ofrece es sostener que las oraciones de identidad expresan una relación entre los signos mismos, a saber, la relación de tener el mismo contenido. Así, las oraciones de identidad 2 y 3 expresan lo mismo que las oraciones 4 y 5, respectivamente:

4. "Doroteo Arango" tiene el mismo contenido que "Pancho Villa".
5. "Doroteo Arango" tiene el mismo contenido que "Doroteo Arango".

Sostener esto, empero, no es reducir las afirmaciones de oraciones de identidad a afirmaciones acerca de expresiones del lenguaje. Ciertamente, hay oraciones de identidad como "N.Y. es Nueva York" o "D.F. es el Distrito Federal" que tienen la forma **a** = **b** y que aportan sólo conocimiento lingüístico acerca de nombres y sus abreviaturas. Sin embargo, no todas las oraciones de esta forma hacen esto:

> nombres distintos para el mismo contenido no siempre son meramente una cuestión ociosa de forma, sino que conciernen al meollo del asunto cuando se conectan con diferentes *modos de determinación* del contenido. (Frege 1879, pp. 65-66. Las cursivas son mías.)*

Cuando la diferencia entre dos nombres que tienen el mismo contenido va de la mano de diferentes *modos de determinar* ese contenido, entonces, según Frege, las oraciones de identidad en las que figuran esos nombres pueden ampliar el conocimiento no lingüístico de quien las comprende.

Un modo de determinar un contenido es un modo *epistémico*, en particular, es un modo de *conocer* o *identificar* el contenido de una expresión. Por ejemplo, el individuo que es el contenido de "Pancho Villa" y "Doroteo Arango" puede conocerse o identificarse de varias maneras. Una de ellas es como el caudillo del estado de Chihuahua y comandante de la División del Norte durante la Revolución Mexicana, y está asociada con el nombre "Pancho Villa". Otra es como el niño que nació en el Rancho de la Coyotada, San Juan del Río, Durango, el 5 de junio de 1878, la cual está asociada con el nombre "Doroteo Arango". Para el Frege de la *Conceptografía*, cuando la diferencia en nombres va de la mano de una diferencia en modos de determinar un contenido –lo cual no sucede en casos de

*En las citas de textos de Frege, las páginas refieren a la versión en castellano incluida en este volumen.

abreviaturas–, entonces oraciones de la forma **a** = **b** pueden ser informativas.

Esta noción de manera de determinar un contenido, sugiero, no es otra que la noción de sentido de la que más tarde hablará explícitamente Frege (1891 y 1892) y, de hecho, el argumento para introducir el sentido en "Sobre sentido y referencia" está dirigido en gran medida a descartar la explicación de las oraciones de identidad de la *Conceptografía*. Para que esa explicación funcione necesita que, más allá de algunos casos especiales y bien identificados como los de abreviaturas, siempre haya una correlación uno a uno entre un nombre y un modo de determinación de la referencia, esto es, que a cada modo de determinación le corresponda un solo nombre, y viceversa. Después de todo, lo que explica por qué 2 es informativa o cognoscitivamente valiosa es que con "Doroteo Arango" está asociado un modo de determinar el contenido diferente del que está asociado con "Pancho Villa". Únicamente así se evita que estos dos nombres sólo sean dos formulaciones trivialmente diferentes semejantes a abreviaturas como "N.Y." y "Nueva York".

En "Sobre sentido y referencia", Frege muestra por qué no es cierto que sólo en casos muy específicos falla una correspondencia uno a uno entre los modos de determinación y los nombres. El problema tiene que ver con los nombres mismos:

> No se le puede prohibir a nadie tomar cualquier suceso u objeto producido arbitrariamente como signo para algo. (Frege 1892, p. 250)

Es parte de como funciona el lenguaje natural que cualquier individuo puede introducir un nombre para cualquier cosa. Supongamos que hacemos esto y que introducimos el nombre "Ta" estipulando que tiene la misma referencia que "Pancho Villa". La oración que se puede generar a partir de esta introducción, a saber, "Pancho Villa es Ta", tiene la forma **a** = **b**. ¿Amplía esta oración nuestro conocimiento? Es cierto que amplía nuestro conocimiento del lenguaje, pero no nuestro conocimiento no lingüístico y, específicamente, no nuestro conocimiento histórico de la Revolución Mexicana. Lo mismo sucede

en otras áreas de conocimiento. Asociados a los nombres "Héspero" y "Fósforo" hay dos maneras de determinar el planeta Venus por medio de la observación: correspondiente a "Héspero" está la manera de determinarlo como el objeto astronómico más luminoso visto *por la tarde*, y correspondiente a "Fósforo" está la manera de determinarlo como el objeto astronómico más luminoso visto *por la mañana*. Supongamos ahora que introducimos el nombre "Blah" estipulando que tiene la misma referencia que "Héspero".[7] La oración que se puede generar a partir de esta introducción, a saber, "Héspero es Blah", tiene la forma **a** = **b**. Pero el conocimiento que ampliamos cuando llegamos a saber que esta oración es verdadera no es nuestro conocimiento astronómico, sino sólo nuestro conocimiento lingüístico. En cambio quienes descubrieron que Héspero era Fósforo realizaron un descubrimiento *en astronomía*. Luego, una explicación adecuada de la diferencia entre oraciones de la forma **a** = **a** y oraciones de la forma **a** = **b** debe mostrar cómo oraciones de este tipo pueden ampliar nuestro conocimiento no lingüístico.

Sobre casos en los que se introduce un nombre arbitrariamente, Frege dice que no expresaríamos ningún conocimiento genuino y que "el valor cognoscitivo de $a = a$ sería esencialmente el mismo que el de $a = b$" (Frege 1892, p. 250). Pero, ¿por qué cree Frege que en casos como éstos no hay una diferencia en valor informativo o cognoscitivo entre oraciones de la forma **a** = **a** y oraciones de la forma **a** = **b**? La respuesta se puede entender mejor considerando la oración "Héspero es Blah". Sabemos que las oraciones 6 y 7:

6. Héspero es Héspero.
7. Fósforo es Fósforo.

no son informativas porque cualquiera que sepa usar la expresión "Héspero" y la expresión "Fósforo" para designar un cuerpo celeste sabrá que esas oraciones son verdaderas. Lo que sí puede resultar informativo para un hablante competente del lenguaje es la oración 8:

[7] Desarrollo con más detenimiento esta interpretación del argumento de Frege en Ezcurdia 1994 y lo propongo como el mejor argumento para introducir sentidos en Ezcurdia 2003.

8. Héspero es Fósforo.

¿Qué sucede con 9?

9. Héspero es Blah.

¿Es informativa para un hablante competente del lenguaje? ¿O el hablante competente del lenguaje puede saber que es verdadera simplemente con base en su conocimiento del lenguaje? Recordemos la manera en que se introdujo "Blah". Al introducirlo se estipuló que tenía la misma referencia que "Héspero", de suerte que cualquier hablante del lenguaje que sea competente sobre el nombre "Blah" sabrá que tiene la misma referencia que "Héspero". Pero si esto es así, entonces, a pesar de que la oración 9 tiene la forma **a** = **b**, no es informativa para el hablante competente en el lenguaje. Es en este sentido en que oraciones como 9 están a la par en su valor informativo que oraciones de la forma **a** = **a** (como 6 y 7).

El problema con la explicación de la *Conceptografía* es que no puede explicar por qué 8 puede ser informativa ofreciendo conocimiento astronómico nuevo, pero 9 no. Según ella, estas oraciones dicen lo mismo que 10 y 11, respectivamente:

10. "Héspero" tiene el mismo contenido que "Fósforo".
11. "Héspero" tiene el mismo contenido que "Blah".

Si sustituimos la noción de contenido por la de referencia en dicha explicación, 8 y 9 expresarían lo mismo que 12 y 13, respectivamente:

12. "Héspero" refiere a lo mismo que "Fósforo".
13. "Héspero" refiere a lo mismo que "Blah".

Luego, la explicación de la *Conceptografía* no distingue el caso 8 del caso 9, y no explica, por ende, por qué 8 es informativa para el hablante competente del lenguaje y por qué 9 no lo es. Ni permite explicar por qué el conocimiento que se puede obtener a partir de llegar a saber que 8 es verdadera es conocimiento en astronomía.

La solución de Frege, según mi interpretación de sus textos, radica en desvincular los nombres de los modos de determinar los objetos a los que refieren. La posibilidad de introducir en

cualquier momento un nombre estipulando que tiene la misma referencia que otro nombre muestra que no es cierto que en la mayoría de los casos, o en general, haya una conexión uno a uno entre los nombres y los modos de determinar los objetos a los que refieren. Y son estos modos de determinar la referencia los que indican el ámbito de conocimiento que está en juego y lo que explica la diferencia en valor informativo entre 8 y 9. Ambas oraciones hablan de cuestiones en astronomía, pero una es informativa y la otra no. Lo que dice 8 es que el objeto astronómico más luminoso observado por la tarde es el objeto astronómico más luminoso observado por la mañana. En cambio, 9 dice que el objeto astronómico más luminoso observado por la tarde es el objeto astronómico más luminoso observado por la tarde, y esto no es otra cosa que lo que dice 6. Luego, 8 es informativa, pero 9, al igual que 6, no lo es. Y la información que 8 imparte es en astronomía; en particular, informa sobre una identidad que para ser descubierta requirió de observación astronómica.

2. *¿Qué es un sentido?*

He sugerido que la noción de modo de determinación de la referencia introducida en la *Conceptografía* es la noción de sentido de "Sobre sentido y referencia" (1892). Sin embargo, lo común es seguir a Frege en este último trabajo y hablar de los sentidos en términos de modos de *presentación*. La noción de modo de presentar una entidad tiene un sesgo más psicológico que la de modo de determinar una referencia[8] pero, al igual que ésta, también es epistémica: es la manera en que una entidad le es presentada a un sujeto. Por ejemplo, la propiedad de Venus de ser el objeto astronómico más luminoso observado por la tarde, además de servir para determinar (identificar o conocer) a Venus, es un modo en que se le presenta Venus a un sujeto.

Sin embargo, Frege concibe la categoría de sentidos como algo esencialmente *semántico*, como parte del significado de una expresión. Para que pueda considerarse así el modo de determinar o presentar una entidad asociado con un nombre,

[8] Véase la discusión en Ezcurdia 1995.

debe realizar tareas propiamente semánticas. Hay al menos dos tareas que Frege le atribuye a los sentidos que los convierten en algo semántico. La primera tiene que ver con cómo un nombre obtiene su referencia y la segunda con la cuestión de la comprensión lingüística.

Si bien un modo de determinar la referencia de una expresión es para Frege algo esencialmente epistémico, es también lo que explica por qué un nombre refiere a un cierto objeto. "Héspero" refiere a Venus porque Venus, y no otro objeto, es el objeto astronómico más luminoso observado por la tarde; y "Fósforo" refiere a él porque Venus, y ninguna otra cosa, es el objeto astronómico más luminoso observado por la mañana. Pensar en un modo de determinar la referencia de esta forma es pensar en él como una *manera en que un nombre refiere*, algo que podría considerarse semántico.[9]

Comprender las expresiones de un lenguaje es saber lo que ellas significan, y viceversa. Para Frege, los hablantes conocen las referencias de las expresiones sólo mediante los modos en que se les presentan, por lo que el significado que explica la comprensión del lenguaje no es la referencia sino el sentido. Al ser lo que explica la comprensión lingüística y ser una manera de referir, el sentido puede tomarse como algo semántico y no meramente epistémico.[10]

Hasta ahora hemos identificado las siguientes características de los sentidos:

(a) Un sentido es un modo de presentar la referencia.
(b) Un sentido es un modo de determinar la referencia.

[9] Al concebir a los sentidos como modos de determinar la referencia, Dummett 1973 los concibió como procedimientos para identificar la referencia. Sin embargo, no estamos obligados a pensarlos así. En particular, el argumento de Frege expuesto en el apartado anterior puede construirse concibiendo a un modo de determinar la referencia simplemente como una manera de referir. Véase Ezcurdia 2003.

[10] No considero aquí cuestiones sobre comprensión parcial ni si Frege tiene razón en sus afirmaciones. Mi objetivo es presentar las razones en Frege para sostener que el sentido es algo semántico. Véase Kripke 1980 para argumentos en contra de la explicación de Frege de por qué refiere un nombre y de la idea de que al usar un nombre propio los hablantes tienen que conocer un sentido.

(c) Un sentido es un modo de referir a la referencia.[11]
(d) Comprender una expresión es conocer su sentido y viceversa.

Cabalmente entendidas, de las características (a), (b) y (c) podemos obtener una condición necesaria para cuando dos expresiones son sinónimas o tienen el mismo sentido –por ejemplo, expresiones como "Héspero" y "Blah" o como "oculista" y "doctor de los ojos"–. El criterio de igualdad de sentidos es el siguiente:

(CIS) Si una expresión e' tiene el mismo sentido que una expresión e'', entonces e' y e'' tienen la misma referencia.

Según (CIS), una condición necesaria para que dos expresiones tengan el mismo sentido es que tengan la misma referencia, pero la inversa no es correcta. Dos expresiones pueden tener la misma referencia y no expresar los mismos sentidos. Por esto existen oraciones de la forma **a** = **b** que pueden ser valiosas cognoscitivamente.

No obstante, hay un criterio para determinar cuándo dos oraciones expresan diferentes sentidos. Éste se obtiene de las características (a) y (d) y del argumento para introducir sentidos. El criterio se puede formular en términos de oraciones o en términos de los sentidos de las oraciones. (CDSO) lo expresa en términos de oraciones:

(CDSO) Si un hablante competente del lenguaje y racional puede creer que la oración O' es verdadera y al mismo tiempo no creer que O'' es verdadera, entonces O' y O'' expresan diferentes sentidos.

[11] Frege no distingue explícitamente entre (a), (b) y (c), pero creo que esto se debe a que para él la semántica está influida legítimamente por la epistemología. Hasta qué punto es legítimo dejar que cuestiones epistemológicas influyan en la construcción de teorías semánticas constituye un tema de discusión. Hay quienes creen que esto no es correcto (por ejemplo, Salmon 1986 y Soames 2002), y quienes creen que sí lo es. Ejemplos de los segundos incluyen a algunos defensores de semánticas bidimensionales como Chalmers 2000, y a quienes defienden una semántica neofregeana como McDowell 1977 y Evans 1981.

Un hablante competente del lenguaje que sea racional puede creer que "Héspero es Héspero" es verdadera pero no creer que "Héspero es Fósforo" es verdadera, por lo cual estas oraciones expresan diferentes sentidos.

Frege llama "Pensamiento" al sentido expresado por una oración declarativa, es decir, a la proposición expresada por una oración declarativa. Los Pensamientos son sentidos que están compuestos por los sentidos de las expresiones que ocurren en la oración, y sólo por esos sentidos. De hecho, Frege sostiene que el lenguaje es *composicional*, en particular, que el sentido de una expresión compleja está determinado por su estructura sintáctica y por los sentidos de las expresiones constituyentes.[12]

Los Pensamientos, además, son los portadores primarios de valores de verdad. El que ellos tengan un valor de verdad explica por qué una oración declarativa y por qué una creencia tienen valor de verdad. La primera lo tiene porque expresa un Pensamiento y la segunda porque su objeto o contenido es un Pensamiento. Así, si un Pensamiento es verdadero, tanto la oración que la expresa como la creencia que lo tiene como objeto son verdaderas. Dada la relación entre Pensamientos, oraciones y creencias, el criterio de diferencia de sentidos puede expresarse en términos de los Pensamientos, donde p' y p'' son Pensamientos:

(CDSP) Si un sujeto racional puede creer que p' y al mismo tiempo no creer que p'', entonces p' y p'' constituyen diferentes Pensamientos.

[12] Para Frege (Frege 1914?, pp. 317–319) la composicionalidad del lenguaje explica cómo es posible comprender oraciones que no hemos escuchado antes: obtenemos el sentido de una oración de los sentidos de las expresiones que la componen y de su estructura sintáctica.

Tal como he caracterizado la composicionalidad no se compromete con la idea de que los significados o sentidos de las palabras son más básicos que los de las oraciones. De esta forma es compatible con el *principio de contexto* de Frege (Frege 1884, sección 60), según el cual las palabras sólo tienen significado dentro de una oración. Para una presentación iluminadora sobre la discusión contemporánea acerca de la composicionalidad véase Szabó 2012.

El que un sujeto racional pueda creer que Héspero es Héspero pero no creer que Héspero es Fósforo muestra que dichas creencias tienen objetos o contenidos distintos; en particular, muestra que tienen como objeto Pensamientos distintos.

Los Pensamientos no sólo constituyen el contenido de las creencias sino de todas las demás actitudes proposicionales, esto es, de estados mentales cuyos objetos o contenidos se pueden notificar con oraciones declarativas, como las dudas, los deseos, algunas emociones, entre otros. Podemos ahora añadir a la lista de características de los sentidos lo siguiente:

(e) El sentido de una oración declarativa es un Pensamiento.
(f) Los constituyentes de un Pensamiento son sólo sentidos.
(g) Los Pensamientos son los objetos de las actitudes proposicionales.

Sostener (g) va de la mano con sostener que en las adscripciones de actitudes proposicionales no se puede sustituir una expresión por otra con la misma referencia pero diferente sentido sin alterar su valor de verdad. Por ejemplo, "Héspero" no se puede sustituir por "Fósforo" en 14 ya que ésta puede ser verdadera sin que 15 lo sea:

14. Pedro cree que Héspero es Héspero.
15. Pedro cree que Héspero es Fósforo.

Una manera de explicar esto es negar que el *principio de sustitución de términos correferenciales salva veritate* sea correcto. Según dicho principo, cualquier término puede ser sustituido por cualquier otro término que tenga la misma referencia sin alterar el valor de verdad de la oración. Así, en 16 puede sustituirse "Héspero" por "Fósforo" o por "Venus" sin alterar el valor de verdad de la oración:

16. Héspero es un planeta.

Un fregeano podría sostener que la falla de sustitución de "Héspero" por "Fósforo" en oraciones como 14 indican que el principio es incorrecto, y que en el caso de adscripciones de actitudes proposicionales los términos que ocurren en la cláusula

subordinada –la cláusula que comienza con "que"– sólo pueden sustituirse si, además de tener la misma referencia, tienen el mismo sentido. Esto se justificaría con base en (g).

Sin embargo, para Frege el principio de sustitución de términos correferenciales *salva veritate* es universalmente correcto. Según él, lo que sucede en casos como 14 es que las expresiones que ocurren en las cláusulas subordinadas no tienen su referencia ni su sentido habituales, esto es, no tienen la referencia ni el sentido que tienen en oraciones no subordinadas como 16. En 16, "Héspero" expresa su sentido habitual, a saber, el de ser el objeto astronómico más luminoso observado por la tarde, y tiene su referencia habitual, a saber, Venus. Pero en cláusulas subordinadas como en 14, "Héspero" refiere a su sentido habitual y expresa un sentido de segundo orden. En 14 "Héspero" refiere al modo de presentación *el objeto astronómico más luminoso observado por la tarde*. Dado que el sentido habitual de "Fósforo" es distinto del de "Héspero", de lo anterior se sigue que "Fósforo" no tendrá la misma referencia que "Héspero" al insertarse en una cláusula subordinada. Luego, la falla de sustitución de un nombre por otro no será, de acuerdo con Frege, porque violen el principio de sustitución *salva veritate*, sino simplemente porque en las adscripciones de actitudes proposicionales no son expresiones con la misma referencia.

Esta explicación de Frege no está libre de cuestionamientos. En primer lugar, Frege no dice exactamente cuál sería ese sentido de segundo orden de un nombre cuando ocurre en una cláusula subordinada. Segundo, tampoco parece correcto explicar las fallas de sustitución sosteniendo que los términos no tienen su referencia habitual. En algunos casos de adscripciones de actitudes proposicionales justamente necesitamos que las expresiones tengan su referencia habitual en las cláusulas subordinadas. Basten dos ejemplos para ilustrar esto.

El primer ejemplo tiene que ver con expresiones anafóricas. Un término t' usado *anafóricamente* obtiene su referencia de un término t'' que ocurre anteriormente en la oración o en el discurso. En 17, por ejemplo, el pronombre "él" es anafórico de "Juan".

17. Martha cree que Juan llegará tarde, pero él ya viene en camino.

Según la explicación de Frege de adscripciones de actitudes proposicionales, en 17 "Juan" no refiere a un objeto sino a su sentido habitual. Dado que "él" es anafórico de "Juan", para Frege, "él" referirá al sentido habitual de "Juan". Esto es claramente incorrecto, pues "ya viene en camino" no se está predicando de un sentido sino del individuo Juan. Luego, o bien el fenómeno lingüístico de la anáfora debe explicarse de otra manera o bien la explicación de Frege es incorrecta.

El segundo ejemplo se relaciona con términos deícticos, esto es, con expresiones que pueden cambiar de referencia con un cambio en el contexto en el que son usados. "Yo", "hoy", "aquí" son ejemplos de términos deícticos. Dado que la referencia de estos términos depende de cuándo, dónde y/o por quién son usados, muchas veces necesitamos hacer ajustes para que las adscripciones de actitudes proposicionales sean verdaderas. Supongamos que Pedro reporta la creencia de Juan usando, el 22 de abril, 2014, la oración 18:

18. Juan cree que mañana es el día del examen.

Supongamos ahora que Pedro quiere reportar la misma creencia de Juan el 23 de abril, 2014. No puede hacerlo usando nuevamente la oración 18. Más bien *está obligado* a cambiar el deíctico "mañana" que ocurre en la cláusula subordinada en 18 por otra expresión que tenga la misma referencia. Así, Pedro utilizaría "hoy" en vez de "mañana", como en 19, para reportar de manera exitosa la creencia de Juan:

19. Juan cree que hoy es el día del examen.

A primera vista, "hoy" y "mañana" presentan los días de diferente manera y, por tanto, expresan diferentes sentidos: "hoy" presenta un día como el día en curso y "mañana" como el día posterior al día en curso. Si "hoy" y "mañana" expresan diferentes sentidos, entonces no habrá garantía de que al sustituir un término por otro en las cláusulas subordinadas de adscripciones de actitudes proposicionales se preservará el valor de verdad. Pero casos como 18 y 19 muestran que, si bien hay fallas de sustitución de expresiones en adscripciones de actitudes proposicionales, también hay sustituciones *obligatorias* y

sistemáticas de expresiones con la misma referencia que aparentemente tienen diferente sentido.

Qué tanto sea ésta una objeción a la teoría de los sentidos depende de exactamente cuál es el sentido de un deíctico. Frege reconoce que hay sustituciones de deícticos que se deben hacer como lo ilustran los usos de las oraciones 18 y 19, pero sostiene que en estos casos "mañana" y "hoy" tienen el mismo sentido. Sobre esto volveré en el siguiente apartado, pero consideremos ahora cuáles son y cómo funcionan los sentidos de los nombres propios gramaticales ("Juan", "México", "Aristóteles", etcétera).

Según Frege, el lenguaje natural es defectuoso de varias maneras. Una de ellas es que a cada nombre propio no le corresponde un único sentido. Diferentes hablantes del lenguaje pueden asociar diferentes sentidos con el mismo nombre, o incluso un mismo hablante puede a través del tiempo asociar sentidos distintos con el mismo nombre. Por ejemplo, "Aristóteles" puede asociarse con el sentido de ser el alumno de Platón y maestro de Alejandro Magno o el de ser el maestro de Alejandro Magno nacido en Estagira (Frege 1892, p. 251 n.). Además, el lenguaje natural tiene nombres propios vacíos como "Pegaso", esto es, nombres que carecen de referente. Si bien el sentido de un nombre propio vacío es lo que explica que sea significativo para los hablantes, Frege muchas veces dice que los nombres que carecen de referente no tienen un sentido normal sino sólo un sentido *simulado*.[13] Un lenguaje lógicamente perfecto, según Frege, es uno en el que a cada expresión le correspondería siempre una (única) referencia y un solo sentido genuino, que no sea simulado.

Esta caracterización de Frege de los sentidos de los nombres propios ha generado múltiples discusiones que no tengo el espacio de examinar aquí. Baste mencionar, sin embargo, que si su caracterización es correcta, entonces surge un problema en el intercambio comunicativo. Dado (d) y (e), un hablante com-

[13] Si se piensa a los sentidos como modos de referir, un sentido simulado será algo que aparenta referir cuando en realidad no refiere a nada. De cualquier manera, no es claro que hablar de sentidos simulados sea adecuado como una explicación de los términos de ficción. Véanse Sainsbury 2009 y los ensayos en Everett y Hofweber 2000.

prende una oración al captar el Pensamiento expresado por ella. Pero si dos personas asocian diferentes sentidos con el nombre "Aristóteles" –algo que parecería ser muy común–,[14] el Pensamiento que el hablante expresa con una oración que lo contiene será diferente del que el oyente capta. Esto sugiere que las fallas de comprensión y, por ende, de comunicación, al usar oraciones con nombres propios serían mucho más comunes de lo que parece en un inicio ser el caso, algo que resulta un tanto inverosímil.

Finalmente, hay otra característica que Frege le atribuye a los sentidos y que tiene que ver con su estatus ontológico. De acuerdo con Frege, el sentido de una expresión es objetivo, a diferencia de una Representación [*Vorstellung*]. Una Representación para Frege incluye toda una gama de fenómenos mentales (Frege 1918–1919) como las impresiones sensoriales, los productos de la imaginación, las sensaciones, los sentimientos y los estados de ánimo, entre otros. Las Representaciones son privadas y subjetivas, esto es, dependen del sujeto que las tiene para existir y no pueden compartirse con otros.[15] Los sentidos, en tanto que son lo que expresan las oraciones y los términos de un lenguaje público, no son como las Representaciones. Según Frege, su existencia no depende de la mente de los individuos ni tampoco de un lenguaje. No depende del lenguaje, pues oraciones de diferentes lenguajes pueden expresar el mismo sentido. Por ejemplo, "That cat is on the mat" en inglés y "El gato está sobre el tapete" en español expresan el mismo sentido. Tampoco depende de la mente, pues en la comunicación exitosa lo que se transmite es precisamente el sentido. El hablante expresa un sentido y el oyente capta ese mismo sentido. Luego, los sentidos no son subjetivos como las Representaciones.

[14] Si bien Frege piensa que los sentidos de los nombres propios se pueden expresar en términos de descripciones definidas, neofregeanos como Evans 1981 y McDowell 1977 disputan que esto tenga que ser así. Por su parte, Kripke 1980 da buenos argumentos para pensar que los hablantes competentes no siempre asocian con un nombre propio un sentido que determine al referente.

[15] Para Frege, decir que dos personas tienen la misma sensación es decir que tienen una sensación del mismo tipo, ya que cada sensación depende del sujeto en la que ocurre para existir.

Pero tampoco son, para Frege, objetivos de la manera en que lo son los objetos físicos. Son objetivos en la medida que existen de forma *abstracta* en un "tercer reino", un ámbito distinto de lo físico y de lo subjetivo (Frege 1918–1919, p. 337). Luego, podemos añadir lo siguiente a la lista de características de los sentidos:

(h) Los sentidos son objetivos, a diferencia de las Representaciones, que son subjetivas.

¿Hasta qué punto tiene razón Frege en sostener que los sentidos son objetivos de la manera que él cree? Ciertamente, podríamos argumentar que los sentidos no son subjetivos ni privados, pero que no existen independientemente del lenguaje o de la mente humana en general, sino que son intersubjetivos. Alguien que sostenga esto no habrá por ello rechazado que los sentidos constituyan un nivel semántico ni habrá introducido una nueva noción de sentido. Esto muestra que considerar que los sentidos existen en un "tercer reino" no es esencial a aceptar la categoría de sentidos. Empero, si uno quiere sostener una teoría que reconozca a los sentidos como correspondiendo a un nivel semántico, deberá admitir, al menos, que los sentidos tienen las características (a)–(f) y que se rigen por los criterios (CIS), (CSO) y (CDP).

3. *Deícticos y pensamientos*

Hay dos afirmaciones en "El Pensamiento. Una investigación lógica" (1918–1919) acerca de los sentidos de los deícticos que resultan enigmáticas frente a la teoría general de los sentidos. La primera tiene que ver con lo que mencioné en el apartado anterior sobre la necesidad de cambiar un deíctico por otro cuando hay un cambio en el tiempo o lugar de uso. La segunda tiene que ver con el deíctico "yo". Examinemos una por una.

Frege escribe:

i. Si alguien quiere decir hoy lo mismo que expresó ayer usando la palabra "hoy", reemplazará esta palabra por "ayer". Aunque el pensamiento es el mismo, su expresión lingüística tiene que ser diferente para poder evitar

> el cambio de sentido que se produciría debido a la diferencia del tiempo en que se emite. Lo mismo se aplica a palabras como "aquí" y "allá". En todos estos casos no es el texto, tal como se lo podría conservar por escrito, la expresión completa del pensamiento, sino que para su correcta captación se necesita también el conocimiento de ciertas circunstancias que acompañan a la emisión, y que son utilizadas en ella como un medio para la expresión del pensamiento. (Frege 1918–1919, p. 330)

La tensión que surge de (i) proviene de las características (a), (b) y (c) de los sentidos. A primera vista, "hoy" y "ayer" presentan, determinan y refieren a un día de diferente manera: el primero lo hace como el día en curso, y el segundo como el día anterior al día en curso. Si (i) es correcto, ciertos usos de "hoy" y "ayer" pueden expresar el mismo sentido, pero ¿cuál es el modo de presentación, de determinar y de referir que comparten? Aunque la respuesta no es nada evidente, sí podemos entrever por qué Frege afirma (i). Consideremos las oraciones:

20. Mañana inician las vacaciones.
21. Hoy inician las vacaciones.
22. Ayer iniciaron las vacaciones.

Creer lo que dice 20 el 5 de julio de 2014, lo que dice 21 el 6 de julio de 2014, y lo que dice 22 el 7 de julio de 2014, es creer lo mismo en cada uno de esos días. Dado que los Pensamientos son los objetos de las creencias, 20–22 usadas en días consecutivos expresarán el mismo Pensamiento y, por ende, los deícticos que figuran en ellas expresarán el mismo sentido.

Evans (1981, 1982) toma a los sentidos como *modos de pensar* una referencia y sugiere que el modo de pensar que se comparte en casos como éste es la posesión de una habilidad para rastrear un referente a través del tiempo o del espacio. El sujeto que cree lo que dicen 20–22 en días consecutivos está ejercitando una habilidad cognitiva para rastrear el mismo día a través del tiempo, y ese día se piensa como el mismo día a través del tiempo. De acuerdo con Evans, esta habilidad es lo que constituye el sentido que comparten "mañana", "hoy" y "ayer". Si bien esta sugerencia es sólida para esclarecer lo que pasa a nivel psicológico en un sujeto,[16] no es claro cómo puede respetar la idea de que los sentidos pertenecen a la semántica del lenguaje natural.[17]

Como ya he dicho, los deícticos son expresiones que pueden cambiar de referencia con un cambio de contexto. Lo que hace posible esto es cierto significado del deíctico que es estable a través de todos sus usos. Dicho significado dicta cuándo hay un cambio de referencia y cuál es el referente en cada contexto. Por ejemplo, "hoy" cambia de referente siempre y cuando se use en días distintos porque el significado estable de "hoy" determina que refiere al día en curso. Pero, además, conocer el significado estable de un deíctico es lo que vuelve a un hablante competente en su uso. Quien asocie con "hoy" ser el día anterior al día en curso simplemente no es competente en su uso. Siguiendo la tradición, llamaré a este significado "el *significado lingüístico* de un deíctico".[18]

Hay dos problemas aquí para Frege y, en general, los defensores de los sentidos fregeanos. El primero es que no pueden capturar el significado lingüístico de los deícticos, un significado que explique el funcionamiento de los deícticos y la competencia de los hablantes en relación con los deícticos. El segundo es que si se modifica la teoría de los sentidos para capturar el significado lingüístico, entonces los sentidos parecen ser prescindibles en una semántica del lenguaje natural.

Aunque se podría decir que el significado lingüístico de un deíctico involucra un modo de referir o de determinar un objeto, ese modo no constituye un sentido, pues no satisface el criterio de igualdad de los sentidos (CIS). Según éste, si una expresión tiene el mismo sentido que otra, entonces tiene la misma referencia. Pero, dado que la referencia de un deíctico

[16] Aunque es sólida, no cuenta la historia completa de los sentidos presentes en procesos psicológicos. Incluso concediendo que el sujeto piensa un día como el mismo a través del tiempo, también lo piensa de diferentes maneras a través del tiempo: como el día posterior al día en curso, el día en curso, y el día anterior al día en curso.

[17] En Ezcurdia 1997 desarrollo con mayor detenimiento los problemas de convertir la propuesta de Evans en una teoría de la semántica de los deícticos.

[18] En la semántica kaplaniana, este nivel corresponde al carácter. Véanse Kaplan 1977 y 1981.

como "hoy" puede cambiar con un cambio de contexto, entonces, según (CIS), el sentido que expresa cuando se usa el 13 de julio de 2014 es diferente de cuando se usa el 14 de julio de 2014, y de cuando se usa en cualquier otro día. Luego, el significado lingüístico de "hoy" no cumple con uno de los criterios para ser un sentido.

La diferencia de fondo entre sentido y significado lingüístico es que el sentido de un deíctico determina por sí solo la referencia, pero el significado lingüístico la determina junto con el contexto. Frege se percató de que los deícticos requieren un contexto para referir, pero creía que el contexto determina el sentido y éste a su vez determina la referencia. En (i), Frege dice que para captar el sentido de una oración con un deíctico debemos conocer las circunstancias en que se ha usado la oración, circunstancias que sirven para determinar el sentido. Así, el contexto tiene un papel en determinar el sentido mientras que el significado lingüístico es independiente del contexto. Luego, tenemos a la mano dos explicaciones alternativas. Por un lado, está la explicación fregeana de los deícticos, según la cual el sentido determina por sí solo el referente y, a su vez, es determinado por la circunstancia o contexto de uso. Por otra parte, hay una explicación en términos de significados lingüísticos, de acuerdo con la cual los significados lingüísticos determinan el referente junto con el contexto de uso. ¿Cómo decidir entre estas dos explicaciones de la semántica de los deícticos?

Ya hemos dicho que asociado con "hoy" está el modo de referir a un día como el día en curso y de que éste es el responsable de la competencia de los hablantes en su uso. Esto parece innegable. Una explicación de corte fregeano puede capturar esto recurriendo a los sentidos-*tipo*. Si bien cada uso de "hoy" en diferente día tiene un sentido distinto, todos los usos de "hoy" comparten el mismo sentido-*tipo*. El sentido-tipo corresponde al significado lingüístico de los deícticos, el cual junto con un contexto de uso determina un sentido que, a su vez y por sí solo, determina un referente. Pero si ésta es la explicación que ofrece el fregeano,[19] el sentido parece completamente

[19] Peacocke 1981 ofrece una explicación que recurre a la distinción entre sentidos-tipo y sentidos, pero su interés principal son los pensamientos más

prescindible, pues el sentido-tipo junto con el contexto puede obtener una referencia sin tener que determinar un sentido.

Quizás lo que nos enseña la discusión acerca de los deícticos es que hay que dejar de considerar a los sentidos como una categoría semántica y considerarlos, más bien, como algo involucrado en los procesos de pensar, en las creencias, las dudas, etc. Sin duda esto iría en contra de lo que sostiene Frege explícitamente en muchos pasajes y del objetivo de su argumento para introducir los sentidos como parte del significado de una expresión, pero de otra suerte parece difícil, si no imposible, reconciliar su afirmación (i) con una semántica adecuada para los deícticos del lenguaje natural.

Las observaciones de Frege acerca del sentido de "yo" contribuyen a pensar que ha abandonado la elaboración de una semántica para el lenguaje. Una de éstas es la siguiente afirmación de Frege que resulta a primera vista enigmática a la luz de la teoría general de los sentidos:

> ii. Ahora bien, cada uno se presenta a sí mismo de una manera particular y originaria, como no se presenta a ningún otro. (Frege 1918-1919, p. 332)

Aquí es claro que Frege no está pensando en el significado lingüístico de "yo", a saber, ser el hablante, sino en los contenidos de los pensamientos, esto es, de creencias, deseos, etc., que reportamos usando el deíctico "yo". Frege indica algo que es correcto sobre cómo nos pensamos a nosotros mismos desde la perspectiva de la primera persona, sobre el modo de presentación de primera persona. Cuando Margarita cree que tiene que llegar temprano a la oficina, cree algo que reporta en el lenguaje público con "yo":

23. Yo tengo que llegar temprano a la oficina.

Lo que cree conlleva un modo de presentarse a sí misma que otros no pueden utilizar para presentar o referirse a Margarita.

que el funcionamiento de los deícticos en el lenguaje natural. En Ezcurdia 1997 discuto los problemas que implica reconciliar esta sugerencia con (i) y con la idea de que los sentidos constituyen un nivel semántico.

Cuando Francisco utiliza un modo de presentación equivalente sólo se puede presentar o referir a sí mismo y no a Margarita. Esto indica que los modos de presentación de primera persona no son compartibles, sino que son privados, lo cual parece entrar en tensión con la afirmación de Frege acerca de la objetividad de los sentidos frente al carácter subjetivo de las Representaciones (la característica (h)).

He dicho que para Frege los sentidos son abstractos, no dependen de los sujetos y son expresables por el lenguaje. Esto último sugiere que deberían ser, al menos en principio, comunicables. Pero los sentidos asociados con los usos de "yo" no son compartibles por medio de la comunicación. Esto los acerca peligrosamente a las Representaciones que tampoco son compartibles.

Sin embargo, aquí debemos ser cuidadosos y advertir que la privacidad no es la subjetividad. Si bien para Frege las Representaciones son privadas (esto es, no compartibles), lo que las distingue de los sentidos no es su privacidad sino su carácter subjetivo, a saber, que dependen de los sujetos para existir. En contraste, un sentido de primera persona es, de acuerdo con la visión de Frege, privado pero no subjetivo, esto es, es algo que no puede compartirse con otros pero que no depende de los sujetos para existir. El sentido de primera persona de Margarita existe, según Frege, de forma abstracta y, por ende, no constituye una Representación.

Más allá de esto, empero, queda por responderse la pregunta de si puede haber comunicación con oraciones que contengan el pronombre "yo". Según Frege, los usos de Margarita de "yo" expresan el sentido de primera persona de Margarita que no puede ser captado por otros. Dado esto y que para él comprender una expresión es conocer su sentido (la característica (d)), Frege parece estar obligado a decir que a excepción de Margarita nadie puede comprender su emisión de 23 y, por tanto, que con esa emisión no hay comunicación.

Siguiendo una sugerencia fregeana de Evans podemos decir que en casos de emisiones con "yo" hay comprensión *parcial*. Para Evans (1981) un sentido de primera persona puede concebirse como una relación de *pensarse a sí mismo*, una relación de un sujeto consigo mismo.[20] Todos los sentidos de primera persona involucran esta relación de pensarse a sí mismo pero involucran sujetos diferentes. En el caso de Margarita la relación vincula a Margarita con Margarita, y en el de Francisco a Francisco con Francisco. No sólo esto, sino que cuando Francisco escucha a Margarita usar "yo", sabe que ella está usando un modo de pensarse a sí misma análogo al que él utiliza para presentarse a sí mismo desde la perspectiva de primera persona. Luego, si bien un sentido de primera persona no es compartible tal cual, también es cierto que otro sujeto puede saber que el sentido que Margarita está expresando al emitir 23 es análogo al sentido de primera persona que él mismo usa para pensarse a sí mismo. Así, el fregeano puede decir que, aunque no podemos captar el Pensamiento expresado por la emisión de Margarita, sí podemos captar el sentido del predicado "tener que llegar temprano a la oficina" y saber por analogía cuál es el sentido que expresa Margarita con "yo". Según el fregeano, nuestra comprensión de la emisión de Margarita sería parcial pero suficientemente sólida para rechazar que hay una falla comunicativa.

Con esta breve exposición no espero haber resuelto satisfactoriamente el problema que los sentidos de primera persona presentan a la comunicación ni haber explicado en qué consiste la subjetividad de las Representaciones o haber mostrado que los sentidos son objetivos. Mis propósitos han sido más bien mostrar que los sentidos de primera persona pueden ser privados sin ser Representaciones e indicar la respuesta que los fregeanos pueden dar al problema de la comunicabilidad de sentidos de primera persona.

El examen que he hecho de las afirmaciones (i) y (ii) muestran las incursiones que hace Frege en temas propios de la filosofía de la mente: sobre qué tipo de fenómenos son esencialmente subjetivos y sobre pensar acerca de un objeto a través del espacio y del tiempo. Es en sus observaciones sobre los deícticos donde son más evidentes las dificultades que supone concebir los sentidos como un nivel de significado del lengua-

[20] Para facilitar la exposición, he simplificado la propuesta de Evans.

je,[21] y donde encontramos mayor motivación para concebir a los sentidos como algo que sirve para explicar algunos aspectos del pensamiento humano más que el Pensamiento, esto es, más que el significado de las oraciones declarativas.

4. *Comentario final*

Aunque mi objetivo en este trabajo ha sido enfocarme en temas que considero ofrecen un panorama de la filosofía del lenguaje de Frege, hay ausencias que deben reconocerse. Hay contribuciones importantes suyas que, si acaso, sólo he mencionado en este trabajo como lo son el principio de composicionalidad y el principio de contexto. Además, he omitido una discusión significativa que surgió a partir de los problemas que Kripke 1980 señaló con los sentidos de los nombres propios. La razón de estas ausencias obedece a los límites de espacio y, en el caso de los nombres propios, al hecho de que la discusión sobre ellos se presenta de forma más accesible que la discusión sobre los deícticos. Pero, además, la discusión sobre los deícticos muestra algo que puede pasar desapercibido, a saber, un paso de la filosofía del lenguaje de Frege hacia una filosofía de la mente. Al examinar qué son las Representaciones y cómo funciona el pensamiento que se expresa con deícticos, Frege incursiona en temas propios de la filosofía de la mente como lo son el carácter subjetivo de un fenómeno mental, cómo se piensa en un objeto a través del tiempo y en qué consiste el pensamiento en primera persona. Estos temas no son todos pertinentes para el desarrollo de una lógica y, por tanto, el paso de cuestiones sobre el lenguaje a temas sobre la mente es un paso que en Frege parece no haber sido intencional.

Referencias bibliográficas

Burge, T., 1977, "Belief *De Re*", *Journal of Philosophy*, vol. 74, no. 6, pp. 338–362.

Chalmers, D. 2000, "On Sense and Intension", *Philosophical Perspectives*, vol. 16, pp. 135–182.

[21] Perry 1977 fue de los primeros en discutir a fondo las dificultades de la teoría fregeana de los sentidos al explicar los deícticos. Evans 1981 constituye una réplica a Perry 1977.

Dummett, M., 1973, *Frege: Philosophy of Language*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Evans, G., 1982, *The Varieties of Reference*, Oxford University Press, Oxford.

——, 1981, "Understanding Demonstratives", en H. Parret y J. Bouveresse (comps.), *Meaning and Understanding*, De Gruyter, Berlín, 1981. (Las referencias son a la versión de G. Evans, *Collected Papers*, Oxford University Press, Oxford, 1985.)

Everett, A. y T. Hofweber (comps.), 2000, *Empty Names, Fiction and the Puzzle of Non-existence*, CSLI, Stanford.

Ezcurdia, M., 2003, "Introducing Sense", *Manuscrito*, vol. 26, no. 2, pp. 279–312.

——, 1997, "Dynamic and Coherent Thoughts", *European Review of Philosophy*, vol. 2, *Cognitive Dynamics*, pp. 105–139.

——, 1995, "Modos de presentación y modos de determinación", *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, vol. 27, pp. 57–96.

——, 1994, *Sense, Indexicals and Action*, tesis doctoral, University of London, Londres.

Frege, G, 1923, "Investigaciones lógicas. Parte tres: composición de pensamientos"/"Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 3, 1923–1926, pp. 36–51.

——, 1918–1919, "El pensamiento. Una investigación lógica" / "Der Gedanke. Eine Logische Untersuchung", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1, 1918–1919, pp. 58–77. [Versión en español en este volumen, pp. 321–348.]

——, 1914?, "Carta a Jourdain", en *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, carta XXI/12. [Versión en español en este volumen. pp. 315–319.]

——, 1892, "Sobre sentido y referencia" / "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 100, pp. 25–50. [Versión en español en este volumen, pp. 249–275.]

——, 1891, "Función y concepto" / "Funktion und Begriff", Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, Hermann Pohle Jena. [Versión en español en este volumen, pp. 225–248.]

——, 1884, *Los fundamentos de la aritmética: una investigación lógico-matemática / Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, W. Koebner, Breslau. [Versión en español en este volumen, pp. 361–487.]

——, 1879, *Conceptografía / Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle a.S. [Versión en español en este volumen, pp. 39–154.]

Kaplan, D., 1981, "Afterthoughts", en J. Almog, J. Perry y H. Wettstein (comps.), *Themes from Kaplan*, Oxford University Press, Oxford, 1989. [Versión en español: "Reflexiones posteriores", en M. Ezcurdia (comp.), *Los indéxicos y la semántica de Kaplan*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 2014, pp. 141–196.]
———, 1977, "Demonstratives", en J. Almog, J. Perry y H. Wettstein (comps.), *Themes from Kaplan*, Oxford University Press, Oxford, 1989. [Versión en español: "Demostrativos. Ensayo sobre la semántica, la lógica y la epistemología de los demostrativos y otros indéxicos", en M. Ezcurdia (comp.), *Los indéxicos y la semántica de Kaplan*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 2014, pp. 51–139.]
Kripke, S., 1980, *Naming and Necessity*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. [Versión en castellano: *El nombrar y la necesidad*, 2a. ed., traducción de Margarita M. Valdés, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 1995.]
McDowell, J., 1977, "On the Sense and Reference of a Proper Name", *Mind*, vol. 86, pp. 159–185.
Millikan, R., 1991, "Perceptual Content and the Fregean Myth", *Mind*, vol. 100, pp. 439–59.
Peacocke, C., 1981, "Demonstrative Thought and Psychological Explanation", *Synthèse*, vol. 49, pp. 187–217.
Perry, John, 1977, "Frege on Demonstratives", *Philosophical Review*, vol. 86, pp. 474–497.
Russell, B., 1905, "On Denoting", *Mind*, vol. 15, pp. 479–493.
Sainsbury, M., 2009, *Fiction and Fictionalism*, Routledge, Londres.
Salmon, N., 1986, *Frege's Puzzle*, The MIT Press, Cambridge, Mass.
Soames, S., 2002, *Beyond Rigidity: The Unfinished Semantic Agenda of Naming and Necessity*, Oxford University Press, Oxford.
Szabó, Z., 2012, "Compositionality", en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. Zalta, <http://plato.stanford.edu/archives/fall2013/entries/compositionality/>.

FUNCIÓN Y CONCEPTO*

[1891]

PRÓLOGO

Publico aquí esta conferencia separada, con la esperanza de que encuentre así algunos lectores, para los cuales permanecería ignorada si se quedase entre las disertaciones de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena. Como ya he indicado anteriormente, mi propósito es exponer, en un futuro próximo, el modo como expreso las definiciones fundamentales de la aritmética en mi conceptografía, y el modo como, a partir de ellas, puedo llevar a cabo demostraciones tan sólo con mis signos. Con este fin, me interesa poderme referir a esta conferencia para no verme precisado a entrar allí en discusiones que quizás disgustarían a algunos por no ser directamente pertinentes al tema, mientras que podrían ser echadas de menos por otros. Mi conferencia, como lo requería el lugar en que fue dada, no va dirigida únicamente a matemáticos; y he tratado de usar un modo de expresión comprensible para todos, tanto como lo permitían el tiempo disponible y el tema tratado. Acaso por este medio se despertará un interés por la cuestión en círculos más amplios de estudiosos, especialmente también de lógicos.

*Título original: *Funktion und Begriff*. Conferencia dictada en la sesión del 9-1-1891 de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena. Fue publicada en 1891 por Hermann Pohle en Jena.

Traducción de Carlos Ulises Moulines, publicada originalmente en Frege 1971, revisada para el presente volumen.

Hace ya bastante tiempo[1] tuve el honor de dar una conferencia en esta Sociedad sobre el modo de simbolización que he denominado conceptografía. Hoy quisiera iluminar esta cuestión desde otro ángulo y comunicar algunos complementos y concepciones nuevas, cuya necesidad se me ha hecho evidente desde entonces. Con ello no pretendo dar una exposición completa de mi conceptografía, sino sólo hacer públicas algunas ideas básicas.

Parto de lo que en matemáticas se llama función. Esta palabra no tuvo al principio un significado tan amplio como el que ha obtenido más tarde. Será bueno empezar por dirigir nuestra atención hacia los modos de uso originarios y sólo luego considerar sus extensiones posteriores. Por el momento voy a hablar únicamente de funciones de un solo argumento. Una expresión científica aparece en su significado más característico allí donde se precisa de ese significado suyo para expresar una ley general. En el caso de la función, esto ocurrió con el descubrimiento del análisis superior. En éste se trató ante todo de establecer leyes que valiesen para las funciones en general. Hay que retroceder, pues, a la época del descubrimiento del análisis superior, si se quiere saber qué fue lo primero que se entendió en matemáticas por la palabra "función". A esta pregunta se recibe ciertamente la respuesta: "por función de x se entiende una expresión matemática [*Rechnungsausdruck*] que contenga x, una fórmula que incluya la letra x". Según esto, por ejemplo, la expresión

$$2 \cdot x^3 + x$$

sería una función de x, y

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

sería una función de 2. Esta respuesta no puede satisfacernos, puesto que en ella no se distinguen forma y contenido, signo y designado, un error con el que, naturalmente, se encuentra uno ahora muy frecuentemente en escritos matemáticos, incluso de autores de renombre. En otros lugares[2] he señalado ya los fallos de las teorías formalistas corrientes de la aritmética. En

[1] El 10 de enero de 1871 y el 27 de enero de 1882.

[2] *Los fundamentos de la aritmética* [incluido en este volumen, pp. 361–487],

ellas se habla de signos que no tienen ningún contenido, ni lo deben tener, pero luego se les atribuye, no obstante, propiedades que sólo pueden corresponder razonablemente a un contenido del signo. Lo mismo ocurre también aquí: una mera expresión, la forma de un contenido, no puede ser lo esencial de la cosa, sino que sólo lo puede ser el contenido mismo. Ahora bien, ¿cuál es el contenido, la referencia de "$2 \cdot 2^3 + 2$"? El mismo que el de "18" o de "$3 \cdot 6$". En la igualdad $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ se expresa que la referencia de la cadena de signos que está a la izquierda es la misma que la de la derecha. Debo salir aquí al paso de la opinión según la cual $2 + 5$ y $3 + 4$, por ejemplo, son ciertamente iguales, pero no lo mismo. La raíz de esta opinión es nuevamente la confusión entre forma y contenido, entre signo y designado. Es lo mismo que si se quisiera considerar la violeta olorosa como diferente de la *Viola odorata*, porque sus nombres suenan distintos. La diferencia de designación por sí sola no basta para fundamentar una diferencia de designados. En nuestro caso, la cuestión es menos transparente tan sólo por el hecho de que la referencia del numeral [*Zahlzeichen*] 7 no es sensiblemente perceptible. La tendencia actualmente muy difundida a no considerar como objeto más que lo que puede ser percibido con los sentidos induce erróneamente a tomar por números los numerales mismos, a considerarlos los verdaderos objetos de estudio;[3] y entonces, naturalmente, 7 y $2 + 5$ serían distintos. Pero tal concepción no puede mantenerse, porque no podemos hablar en absoluto de cualesquiera propiedades aritméticas de los números sin remitirnos a la referencia de los numerales. La propiedad del 1, por ejemplo, de que, al multiplicarse por sí mismo, se da otra vez a sí mismo, sería una pura fantasía; ninguna investigación microscópica o química, por exhaustiva que fuese, podría descubrir nunca esta propiedad en la inocente figura que llamamos el numeral uno.

§§ 92 y ss., e informes en las sesiones de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena, año 1885, reunión del 17 de julio.

[3] Véanse los ensayos: "Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet" ["Contar y medir considerados epistemológicamente"] de H. von Helmholtz, y "Über den Zahlbegriff" ["Sobre el concepto de número"], de Leopold Kronecker (*Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet* [*Ensayos filosóficos. Dedicados a Eduard Zeller en el cincuentenario de su doctorado*]), Leipzig, 1887.

Quizás se habla de una definición; pero ninguna definición es creadora, en el sentido de que pueda conferir a una cosa propiedades que no tenga ya, fuera de la propiedad de expresar y designar aquello para lo que la definición la introduce como signo.[4] Por el contrario, las figuras que llamamos numerales tienen propiedades físicas y químicas que dependen del medio de escritura. Puede imaginarse que alguna vez se introduzcan signos totalmente nuevos, lo mismo que los signos arábigos desplazaron a los romanos, por ejemplo. Nadie considerará en serio que así se obtendrían números totalmente nuevos, objetos de la aritmética totalmente nuevos, con propiedades hasta entonces inexploradas. Así, pues, si bien hay que distinguir los numerales de aquello a lo que se refieren, también habrá que reconocer la misma referencia a las expresiones "2", "1 + 1", "3 − 1", "6 : 3"; pues no podemos alcanzar a comprender en qué radicaría la diferencia. Quizás se diga: 1 + 1 es una suma, pero 6 : 3 es un cociente. ¿Pero qué es 6 : 3? El número que multiplicado por 3 da 6. Se dice "el número", no "un número"; con el artículo definido se señala que sólo hay un único número. Ahora bien, resulta que

$$(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) = 6,$$

y por lo tanto (1 + 1) es precisamente el número que se designó por 6 : 3. Las diferentes expresiones corresponden a diversas consideraciones y aspectos, pero, no obstante, siempre a la misma cosa. En caso contrario, la ecuación $x^2 = 4$ no sólo tendría las dos raíces 2 y −2, sino también (1 + 1) y muchas otras que serían distintas unas de otras, aunque en cierto aspecto serían análogas. Al admitirse solamente dos raíces reales se desecha la idea de que el signo de igualdad no significa una coincidencia completa, sino únicamente una concordancia parcial. Esto asentado, vemos entonces que las expresiones

"$2 \cdot 1^3 + 1$",
"$2 \cdot 2^3 + 2$", y
"$2 \cdot 4^3 + 4$"

[4] De lo que se trata siempre en este caso es de unir un sentido o una referencia a un signo. Si faltan totalmente sentido y referencia, no puede hablarse propiamente ni de un signo ni de una definición.

se refieren a números, a saber, 3, 18 y 132. Si la función sólo fuera realmente la referencia de una expresión matemática, entonces sería justamente un número; y con ello no habríamos ganado nada nuevo para la aritmética. Ahora bien, ante la palabra "función", uno suele pensar, naturalmente, en expresiones en las cuales se alude a un número sólo indeterminadamente por medio de la letra *x*, como por ejemplo,

"$2 \cdot x^3 + x$";

pero con ello no cambia nada; pues esta expresión, entonces, alude también sólo indeterminadamente a un número; y no entraña ninguna diferencia esencial que lo escribamos a él o sólo "*x*". No obstante, precisamente gracias a la utilización en la escritura de la "*x*" que alude indeterminadamente, podemos ser conducidos a la concepción correcta. Se llama a *x* el argumento de la función y en

"$2 \cdot 1^3 + 1$",
"$2 \cdot 4^3 + 4$", y
"$2 \cdot 5^3 + 5$"

se reconoce una y otra vez la misma función, sólo que con distintos argumentos, a saber, 1, 4 y 5. De aquí puede inferirse que lo realmente esencial de la función radica en lo que tienen de común estas expresiones; es decir, pues, en lo que se halla en

"$2 \cdot x^3 + x$"

además de la "*x*"; lo cual podríamos escribir quizás así

"$2 \cdot (\ )^3 + (\ )$".

Me interesa señalar que el argumento no forma parte de la función, sino que constituye, junto con la función, un todo completo; pues la función, por sí sola, debe denominarse incompleta, necesitada de complemento, o no saturada. Y ésta es la diferencia de principio que hay entre las funciones y los números. Y por esta naturaleza de la función se explica que, por una parte, reconozcamos la misma función en "$2 \cdot 1^3 + 1$"

y " $2 \cdot 2^3 + 2$ ", a pesar de que estas expresiones se refieran a números diferentes, mientras que, por otra parte, en " $2 \cdot 1^3 + 1$ " y " $4 - 1$ ", a pesar de tener el mismo valor numérico, no encontremos la misma función. También vemos ahora cuán fácilmente puede uno ser llevado erróneamente a ver lo esencial de la función justamente en la forma de la expresión. En la expresión reconocemos la función al imaginarla descompuesta; y una descomposición posible tal es sugerida por su forma.

Las dos partes en que se descompone la expresión matemática, el signo del argumento y la expresión de la función, son heterogéneas dado que el argumento es un número, un todo completo en sí mismo, cosa que no es la función. Puede compararse esto a la división de una línea por un punto. Nos inclinamos entonces a atribuir el punto de división a ambos segmentos de la línea. Pero si quiere efectuarse la división de manera pura, o sea, de modo que no se cuente nada dos veces ni quede nada fuera, entonces habrá que atribuir el punto de división únicamente a uno de los segmentos. Este último quedará completamente cerrado en sí mismo, y puede compararse con el argumento, mientras que al otro le falta algo. Pues el punto de división, al que podría llamarse su punto terminal, no le pertenece. Solamente al completarlo por medio de este punto terminal o de una línea con dos puntos terminales se obtiene un todo completo. En nuestro caso, cuando hablamos, por ejemplo, de "la función $2 \cdot x^3 + x$", no hay que considerar que x pertenece a la función, sino que esta letra sólo sirve para indicar el tipo de complementación que le falta al hacer patentes los lugares en los que tiene que entrar el signo del argumento.

Ahora bien, llamamos a aquello en lo que se convierte la función, al ser completada por un argumento, el valor de la función para ese argumento. Así, por ejemplo, 3 es el valor de la función $2 \cdot x^2 + x$ para el argumento 1, puesto que tenemos $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.

Existen funciones como, por ejemplo, $2 + x - x$ o $2 + 0 \cdot x$, cuyo valor es siempre el mismo sea cual sea su argumento; tenemos $2 = 2 + x - x$ y $2 = 2 + 0 \cdot x$. Si se considerase el argumento incluido en la función, debería considerarse el número 2 como esa función. Pero esto es incorrecto. Aunque el

valor de la función aquí siempre es 2, con todo, hay que distinguir 2 de la función en sí misma; pues la expresión de una función tiene que mostrar siempre uno o más lugares que están destinados a ser llenados por el signo del argumento.

El método de la geometría analítica nos ofrece un medio de hacernos intuitivos los valores de una función para diversos argumentos, pues, al considerar el argumento como valor numérico de una abscisa y el valor correspondiente de la función como valor numérico de la ordenada de un punto, obtenemos un conjunto de puntos que en los casos usuales se nos presentan intuitivamente como una curva. A cada punto de la curva le corresponde un argumento con el correspondiente valor de la función.

Así, por ejemplo,

$$y = x^2 - 4x$$

da lugar a una parábola, en donde "y" alude al valor de la función y al valor numérico de la ordenada, al igual que "x" alude al argumento y al valor numérico de la abscisa. Si la comparamos ahora con la función

$$x(x-4),$$

hallamos que en todos los casos tiene el mismo valor para el mismo argumento que la anterior. Tenemos, de manera general,

$$x^2 - 4x = x(x-4),$$

sea cual sea el número por el que se sustituya x. De ahí que la curva que obtenemos de

$$y = x^2 - 4x$$

sea la misma que la que resulta de

$$y = x(x-4).$$

Esto lo expreso así: la función $x(x-4)$ tiene el mismo rango de valores que la función $x^2 - 4x$.

Cuando escribimos

$$x^2 - 4x = x(x-4)$$

no igualamos una función con la otra, sino solamente los valores de las funciones entre sí. Y si entendemos que esta ecuación debe ser válida con cualquier argumento que sustituya x, habremos expresado de este modo la generalización de una ecuación. Pero en vez de ello también podemos decir "el rango de valores de la función $x(x-4)$ es igual al de la función x^2-4x" y tendremos así una igualdad entre rangos de valores. Que ahora es posible concebir la generalización de una igualdad entre valores de función como una igualdad, a saber, como una igualdad entre rangos de valores, me parece que no hay que demostrarlo, sino que tiene que ser considerado como un principio lógico.[5]

Podemos introducir también una notación abreviada para el rango de valores de una función. A este fin, sustituyo el signo del argumento en la expresión de la función por una letra vocal griega, lo pongo todo entre paréntesis y antepongo a esto la misma letra griega con espíritu suave. Según esto, por ejemplo,

$$\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2-4\varepsilon)$$

será el rango de valores de la función x^2-4x y

$$\grave{\alpha}\,(\alpha\cdot[\alpha-4])$$

el rango de valores de la función $x(x-4)$, de modo que en

$$\text{“}\,\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2-4\varepsilon)=\grave{\alpha}\,(\alpha\cdot[\alpha-4])\text{”}$$

tenemos la expresión de que el primer rango de valores es el mismo que el segundo. Se han escogido letras griegas diferentes a propósito, para indicar que nada nos fuerza a tomar las mismas.

$$\text{“}x^2-4x=x(x-4)\text{”}$$

expresa ciertamente el mismo sentido, si lo entendemos como antes, pero lo expresa de manera distinta. Representa ese sentido en forma de generalización de una ecuación, mientras que

[5] En algunos usos del modo de expresión habitual en matemáticas, la palabra "función" corresponde ciertamente a lo que aquí he llamado rango de valores de una función. Pero la función, en el sentido de la palabra utilizado aquí, es lógicamente anterior.

la expresión que acabamos de introducir es sencillamente una ecuación cuyo miembro de la derecha tiene, lo mismo que el de la izquierda, una referencia completa en sí misma. En

$$\text{“}x^2-4x=x(x-4)\text{”}$$

el miembro de la izquierda, tomado aislado, alude sólo indeterminadamente a un número, y lo mismo ocurre con el miembro de la derecha. Si tuviéramos meramente "x^2-4x", podríamos escribir en vez de ello también "y^2-4y", sin que cambiara el sentido; pues "y", lo mismo que "x", alude sólo indeterminadamente a un número. Pero si combinamos ambos miembros en una ecuación, tenemos que escoger la misma letra para ambos lados y con ello expresamos algo que no contiene ni el miembro de la izquierda por sí solo ni el de la derecha ni el signo de igualdad, esto es, la generalización justamente; naturalmente, se trata de la generalización de una ecuación, pero, no obstante, es, ante todo, una generalización.

Así como se alude indeterminadamente a un número por medio de una letra, para expresar generalización, asimismo se siente la necesidad de aludir indeterminadamente a una función por medio de letras. Para ello, se suele hacer uso generalmente de las letras f y F, de tal manera que, en "$f(x)$" y "$F(x)$", x representa el argumento. En este caso, se pone de manifiesto la necesidad de complementación de la función por el hecho de que la letra f o F lleve consigo un paréntesis, cuyo espacio interior está destinado a recibir el signo del argumento. Según esto,

$$\text{“}\,\grave{\varepsilon}\,f(\varepsilon)\text{”}$$

alude al rango de valores de una función, que se deja indeterminada. Ahora bien, ¿cómo fue ampliada la referencia de la palabra función con el progreso de la ciencia? Aquí pueden distinguirse dos direcciones. En primer lugar, se amplió el círculo de las operaciones matemáticas que contribuyen a la creación de una función. A la adición, multiplicación, potenciación y sus inversas se añadieron los diversos tipos de paso al límite, aunque no siempre se tuviera una conciencia clara de lo que había de esencialmente nuevo en lo que así se introducía. Se siguió avanzando y se hizo preciso incluso buscar refugio en el

lenguaje hablado, dado que el lenguaje simbólico del análisis dejaba de funcionar cuando se hablaba, por ejemplo, de una función cuyo valor para un argumento racional es 1, y para un argumento irracional es 0.

En segundo lugar se amplió el círculo de lo que puede aparecer como argumento y valor de la función al ser admitidos los números complejos. Con ello, hubo al mismo tiempo que determinar con más precisión el sentido de las expresiones "suma", "producto", etcétera.

Ahora proseguiré yo en ambas direcciones. Ante todo a los signos $+$, $-$, etc., que sirven para la formación de una expresión funcional, añado signos como $=$, $<$, $>$, de modo que podré hablar, por ejemplo, de la función $x^2 = 1$, en la que como antes, x representa el argumento. La primera cuestión que surge aquí es la de cuáles son los valores de la función para distintos argumentos. Si ordenadamente sustituimos x por $-1, 0, 1, 2$, obtenemos

$$(-1)^2 = 1,$$
$$0^2 = 1,$$
$$1^2 = 1,$$
$$2^2 = 1.$$

De estas ecuaciones, sólo la primera y la tercera son verdaderas. Así, pues, digo: "el valor de nuestra función es un valor veritativo" y distingo el valor veritativo de lo verdadero del de lo falso. Para abreviar, a uno lo llamo lo verdadero, y al otro lo falso. Según esto, "$2^2 = 4$", por ejemplo, refiere a lo verdadero, al igual que "2^2", por ejemplo, refiere a 4. Y "$2^2 = 1$" refiere a lo falso. Según esto,

$$\text{“}2^2 = 4\text{”}, \text{“}2 > 1\text{”}, \text{“}2^4 = 4^2\text{”}$$

refieren a lo mismo, a saber, lo verdadero, de manera que

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

es una igualdad correcta.

Es natural aquí la objeción de que, no obstante, "$2^2 = 4$" y "$2 > 1$" afirman algo completamente distinto, expresan pensamientos completamente distintos; pero también "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" expresan pensamientos distintos; y, a pesar de ello, se puede sustituir "2^4" por "$4 \cdot 4$", porque ambos signos tienen la misma referencia. En consecuencia, también "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" refieren a lo mismo. A partir de esto, se comprende que la igualdad de referencia no tiene como consecuencia la igualdad de pensamiento. Cuando decimos "el lucero vespertino es un planeta cuya órbita es menor que la de la Tierra", hemos expresado un pensamientos distinto al de la oración "el astro matutino es un planeta cuya órbita es menor que la de la Tierra"; pues quien no sepa que el lucero matutino es el lucero vespertino, podría suponer que uno es verdadero y el otro falso; y, con todo, la referencia de ambas oraciones tiene que ser la misma, puesto que sólo se han intercambiado las palabras "lucero vespertino" y "lucero matutino" que tienen ambas la misma referencia, es decir, son nombres propios del mismo cuerpo celeste. Hay que distinguir sentido y referencia. "2^4" y "$4 \cdot 4$" tienen ciertamente la misma referencia; es decir, son nombres propios del mismo número; pero no tienen el mismo sentido, y de ahí que tengan "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" ciertamente la misma referencia, pero no el mismo sentido; es decir, en este caso no contienen el mismo pensamiento.[6]

Así, pues, con el mismo derecho con que escribimos

$$\text{“}2^4 = 4 \cdot 4\text{”}$$

podemos también escribir

$$\text{“}(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)\text{”}$$

y

$$\text{“}(2^2 = 4) = (2 > 1)\text{”}.$$

Siguiendo por este camino, podría preguntarse con qué fin se admitieron los signos $=$, $>$, $<$ en el círculo de los que contribuyen a formar una expresión funcional. Parece que en la actualidad gana cada vez más partidarios la opinión de que la aritmética es lógica extensamente desarrollada, que una fundamentación rigurosa de las leyes aritméticas nos retrotrae a

[6] No ignoro que este uso lingüístico puede parecer de momento arbitrario y artificial, y que se podría exigir una justificación más detenida. Consúltese mi artículo "Sobre sentido y referencia" [*infra*, pp. 249-275].

leyes puramente lógicas y sólo a tales. También yo soy de esta opinión y en esto baso la exigencia de que el lenguaje simbólico aritmético debe ampliarse en uno lógico. Cómo ocurre esto en nuestro caso lo indicaremos a continuación.

Vimos que el valor de nuestra función $x^2 = 1$ es siempre uno de los dos valores veritativos. Ahora bien, si para un determinado argumento, por ejemplo -1, el valor de la función es lo verdadero, podemos expresar esto así: "el número -1 tiene la propiedad de que su cuadrado es 1", o más brevemente "-1 es una raíz cuadrada de 1", o "-1 cae bajo el concepto de raíz cuadrada de 1". Si el valor de la función $x^2 = 1$ es lo falso para un argumento, por ejemplo, 2, podremos entonces expresar esto así: "2 no es raíz cuadrada de 1" o bien "2 no cae bajo el concepto de raíz cuadrada de 1". Con esto vemos cuán estrechamente relacionado está lo que en lógica se llama concepto con lo que nosotros llamamos función. Incluso podrá decirse verdaderamente: un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo. También el valor de la función

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

es siempre un valor veritativo. Obtenemos lo verdadero, por ejemplo, para el argumento -1 y podremos expresar esto también así: -1 es un número que es menor que 1 en un número cuyo cuadrado es igual a su duplo. Con esto, se ha expresado que el número -1 cae bajo un concepto. Las funciones

$$x^2 = 1 \quad \text{y} \quad (x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

tienen para el mismo argumento siempre el mismo valor, a saber, lo verdadero, para -1 y $+ 1$; lo falso, para todos los demás argumentos. Según lo establecido anteriormente, diremos, por tanto, que estas funciones tienen el mismo rango de valores y lo expresaremos así en signos:

$$\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}\,([\alpha + 1]^2 = 2[\alpha + 1]).$$

En lógica se denomina a esta ecuación la extensión de los conceptos. Según esto, podemos designar como extensión del concepto el rango de valores de una función cuyo valor para cada argumento es un valor veritativo.

No nos quedaremos en las ecuaciones e inecuaciones. La forma lingüística de las ecuaciones es una oración afirmativa. Una oración tal contiene como sentido un pensamiento —o, por lo menos, pretende contener alguno—; y este pensamiento es, en general, verdadero o falso; esto es, tiene en general un valor veritativo que puede concebirse asimismo como referencia de la oración, así como el número 4 es la referencia de la expresión "2 + 2", o como Londres es la referencia de la expresión "la capital de Inglaterra".

Las oraciones afirmativas en general pueden concebirse, lo mismo que las ecuaciones o las expresiones del análisis, descompuestas en dos partes, una de las cuales está completa en sí misma, mientras que la otra precisa de complemento, es no saturada. Así, por ejemplo, la oración

"César conquistó las Galias"

puede ser descompuesta en "César" y "conquistó las Galias". La segunda parte es no saturada, lleva consigo un lugar vacío, y únicamente cuando se llena este lugar por medio de un nombre propio o de una expresión que remplace a un nombre propio, aparecerá un sentido completo. También ahora llamo función al significado de esta parte no saturada. En este caso, el argumento es César.

Como vemos, aquí se ha emprendido al mismo tiempo una extensión en la otra dirección, o sea, con respecto a lo que puede aparecer como argumento. Ya no hay que admitir tan sólo números, sino objetos en general, teniendo que contar también a las personas entre los objetos. Como valores de función posibles están los dos valores veritativos que acabamos de introducir. Hemos de seguir adelante y admitir objetos sin limitación como valores de una función. Para ilustrar esto, consideremos, por ejemplo, la expresión

"la capital del Imperio alemán".

Esta expresión representa evidentemente un nombre propio y se refiere a un objeto. Si la descomponemos en partes,

"la capital de"

e "Imperio alemán", con lo cual considero dentro de la primera parte la forma del genitivo, resulta que esta primera parte es no saturada, mientras que la otra es completa en sí misma. Según lo antes dicho, llamo pues a

"la capital de x"

la expresión de una función. Si tomamos como argumento suyo el Imperio alemán, obtendremos como valor de la función, Berlín.

Al haber admitido así objetos sin limitación como argumentos y como valores de función, lo que se pregunta entonces es a qué llamamos aquí objeto. Considero que es imposible una definición académica, puesto que en este caso tenemos algo que, por su simplicidad, no permite una descomposición lógica. Tan sólo es posible aludir a lo que se quiere decir. Brevemente, aquí sólo se puede decir: objeto es todo lo que no es función, cuya expresión, por tanto, no lleva consigo un lugar vacío.

Una oración afirmativa no contiene ningún lugar vacío, y por eso hay que considerar que su referencia es un objeto. Esta referencia, empero, es un valor veritativo. Por lo tanto, ambos valores veritativos son objetos.

Anteriormente hemos presentado ecuaciones entre rangos de valores, por ejemplo

$$\text{“} \acute{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \acute{\alpha}\ (\alpha[\alpha - 4])\text{”.}$$

Podemos descomponer esto en "$\acute{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$" y "$(\ ) = \acute{\alpha}\ (\alpha[\alpha - 4])$". Esta última parte es incompleta, al llevar consigo un lugar vacío a la izquierda del signo de igualdad. La primera parte, "$\acute{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$", está totalmente completa en sí misma, o sea, que refiere a un objeto. Los rangos de valores de las funciones son objetos, mientras que las funciones mismas no lo son. También habíamos denominado rango a $\acute{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 = 1)$, pero también lo podríamos designar como extensión del concepto raíz cuadrada de 1. También las extensiones de conceptos son, pues, objetos, aunque los conceptos mismos no lo son.

Después de haber ampliado el círculo de lo que puede ser tomado como argumento, habrá que hacer estipulaciones más

precisas sobre las referencias de los signos que ya son usuales. Mientras se consideren como objetos únicamente los números enteros de la aritmética, las letras a y b de $a + b$ sólo aluden a números enteros, y sólo hay que explicar el signo "+" entre los números enteros. Cada ampliación del círculo de los objetos, a los que se alude con "a" y "b", hace precisa una nueva explicación del signo "+". Es un mandamiento del rigor científico tomar precauciones para que una expresión no sea nunca carente de referencia, para que nunca se calcule, sin notarlo, con signos vacíos, bajo la creencia de que estamos tratando con objetos. En el pasado se tuvieron experiencias desagradables con series divergentes infinitas. Es necesario, pues, hacer estipulaciones de las cuales se desprenda, por ejemplo, a qué se refiere

"$\odot + 1$",

si "$\odot$" refiere al Sol. El modo como se den estas estipulaciones es relativamente indiferente; lo esencial, empero, es que se hagan, que "$a + b$" tenga una referencia, sean cuales sean los signos de objetos determinados que reemplacen a "a" y "b". Para los conceptos ponemos la exigencia de que, para todo argumento, tengan por valor un valor veritativo; de que, para todo objeto, quede determinado si cae bajo el concepto o no; con otras palabras: para los conceptos, ponemos la exigencia de que estén claramente delimitados; sin el cumplimiento de esta exigencia, sería imposible establecer leyes lógicas con ellos. Para todo argumento x, para el que "$x + 1$" no tuviera referencia, tampoco tendría ningún valor la función $x + 1 = 10$, por lo tanto, tampoco ningún valor veritativo, de modo que el concepto

lo que aumentado en 1 da 10,

no tendría ningún límite preciso. La exigencia de delimitación precisa de los conceptos trae, pues, consigo la exigencia, válida para las funciones en general, de que tienen que tener un valor para todo argumento.

Hasta ahora hemos considerado los valores veritativos solamente como valores de una función, no como argumentos. Según lo que acabamos de decir, una función tiene que tener también un valor para cada uno de los valores veritativos toma-

do como argumento; pero en la mayoría de los casos, si determinamos este valor será por ganas de determinarlo, sin que importe mucho cuál sea el valor determinado. Sin embargo, vamos a considerar algunas funciones que nos interesa precisamente examinar en el caso en que su argumento es un valor veritativo. Como una función tal, introduzco

—— *x*,

estipulando que el valor de esta función debe ser lo verdadero cuando se tome como argumento lo verdadero, mientras que en todos los demás casos el valor de esta función será lo falso; o sea, pues, tanto cuando el argumento es lo falso, como cuando no es ningún valor veritativo. Según esto, es, por ejemplo,

—— $1 + 3 = 4$

lo verdadero, mientras que tanto

—— $1 + 3 = 5$

como

—— 4

son lo falso. Esta función tiene como valor el argumento mismo cuando éste es un valor veritativo. En otra ocasión, había llamado a esta barra horizontal "barra de contenido", nombre que ahora ya no me parece adecuado. La llamaré ahora simplemente "la horizontal".

Cuando se escribe una ecuación o una inecuación, por ejemplo $5 > 4$, habitualmente con ello se quiere al mismo tiempo expresar un juicio; en este caso, se quiere afirmar que 5 es mayor que 4. Según la concepción que he expuesto aquí, con "$5 > 4$" o "$1 + 3 = 5$" se tienen solamente expresiones de valores veritativos, sin que con ellos quiera afirmarse nada. Esta separación entre el juzgar y aquello que se juzga parece ineludible, porque en caso contrario no sería expresable la mera suposición de un caso, el postularlo, sin hacer simultáneamente un juicio sobre si ocurre o no. Precisamos, pues, de un signo particular para poder afirmar algo. Para ello, utilizo una barra

vertical al extremo izquierdo de la horizontal de modo que, por ejemplo, con

"⊢— $2 + 3 = 5$"

afirmamos: $2 + 3$ es igual a 5. O sea, que no sólo se le atribuirá un valor veritativo, como en el caso de

"$2 + 3 = 5$",

sino que al mismo tiempo se dice también que este valor veritativo es lo verdadero.[7]

La siguiente función sencilla puede ser aquella cuyo valor es lo falso justamente para los argumentos para los cuales el valor de —— *x* es lo verdadero, y, recíprocamente, cuyo valor es lo verdadero para los argumentos para los cuales el valor de —— *x* es lo falso.

La designo así

—┬— *x*,

y llamo a la pequeña barra vertical, barra de negación. Considero esta función como una función con el argumento —— *x*:

(—┬— *x*) = (—┬—[—— *x*]),

imaginando que las dos barras horizontales se han fusionado. Pero también tenemos

(——[—┬— *x*]) = (—┬— *x*)

porque el valor de —┬— *x* es siempre un valor veritativo. Considero, pues, que en "—┬— *x*", las dos partes de la barra a la derecha y a la izquierda de la barra de negación son horizontales en el sentido de esta palabra que acabamos de explicar. A partir de todo esto,

"—┬— $2^2 = 5$"

por ejemplo, se referirá a lo verdadero, y podemos añadir la barra de juicio:

"⊢┬— $2^2 = 5$"

[7] La barra de juicio no puede ser utilizada para formar una expresión funcional, porque no puede contribuir, junto con otros signos, a la designación de un objeto. "⊢— $2 + 3 = 5$" no designa nada, sino que asevera algo.

con lo cual afirmamos que $2^2 = 5$ no es lo verdadero, o que 2^2 no es 5. Pero también

$$\neg\, 2$$

es lo verdadero, puesto que — 2 es lo falso:

$$\vdash\neg\, 2;$$

es decir, 2 no es lo verdadero.

El modo como represento la generalización se verá mejor con un ejemplo. Supongamos que hay que expresar que todo objeto es igual a sí mismo. En

$$x = x$$

tenemos una función, cuyo argumento se indica por medio de "x". Hay que decir ahora que el valor de esta función es siempre lo verdadero, sea cual sea el argumento que se tome. Con el signo

$$\text{“}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})\text{”}$$

entenderé ahora lo verdadero cuando la función $f(x)$ tiene siempre como valor lo verdadero, sea cual sea su argumento; en todos los demás casos,

$$\text{“}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})\text{”}$$

habrá de referirse a lo falso. Para nuestra función $x = x$ se cumple el primer caso. Por lo tanto,

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

es lo verdadero; y esto lo escribimos así:

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

Las barras horizontales a derecha e izquierda de la cavidad deben ser tomadas como horizontales en nuestro sentido. En vez de "$\mathfrak{a}$", podría escogerse cualquier otra letra gótica, a excepción de aquellas que, como $\mathfrak{f}$ y $\mathfrak{F}$, han de servir como letras de funciones.

Esta notación ofrece la posibilidad de negar la generalización, como en

$$\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a}^2 = 1.$$

Pues $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a}^2 = 1$ es lo falso, ya que no para todo argumento el valor de la función $x^2 = 1$ es lo verdadero. Pues, por ejemplo, para el argumento 2 obtenemos $2^2 = 1$; esto es lo falso. Ahora bien, si $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a}^2 = 1$ es lo falso, entonces $\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a}^2 = 1$ es lo verdadero, según lo que se ha estipulado antes sobre la barra de negación. Tenemos pues

$$\vdash\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a}^2 = 1;$$

es decir, "no todo objeto es raíz cuadrada de 1", o bien "hay objetos que no son raíz cuadrada de 1". ¿Puede expresarse también que hay raíces cuadradas de 1? ¡Sin duda! Basta con tomar, en vez de la función $x^2 = 1$, la función

$$\neg\, x^2 = 1.$$

De

$$\text{“}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \neg\, \mathfrak{a}^2 = 1\text{”}$$

resulta, por fusión de las horizontales,

$$\text{“}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\, \mathfrak{a}^2 = 1\text{”}.$$

Esto refiere a lo falso, porque no para todo argumento es el valor de la función

$$\neg\, x^2 = 1$$

lo verdadero. Por ejemplo,

$$\neg\, 1^2 = 1$$

es lo falso, puesto que $1^2 = 1$ es lo verdadero. Así pues, dado que

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\, \mathfrak{a}^2 = 1$$

es lo falso,

$$\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\, \mathfrak{a}^2 = 1$$

será por tanto lo verdadero:

$$\vdash\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\, \mathfrak{a}^2 = 1;$$

es decir, "no es el caso que para todo argumento el valor de la función

$$-\!\!\top\!\!-\, x^2 = 1$$

es lo verdadero", o bien "el valor de la función $x^2 = 1$ no para todo argumento es lo falso", o bien "hay por lo menos una raíz cuadrada de 1".

A continuación daremos todavía algunos ejemplos en signos y palabras:

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{a} \geq 0,$$

hay por lo menos un número positivo;

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{a} < 0,$$

hay por lo menos un número negativo;

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0,$$

hay por lo menos una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

A partir de aquí puede comprenderse cómo pueden expresarse las oraciones existenciales tan importantes. Si indicamos indeterminadamente un concepto por medio de la letra de funciones f, tendremos en

$$-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, f(\mathfrak{a})$$

la forma en que están contenidos los últimos ejemplos, prescindiendo de la barra de juicio. Las expresiones

$$“-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{a}^2 = 1”,\ “-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{a} \geq 0”,\ “-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{a} < 0”,$$
$$“-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0”$$

surgen de esta forma de manera parecida a como, por ejemplo, de x^2 surgen "1^2", "2^2", "3^2". Así como con x^2 tenemos una función, a cuyo argumento se alude por medio de "x", así también considero que

$$“-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, f(\mathfrak{a})”$$

es expresión de una función, cuyo argumento se indica por medio de "f". Una función tal es, evidentemente, fundamentalmente distinta de las hasta ahora consideradas, pues, como argumento suyo sólo puede entrar una función. Así como las funciones son fundamentalmente distintas de los objetos, así también aquellas funciones cuyos argumentos son y tienen que ser funciones son fundamentalmente distintas de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser otra cosa. A estas últimas las llamo funciones de primer nivel, a las otras las llamo funciones de segundo nivel. Igualmente distingo conceptos de primero y segundo nivel.[8] De hecho, hace ya tiempo que en el análisis se tenían funciones de segundo nivel, por ejemplo, con las integrales definidas, en la medida en que se considere la función que va a ser integrada como argumento.

Puede añadirse todavía algo sobre funciones con dos argumentos. Obtuvimos la expresión de una función al partir el signo compuesto de un objeto en una parte saturada y otra no saturada. Así descompusimos, por ejemplo, el signo de lo verdadero

$$“3 > 2”$$

en "3" y "$x > 2$". Podemos seguir descomponiendo la parte no saturada "$x > 2$" del mismo modo en "2" y

$$“x > y”,$$

donde ahora "y" indica el lugar vacío, que antes había sido llenado por "2". Con

$$x > y$$

tenemos una función con dos argumentos, uno de los cuales se indica por medio de "x", el otro por medio de "y", y con

$$3 > 2$$

tenemos el valor de esa función para los argumentos 3 y 2. Tenemos aquí una función cuyo valor es siempre un valor veritativo. A las funciones de este tipo con un argumento las hemos

[8] Véanse mis *Fundamentos de la aritmética*, al final del § 53. La prueba ontológica de la existencia de Dios adolece del error de que trata la existencia como un concepto de primer nivel.

llamado conceptos; a las que tienen dos argumentos las llamamos relaciones. También tenemos relaciones en el caso de

$$x^2 + y^2 = 9$$

y de

$$x^2 + y^2 > 9,$$

mientras que la función

$$x^2 + y^2$$

tiene números por valores. Por lo tanto, no la llamaremos relación.

Vamos a considerar ahora una función que no es peculiar de la aritmética. Sea la función

$$x$$
$$y$$

cuyo valor es lo falso cuando se toma lo verdadero como argumento-*y* y al mismo tiempo se toma un objeto que no sea lo verdadero como argumento-*x*; en todos los demás casos, el valor de esta función será lo verdadero. La barra horizontal inferior y las dos partes en que queda dividida la superior por la barra vertical deben considerarse horizontales. En consecuencia, siempre se pueden tomar como argumentos de nuestra función —*x* y —*y*, es decir, valores veritativos.

Entre las funciones de un argumento, distinguimos las de primero y segundo nivel. En este caso es posible una mayor variedad. Una función con dos argumentos puede ser, con relación a éstos, del mismo o de distinto nivel: funciones de nivel igual o de nivel desigual. Las que hemos considerado hasta aquí eran de nivel igual. Una función de nivel desigual es, por ejemplo, el cociente diferencial, cuando se toman como argumentos la función que hay que diferenciar y el argumento para el cual aquélla es diferenciada, o bien la integral definida, siempre que se tomen como argumentos la función que hay que integrar y el límite superior. Las funciones de nivel igual pueden dividirse, a su vez, en funciones de primero y segundo nivel. Una función tal de segundo nivel es, por ejemplo,

$$F(f[1])$$

en donde *F* y *f* indican los argumentos.

En las funciones de segundo nivel con un argumento hay que distinguir según que en ese argumento aparezca una función con uno o con dos argumentos, pues una función con un argumento es tan radicalmente distinta de una función con dos argumentos, que la una no puede aparecer precisamente en el mismo lugar en que puede aparecer la otra. Algunas funciones de segundo nivel con un argumento requieren, como argumento, una función con un argumento, mientras que otras requieren una función con dos argumentos, y estas dos clases están tajantemente diferenciadas.

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$$
$$f(\mathfrak{e}, \mathfrak{a})$$
$$f(\mathfrak{e}, \mathfrak{d})$$

es un ejemplo de una función de segundo nivel con un argumento que requiere como tal una función con dos argumentos. La letra *f* alude aquí al argumento, y los dos lugares separados por la coma en los paréntesis que siguen a "*f*" ponen de manifiesto que *f* representa una función con dos argumentos.

En el caso de las funciones con dos argumentos, la variedad es aún mayor.

Si, a partir de todo esto, echamos un vistazo retrospectivo al desarrollo de la aritmética, nos damos cuenta de su progreso de un nivel a otro. Primero se calculaba con números singulares, con el 1, el 3, etcétera.

$$2 + 3 = 5, \quad 2 \cdot 3 = 6$$

son teoremas de esta clase. Se pasó luego a leyes más generales, que valen para todos los números. En la notación, esto corresponde a la transición al álgebra. En

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

tenemos un teorema de este tipo. Con ello se había llegado ya a la consideración de funciones singulares, sin utilizar todavía la palabra en el sentido matemático, ni haber comprendido su significado. El nivel inmediatamente superior fue el conocimiento de leyes generales para las funciones y, con esto, el

acuñamiento de la expresión técnica "función". En la notación, a esto corresponde la introducción de letras como f y F, para aludir indefinidamente a las funciones. En

$$\frac{df(x) \cdot F(x)}{dx} = F(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dF(x)}{dx}$$

tenemos un teorema de esta clase. De este modo se tenían también funciones singulares de segundo nivel, sin que, a pesar de ello, se concibiera lo que hemos denominado función de segundo nivel. Al hacer esto, se da el siguiente paso hacia delante. Podría pensarse que se proseguirá en esta dirección. Pero, probablemente, este último paso no tenga ya tantas consecuencias como los anteriores, puesto que, con el progreso ulterior, las funciones de segundo nivel podrán ser consideradas de primer nivel, como se demostrará en otro lugar.* Pero con ello no se habrá eliminado totalmente la diferencia entre funciones de primero y segundo nivel, porque esta diferencia no fue hecha arbitrariamente, sino que tiene una justificación en la naturaleza profunda de la cuestión.

También pueden considerarse, en lugar de funciones con dos argumentos, funciones de un único argumento, aunque complejo, con lo cual, sin embargo, subsiste con toda claridad la diferencia entre funciones con uno y con dos argumentos.

* Véase *Las leyes fundamentales de la aritmética*, vol. I, §§ 25, 34–37. [N. del t.]

SOBRE SENTIDO Y REFERENCIA*

[1892]

La igualdad[1] induce a la reflexión a través de preguntas relacionadas con ella que no son fáciles de contestar. ¿Es la igualdad una relación?, ¿es una relación entre objetos?, ¿o bien entre nombres o signos de objetos? Esto último es lo que supuse en mi conceptografía. Las razones que parecen hablar en favor de ello son las siguientes: $a = a$ y $a = b$ son evidentemente oraciones de diferente valor cognoscitivo: $a = a$ vale *a priori* y, siguiendo a Kant, puede denominarse analítica, mientras que oraciones de la forma $a = b$ contienen frecuentemente ampliaciones muy valiosas de nuestro conocimiento y no siempre pueden justificarse *a priori*. El descubrimiento de que cada mañana no sale un nuevo Sol, sino que siempre es el mismo, fue ciertamente uno de los descubrimientos más trascendentales de la astronomía. Aún ahora, el reconocimiento de un pequeño planeta o de un cometa no es siempre algo evidente. Ahora bien, si en la igualdad quisiéramos ver una relación entre aquello a lo que los nombres "a" y "b" refieren, no parecería que $a = b$ pudiera ser distinto de $a = a$, siempre que $a = b$ sea verdadera. Se habría expresado, en tal caso, una relación de una cosa consigo misma, y además una relación tal, que se da en cada cosa respecto de sí misma, pero que ninguna cosa

* Título original: "Über Sinn und Bedeutung", publicado en *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, Nueva Serie, no. 100, 1892, pp. 25–50.

Traducción de Carlos Ulises Moulines, originalmente publicada en Frege 1971, revisada para el presente volumen.

[1] Empleo esta palabra en el sentido de identidad y entiendo "$a = b$" en el sentido de "a es lo mismo que b" o "a y b coinciden".

tiene respecto de cualquier otra. Parece que lo que se quiere decir con $a = b$ es que los signos o nombres "a" y "b" se refieren a lo mismo, y por lo tanto en la igualdad se trataría precisamente de estos signos; se afirmaría una relación entre ellos. Pero esta relación existiría entre los nombres o signos únicamente en la medida en que éstos nombran o designan algo. Sería una relación inducida por la conexión de cada uno de los dos signos con la misma cosa designada. Esta conexión es arbitraria. No se le puede prohibir a nadie tomar cualquier suceso u objeto producido arbitrariamente como signo para algo. Con ello, la oración $a = b$ no se referiría entonces ya a la cosa misma, sino tan sólo a nuestro modo de designación; con ella no expresaríamos ningún conocimiento genuino. Pero esto es justamente lo que queremos en muchos casos. Si el signo "a" sólo se distingue del signo "b" como objeto (en este caso por su forma), y no como signo (es decir, no por el modo como designa algo), entonces el valor cognoscitivo de $a = a$ sería esencialmente el mismo que el de $a = b$, en caso de que $a = b$ sea verdadera. Una diferencia puede darse únicamente en el caso de que a la diferencia de signos corresponda una diferencia en el modo de presentación [*Art des Gegebenseins*] de lo designado. Sean a, b, c las rectas que unen los ángulos de un triángulo con el punto medio de los lados opuestos. El punto de intersección de a y b es entonces el mismo que el punto de intersección de b y c. Tenemos, pues, designaciones distintas para el mismo punto, y esos nombres ("intersección de a y b", "intersección de b y c") indican al mismo tiempo el modo de presentación del punto, y de ahí que la oración exprese un auténtico conocimiento.

Es natural considerar entonces que a un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido lo que yo quisiera denominar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de presentación. Según esto, en nuestro ejemplo, la referencia de las expresiones "el punto de intersección de a y b" y "el punto de intersección de b y c" sería ciertamente la misma, pero su sentido no sería el mismo. La referencia de "lucero vespertino" y de "lucero matutino" sería la misma, pero el sentido no sería el mismo.

Del presente contexto se desprende que con "signo" y "nombre" he entendido cualquier designación que sea un nombre propio, cuya referencia sea, pues, un objeto determinado (tomada esta palabra en su extensión más amplia), pero no un concepto ni una relación, sobre los cuales se tratará con más detenimiento en otro ensayo.* La designación de un objeto particular puede estar compuesta de varias palabras u otro tipo de signos. Para abreviar, llamaremos nombre propio a cada una de esas designaciones.

El sentido de un nombre propio lo comprende todo aquel que conoce el lenguaje o el conjunto de designaciones al que pertenece;[2] pero con ello, la referencia, en caso de que la haya, queda sólo parcialmente iluminada. Un conocimiento completo de la referencia implicaría que, de cada sentido dado, pudiéramos indicar inmediatamente si le pertenece o no. Esto no lo logramos nunca.

La conexión regular entre el signo, su sentido y su referencia es tal, que al signo le corresponde un determinado sentido y a éste, a su vez, una determinada referencia, mientras que a una referencia (a un objeto), no le corresponde solamente un signo. El mismo sentido puede expresarse en diferentes lenguas, e incluso en la misma, de diversas maneras. Naturalmente, hay excepciones a esta situación regular. Es verdad que en un conjunto perfecto de signos, a cada expresión debería corresponderle un sentido determinado; pero las lenguas naturales a menudo no cumplen este requisito, y hay que darse por satisfecho si la misma palabra tiene siempre el mismo sentido en un mismo contexto. Quizás puede admitirse que una expresión gramaticalmente correcta que figure como un nombre

* Se refiere a "Sobre concepto y objeto" [*infra*, pp. 277-292], y a "Comentarios sobre sentido y referencia" [*infra*, pp. 293-302]. [N. del t.]

[2] En el caso de un verdadero nombre propio como "Aristóteles", naturalmente pueden dividirse las opiniones en cuanto a su sentido. Por ejemplo, se podría suponer que ese sentido es: el discípulo de Platón y maestro de Alejandro Magno. Quien suponga esto, atribuirá a la oración "Aristóteles era originario de Estagira" un sentido distinto de aquel para quien el sentido de este nombre fuera: el maestro de Alejandro Magno originario de Estagira. Mientras la referencia siga siendo la misma, pueden tolerarse estas variaciones del sentido, a pesar de que deben evitarse en el edificio conceptual de una ciencia demostrativa y de que no deberán aparecer en un lenguaje perfecto.

propio siempre tiene sentido. Pero con ello no se ha dicho que al sentido le corresponda también una referencia. Las palabras "el cuerpo celeste más alejado de la Tierra" tienen un sentido; pero que tengan también una referencia, es muy dudoso. La expresión "la serie menos convergente" tiene un sentido; pero se demuestra que no tiene referencia, puesto que para cada serie convergente puede encontrarse otra menos convergente, pero que, no obstante, es convergente. Así pues, por el hecho de que se conciba un sentido, no se tiene con seguridad una referencia.

Cuando se usan palabras de la manera habitual, aquello de lo que se quiere hablar es su referencia. Pero puede ocurrir también que se quiera hablar de las palabras mismas o de su sentido. Lo primero sucede, por ejemplo, cuando se citan las palabras de otro en discurso directo. Las palabras propias se refieren entonces en primer lugar a las palabras del otro, y tan sólo éstas tienen la referencia habitual. Tenemos entonces signos de signos. En el lenguaje escrito se encierran las palabras, en este caso, entre comillas. Por lo tanto, una palabra que se halla entre comillas no debe ser tomada con su referencia usual.

Si se quiere hablar del sentido de la expresión "*A*", basta con usar sencillamente la locución "el sentido de la expresión '*A*' ". En el discurso indirecto se habla del sentido; por ejemplo, de lo que dijo otro. Se ve claramente que, incluso en este modo de hablar, las palabras no tienen su referencia habitual, sino que se refieren a lo que habitualmente es su sentido. Para utilizar una expresión breve, vamos a decir: las palabras se usan *indirectamente*, o tienen su referencia *indirecta* en el discurso indirecto. Según esto, distinguimos la referencia *habitual* de una palabra de su referencia *indirecta*, y su sentido *habitual* de su sentido *indirecto*. La referencia indirecta de una palabra es, pues, su sentido habitual. Si se quiere concebir correctamente, en cada caso particular, el modo de conexión de signo, sentido y referencia, hay que tener siempre presentes tales excepciones.

De la referencia y del sentido de un signo hay que distinguir también la representación [*Vorstellung*] a él asociada. Si la referencia de un signo es un objeto perceptible sensiblemente, la representación que yo tengo de él es entonces una imagen interna formada a partir de recuerdos de impresiones sensibles que he tenido, y de actividades que he practicado, tanto internas como externas.[3] Esa imagen está frecuentemente impregnada de sentimientos; la claridad de cada una de sus partes es diversa y vacilante. No siempre, ni siquiera en la misma persona, está unida la misma representación al mismo sentido. La representación es subjetiva: la representación de uno no es la del otro. Por ello se dan múltiples diferencias en las representaciones asociadas al mismo sentido. Un pintor, un jinete y un zoólogo asociarán probablemente representaciones muy distintas con el nombre "Bucéfalo". Por eso la representación se distingue esencialmente del sentido de un signo, el cual puede ser propiedad común de muchos y que, por tanto, no es parte o modo de la mente individual; pues ciertamente no se podrá negar que la humanidad tiene un tesoro común de pensamientos, que son transmitidos de una generación a otra.[4]

Mientras que según lo dicho, no existe ninguna objeción para hablar del sentido sin más, en el caso de la representación, en cambio, para ser estrictos, hay que añadir a quién pertenece y en qué momento. Quizás alguien podría decir: al igual que uno asocia con la misma palabra esta representación y el otro otra, también uno puede asociarle este sentido y el otro este otro. Sin embargo, hay una diferencia en el modo de darse esta asociación. Nada impide que ambos conciban el mismo sentido; pero no pueden tener la misma representación. *Si duo idem faciunt, non est idem.* Cuando dos personas se representan lo mismo, cada una tiene, sin embargo, su representación propia. A veces es ciertamente posible constatar diferencias de representaciones y hasta de sensaciones de personas distintas; pero no es posible una comparación exacta,

[3] Podemos poner también, junto a las representaciones, las intuiciones o datos sensoriales en los que las impresiones sensibles y las actividades mismas toman el lugar de las huellas que han dejado en la mente. Para nuestro propósito, la diferencia es irrelevante, tanto más cuanto que, junto a las sensaciones y actividades, los recuerdos de éstas ayudan a completar la imagen intuitiva. Por intuición o dato sensorial, sin embargo, puede entenderse también un objeto, en la medida en que éste sea perceptible sensiblemente o espacial.

[4] De ahí que sea inútil designar con la palabra "representación" cosas fundamentalmente tan diferentes.

porque no podemos tener juntas ambas representaciones en la misma conciencia.

La referencia de un nombre propio es el objeto mismo que designamos con él; la representación que tenemos entonces es totalmente subjetiva; entre ambas se halla el sentido, que ciertamente ya no es subjetivo como la representación, pero, con todo, tampoco es el objeto mismo. Quizás sea adecuada la siguiente analogía para ilustrar estas relaciones. Alguien observa la Luna a través de un telescopio. Comparo la Luna con la referencia; es el objeto de observación, que es proporcionado por la imagen real que queda dibujada sobre el cristal del objetivo del interior del telescopio, y por la imagen en la retina del observador. La primera imagen la comparo con el sentido; la segunda, con la representación o intuición. La imagen formada dentro del telescopio es, en verdad, sólo parcial; depende del lugar de observación; pero con todo es objetiva, en la medida en que puede servir a varios observadores. Podrían incluso disponerse las cosas de modo que pudieran utilizarla varios simultáneamente. Pero, de las imágenes retinianas, cada uno tendría la suya propia. Difícilmente podría lograrse una congruencia geométrica, debido a la diferente constitución de los ojos, y una coincidencia real estaría excluida. Podría quizás seguir desarrollándose esta analogía, admitiendo que la imagen retiniana de *A* podría hacerse visible a *B*; o también que el propio *A* podría ver su propia imagen retiniana en un espejo. Con esto se mostraría quizás que una representación puede ser tomada ciertamente como objeto, pero en sí misma no es nunca para el observador lo que es para el que la tiene. Pero seguir en esta dirección nos apartaría demasiado de lo que nos ocupa.

Podemos ahora distinguir tres niveles de diferenciación entre palabras, expresiones u oraciones enteras. O bien la diferencia concierne a lo sumo a las representaciones, o bien al sentido pero no a la referencia, o bien, en fin, también a la referencia. Con respecto al primer nivel, hay que hacer notar que, debido a la conexión incierta de las representaciones con las palabras, para uno puede existir una diferencia que otro no encuentra. Las diferencias en la traducción de un escrito original no pasarían de este primer nivel. Entre otras diferencias posibles aquí, están los matices y énfasis con que la poesía [y] la elocuencia tratan de revestir el sentido. Estos matices y énfasis no son objetivos, sino que el oyente o el lector deben evocarlos dejándose llevar por las alusiones del poeta o del orador. Naturalmente, sin cierto parentesco entre las representaciones humanas, el arte no sería posible; pero nunca puede averiguarse exactamente en qué medida nuestras representaciones corresponden a los propósitos del poeta.

En lo que sigue, no hablaremos ya más de las representaciones e intuiciones; se las ha mencionado aquí únicamente para que la representación que despierta una palabra en un oyente no se confunda con su sentido o su referencia.

Para posibilitar un modo de expresarnos breve y exacto, vamos a establecer la siguiente terminología:

Un nombre propio (palabra, signo, fila de signos o expresión) expresa su sentido, se refiere a su referencia o la designa. Al usar un signo expresamos su sentido y designamos su referencia.

Los idealistas y los escépticos quizás habrán objetado desde hace ya rato a todo esto lo siguiente: "Hablas aquí sin más de la Luna como de un objeto. ¿Pero cómo sabes tú que el nombre 'la Luna' tiene alguna referencia, cómo sabes que haya algo que tenga referencia?" Respondo que nuestro propósito no es hablar de nuestra representación de la Luna, y que tampoco nos conformamos con el sentido, cuando decimos "la Luna", sino que presuponemos una referencia. Sería no entender el sentido si se quisiera suponer que la oración "la Luna es menor que la Tierra" habla de una representación de la Luna. Si ésta fuera la intención del que habla, utilizaría la expresión "mi representación de la Luna". Desde luego, al hacer aquella presuposición podemos equivocarnos, y tales equivocaciones se dan ciertamente. Pero aquí no tenemos por qué responder a la cuestión de que quizás siempre cometemos tal equivocación; por el momento basta con señalar nuestro propósito al hablar o al pensar para justificar que hablamos de la referencia de un signo, si bien con la reserva: en caso de que exista tal cosa.

Hasta aquí sólo se han examinado sentido y referencia de las expresiones, palabras, o signos, que hemos llamado nombres propios. Ahora vamos a preguntarnos por el sentido y la referencia de una oración asertiva completa. Una oración tal

contiene un pensamiento.[5] ¿Debe ser considerado este pensamiento como su sentido o como su referencia? Supongamos que la oración tiene una referencia. Si sustituimos en ella una palabra por otra con la misma referencia, pero con distinto sentido, esto no podrá tener ningún efecto sobre la referencia de la oración. Sin embargo, vemos que, en tales casos, el pensamiento cambia; pues, por ejemplo, el pensamiento de la oración "el lucero matutino es un cuerpo iluminado por el Sol" es distinto de la oración "el lucero vespertino es un cuerpo iluminado por el Sol". Alguien que no supiera que el lucero vespertino es el lucero matutino podría tomar un pensamiento por verdadero y el otro por falso. El pensamiento no puede, pues, ser la referencia de la oración; por el contrario, deberemos concebirlo como su sentido. ¿Pero qué hacemos con la referencia? ¿Tenemos derecho a preguntar por ella? ¿Acaso la oración entera tiene sólo sentido, pero no referencia? En todo caso, es de esperar que se den tales oraciones, lo mismo que hay partes de una oración que tienen sentido, pero no referencia. Y las oraciones que contienen nombres propios sin referencia serán de este tipo. La oración "Ulises fue dejado en Ítaca profundamente dormido" tiene evidentemente un sentido. Pero, como es dudoso que el nombre "Ulises" que aparece en ella tenga una referencia, también es dudoso que lo tenga la oración entera. Pero lo que es seguro, no obstante, es que alguien que crea en serio que la oración es verdadera o falsa también atribuirá al nombre "Ulises" una referencia, y no sólo un sentido; pues es justamente de la referencia de este nombre de lo que se afirma o se niega el predicado. Quien no admita que tiene una referencia no podrá afirmar ni negar de ella un predicado. Pero entonces sería innecesario llegar hasta la referencia del nombre; uno podría contentarse con el sentido, en el caso de querer quedarse sólo con el pensamiento. Si sólo nos interesásemos por el sentido de la oración, por el pensamiento, sería innecesario preocuparse por la referencia de una parte de la oración; pues con respecto al sentido de la oración, únicamente es relevante el sentido, no la referencia, de esa parte. El pensamiento sigue siendo el mismo, tanto si el nombre "Ulises" tiene una referencia como

[5] Por pensamiento no entiendo la actividad subjetiva de pensar, sino su contenido objetivo, que es apto para ser propiedad común de muchos.

si no la tiene. Que nos interesemos por hallar la referencia de una parte de la oración es señal de que también admitimos y exigimos, en general, una referencia para la oración misma. El pensamiento pierde valor para nosotros tan pronto como vemos que a una de sus partes le falta la referencia. Estamos, pues, bien justificados al no contentarnos con el sentido de una oración, y preguntarnos también por su referencia. ¿Pero por qué queremos que cada nombre propio no tenga únicamente un sentido, sino también una referencia? ¿Por qué no nos basta el pensamiento? Porque nos interesa en alguna medida su valor veritativo. No siempre es éste el caso. Al escuchar un poema épico, por ejemplo, nos cautivan, además de la eufonía del lenguaje, el sentido de las oraciones y las representaciones y sentimientos despertados por ellos. Si nos preguntásemos por su verdad, abandonaríamos el goce estético y nos dedicaríamos a un examen científico. De ahí que nos sea indiferente el que el nombre "Ulises", por ejemplo, se refiera a algo o no, mientras consideremos el poema como obra de arte.[6] Es la búsqueda de la verdad lo que nos incita a avanzar del sentido a la referencia. Hemos visto que a una oración hay que buscarle una referencia siempre que interesa la referencia de las partes componentes; y que esto es el caso cuando, y sólo cuando, nos preguntamos por el valor veritativo.

Por esto nos vemos impulsados a admitir el *valor veritativo* de una oración como su referencia. Por valor veritativo de una oración entiendo la circunstancia de que sea verdadera o falsa. No hay más valores veritativos. En aras de la brevedad, al uno lo llamo lo verdadero, al otro lo falso. Cada oración asertiva, en la que tenga importancia la referencia de las palabras, debe ser considerada, pues, como un nombre propio, y su referencia, en caso de que exista, es o bien lo verdadero o bien lo falso. Estos dos objetos son admitidos, aunque sólo sea tácitamente, por todo aquel que haga juicios, que tenga algo por verdadero, e incluso por el escéptico. El designar los valores veritativos como objetos puede parecer aquí todavía una ocurrencia arbi-

[6] Sería de desear que tuviéramos una denominación especial para los signos que sólo han de tener sentido. Si llamásemos a éstos imágenes, las palabras del actor en la escena serían entonces imágenes, y hasta el propio actor sería una imagen.

traria y quizás un mero juego de palabras, del que no deberían sacarse consecuencias fundamentales. Lo que yo llamo objeto sólo podrá ser examinado con más precisión en conexión con el concepto y la relación. Esto quiero reservarlo para otro ensayo.* Pero, con todo, aquí podría ya quedar claro que en todo juicio[7] –por muy evidente que éste sea– se ha dado ya el paso del nivel de los pensamientos al nivel de las referencias (de lo objetivo).

Alguien podría verse tentado a considerar la relación del pensamiento con lo verdadero no como la que hay entre el sentido y la referencia, sino como la relación del sujeto con el predicado. Ciertamente puede decirse: "El pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero." Pero si se examina esto más atentamente, se observa que con ello no se dice realmente nada más de lo que se dice en la simple oración "5 es un número primo". La afirmación de la verdad radica, en ambos casos, en la forma de la oración asertiva, y cuando ésta no tiene su fuerza habitual, por ejemplo en boca de un actor en escena, la oración "el pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero" contiene también únicamente un pensamiento, a saber, el mismo pensamiento que la oración simple "5 es un número primo". De aquí puede desprenderse que la relación del pensamiento con lo verdadero no debe compararse a la del sujeto con el predicado. En efecto, sujeto y predicado (entendidos en sentido lógico) son partes del pensamiento; para el conocimiento, se hallan al mismo nivel. Ensamblando sujeto y predicado siempre se consigue únicamente un pensamiento, pero no se pasa nunca de un sentido a su referencia, de un pensamiento a su valor veritativo. Nos movemos en el mismo nivel, no se pasa de un nivel al siguiente. Un valor veritativo no puede ser parte de un pensamiento, como tampoco puede serlo el Sol, porque no es un sentido, sino un objeto.

Si es correcta nuestra suposición de que la referencia de una oración es su valor veritativo, entonces éste debe permanecer inmodificado cuando una parte de la oración se sustituye por

* Se refiere de nuevo a "Sobre concepto y objeto", en este volumen pp. 277–292. [N. del t.]

[7] Un juicio no es para mí la mera aprehensión de un pensamiento, sino el reconocimiento de su verdad.

una expresión con la misma referencia, pero con distinto sentido. Y, de hecho, éste es el caso. Leibniz explica correctamente: *"Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate."* Realmente, ¿qué otra cosa, sino el valor veritativo, podría encontrarse que pertenezca sin excepción a toda oración en la que sea relevante la referencia de las partes componentes, y que permanezca inmodificado en una sustitución del tipo mencionado?

Ahora bien, si el valor de verdad de una oración es su referencia, resulta que, por una parte, todas las oraciones verdaderas tienen la misma referencia, y que, por otra, también todas las oraciones falsas tienen la misma referencia. De ahí que, en la referencia de la oración, se prescinda de todo lo específico. Nunca podemos contentarnos tan sólo con la referencia de una oración; pero tampoco el mero pensamiento proporciona ningún conocimiento, sino únicamente el pensamiento junto con su referencia, es decir, su valor veritativo. El juzgar puede ser considerado como el paso de un pensamiento a su valor veritativo. Naturalmente, esto no debe ser tomado como una definición. El juzgar es precisamente algo muy singular e incomparable. También podría decirse que juzgar es distinguir partes dentro de un valor veritativo. Esta distinción ocurre retrocediendo al pensamiento. A cada sentido que pertenezca un valor veritativo correspondería su modo propio de descomposición. La palabra "parte" la he utilizado aquí de una manera peculiar. En efecto, he transferido la relación del todo a la parte en la oración a su referencia, al llamar a la referencia de una palabra parte de la referencia de la oración cuando esa palabra es parte de esa oración. Este modo de hablar es naturalmente atacable, porque, en el caso de la referencia, la parte restante no queda determinada por el todo y la parte escogida, y porque la palabra parte se emplea para los cuerpos en un sentido distinto. En su lugar, debería crearse una expresión apropiada.

Vamos ahora a seguir comprobando la suposición de que el valor veritativo de una oración es su referencia. Hemos hallado que el valor veritativo de una oración permanece inmodificado cuando en ésta sustituimos una expresión por otra con igual referencia: pero todavía no hemos considerado el caso en que la expresión que ha de sustituirse es ella misma una oración. Si

nuestro punto de vista es correcto, el valor veritativo de una oración, que contiene a otra como parte, debe permanecer inmodificado si sustituimos la oración componente por otra cuyo valor veritativo sea el mismo. Hay que esperar excepciones, cuando el todo o la oración componente están en discurso directo o indirecto; pues, como hemos visto, la referencia de las palabras no es entonces la habitual. Una oración se refiere en el discurso directo a otra oración, y en el indirecto, a un pensamiento.

Nos vemos, pues, llevados al estudio de las oraciones subordinadas. Éstas aparecen como partes de una estructura oracional que, desde el punto de vista lógico, es asimismo una oración, a saber, la oración principal. Pero en este punto nos enfrentamos a la pregunta de si también vale para las oraciones subordinadas el que su referencia sea un valor veritativo. En el discurso indirecto sabemos ya que ocurre lo contrario. Los gramáticos consideran las oraciones subordinadas como representantes de partes de la oración general, y, según eso, las denominan cláusulas nominales, adjetivales y adverbiales.* De aquí podría surgir la suposición de que la referencia de una oración subordinada no es un valor veritativo, sino que es análoga a la de un nombre, un adjetivo o un adverbio, en resumen, a la de una parte de la oración, cuyo sentido no es un pensamiento, sino sólo una parte del mismo. Únicamente una investigación más detenida puede proporcionar claridad sobre este punto. En ella, no nos atendremos estrictamente a las categorías gramaticales, sino que reuniremos lo que es lógicamente similar. Busquemos primero aquellos casos en los que el sentido de la oración subordinada, como acabamos de suponer, no es un pensamiento autónomo.

Las oraciones nominales abstractas introducidas mediante "que" pertenecen también al discurso indirecto, del cual hemos visto que en él las palabras tienen una referencia indirecta que coincide con lo que habitualmente es su sentido. En este caso, pues, la oración subordinada tiene como su referencia un pensamiento, no un valor veritativo; como su sentido, no un pensamiento, sino el sentido de las palabras "el pensamiento de que...", el cual es sólo parte del pensamiento de toda la estructura oracional. Esto sucede después de "decir", "oír", "opinar", "estar convencido", "concluir", y palabras parecidas.[8] La cuestión aparece distinta, y ciertamente bastante complicada, después de palabras como "conocer", "saber", "imaginarse", lo cual será estudiado más adelante.

Que en los casos mencionados en primer término la referencia de la cláusula subordinada es, en realidad, el pensamiento, se ve también por el hecho de que, para la verdad del todo, es indiferente que aquel pensamiento sea verdadero o falso. Compárense, por ejemplo, las dos oraciones: "Copérnico creía que las órbitas de los planetas eran círculos" y "Copérnico creía que el movimiento aparente del Sol es producido por el movimiento real de la Tierra". Sin perjuicio de la verdad, se puede sustituir aquí una oración subordinada por la otra. La oración principal, junto con la subordinada, tiene por sentido únicamente un solo pensamiento, y la verdad del todo no implica ni la verdad ni la falsedad de la subordinada. En tales casos no está permitido sustituir, en la oración subordinada, una expresión por otra que tenga la misma referencia habitual, sino solamente por una que tenga la misma referencia indirecta, es decir, el mismo sentido habitual. Si alguien quisiera sacar la conclusión: la referencia de una oración no es su valor veritativo, "pues entonces podría sustituirse en todas partes por otra oración con el mismo valor veritativo", habría demostrado demasiado: con la misma razón podría afirmarse que la referencia de la palabra "lucero matutino" no es Venus; pues no en todas partes podría decirse "Venus" en vez de "lucero matutino". Correctamente sólo puede deducirse que la referencia de una oración *no siempre* es su valor veritativo, y que "lucero matutino" no siempre se refiere al planeta Venus, a saber, en el caso en que esa palabra tenga su referencia indirecta. Seme-

* Hemos traducido "*Nennsatz*" por "cláusula nominal", "*Beisatz*" por "cláusula adjetival" y "*Adverbsatz*" por "cláusula adverbial". Con esta clasificación más o menos gramatical, Frege quiere distinguir entre oraciones que podrían ser sustituidas por un nombre, por un adjetivo calificativo o por locuciones adverbiales, respectivamente. [N. del t.]

[8] En "*A* mintió al decir que había visto a *B*", la cláusula subordinada se refiere a un pensamiento, del cual se dice, en primer lugar, que *A* lo afirmó como verdadero, y, en segundo lugar, que *A* estaba convencido de su falsedad.

jante excepción se presenta en las oraciones subordinadas que acabamos de examinar, cuya referencia es un pensamiento.

Cuando se dice "parece que...", lo que se quiere decir es "me parece que..." u "opino que..." Tenemos, pues, el mismo caso. Igualmente ocurre con expresiones como "alegrarse", "lamentar", "aprobar", "censurar", "esperar", "temer". Cuando, hacia el fin de la batalla de Belle-Alliance, Wellington se alegró de que los prusianos vinieran, la razón de su alegría era una convicción. Si hubiera estado equivocado, no se habría alegrado menos mientras hubiese durado su ilusión, y antes de adquirir la convicción de que venían los prusianos no podía alegrarse de ello, si bien en realidad ya se acercaban.

Así como una convicción o una creencia es razón de un sentimiento, también puede ser razón de otra convicción, como ocurre en la inferencia. En la oración: "De la redondez de la Tierra, Colón infirió que viajando hacia el oeste podría alcanzar la India", tenemos como referencia de las partes dos pensamientos: que la Tierra es redonda, y que Colón puede alcanzar la India viajando hacia el oeste. Nuevamente, aquí importa tan sólo que Colón estaba convencido de lo uno y de lo otro, y que una convicción era la razón de la otra. Que la Tierra sea realmente redonda y que Colón viajando hacia el oeste pudiese realmente alcanzar la India, tal como él pensaba, es indiferente para la verdad de nuestra oración; pero no es indiferente que pongamos, en vez de "la Tierra", "el planeta que está acompañado de una luna cuyo diámetro es mayor que la cuarta parte de su propio diámetro". También aquí tenemos la referencia indirecta de las palabras.

Éste es el caso también de las cláusulas adverbiales de finalidad con "a fin de que"; pues evidentemente la finalidad es un pensamiento; a eso se debe la referencia indirecta de las palabras, y el modo subjuntivo.

Una oración subordinada con "que" después de "mandar", "pedir", "prohibir" aparece en estilo directo en forma de imperativo. Tal oración no tiene referencia, sino sólo un sentido. Una orden, un ruego, no son ciertamente pensamientos, pero, con todo, están al mismo nivel que el pensamiento. De ahí que, en las subordinadas que dependen de "mandar", "pedir", etc., las palabras tienen su referencia indirecta. La referencia de una de estas oraciones no es, pues, un valor veritativo, sino una orden, un ruego, o cosas similares.

Análogamente ocurre en el caso de la pregunta indirecta, en giros tales como "dudar de que", "no saber que". Es fácil ver que también aquí hay que considerar que las palabras tienen su referencia indirecta. Las interrogativas indirectas con "quién", "qué", "dónde", "cuándo", "cómo", "por medio de qué", etc., a veces se asemejan aparentemente mucho a cláusulas adverbiales en las que las palabras tienen su referencia usual. Lingüísticamente, estos casos se diferencian por el modo del verbo. En el caso del subjuntivo tenemos preguntas indirectas y referencia indirecta de las palabras, de modo que un nombre propio no puede ser sustituido en general por otro nombre del mismo objeto.

En los casos considerados hasta aquí, las palabras de las oraciones subordinadas tienen su referencia indirecta, y por esto es explicable que también la referencia de la oración subordinada misma sea indirecta; es decir, no un valor veritativo, sino un pensamiento, una orden, un ruego, una pregunta. La oración subordinada podría ser concebida como nombre; se podría incluso decir: como nombre propio del pensamiento, la orden, etc., puesto que como tal aparece en el contexto de la estructura oracional.

Llegamos ahora a otras oraciones subordinadas, en las que las palabras tienen ciertamente su referencia usual, pero sin que aparezca un pensamiento como sentido, ni un valor veritativo como referencia. Cómo es esto posible, se verá claramente mediante ejemplos.

> "Quien descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias murió en la miseria."

Si en este caso la oración subordinada tuviera como sentido un pensamiento, tendría que ser posible expresarlo también en una oración principal. Pero esto no puede ser, porque el sujeto gramatical "Quien" no tiene ningún sentido independiente, sino que sirve de nexo con el segundo miembro de la oración "murió en la miseria". De ahí también que el sentido de la oración subordinada no sea un pensamiento completo y

que su referencia no sea un valor veritativo, sino Kepler. Podría objetarse que el sentido del todo contiene, no obstante, un pensamiento como parte, a saber, el de que hubo uno que descubrió por primera vez la forma elíptica de las órbitas planetarias; pues quien tuviera por verdadero el todo no podría negar esta parte. Lo último es indiscutible; pero únicamente debido a que, en caso contrario, la subordinada "quien descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias" no tendría ninguna referencia. Cuando se afirma algo, siempre es evidente la suposición previa de que los nombres propios utilizados, ya sean simples o compuestos, tienen una referencia. Así pues, si se afirma "Kepler murió en la miseria", se presupone con ello que el nombre "Kepler" designa algo; pero de esto, sin embargo, no se sigue que en el sentido de la oración "Kepler murió en la miseria" esté contenido el pensamiento de que el nombre "Kepler" designa algo. Si ése fuera el caso, la negación no podría ser

> "Kepler no murió en la miseria",

sino

> "Kepler no murió en la miseria, o bien el nombre 'Kepler' carece de referencia."

Que el nombre "Kepler" designa algo es, por el contrario, presuposición tanto de la afirmación

> "Kepler murió en la miseria",

como de la contraria. Ahora bien, resulta que las lenguas tienen el defecto de que en ellas son posibles expresiones que, por su forma gramatical, están destinadas a designar un objeto, pero que, en casos especiales, no consiguen este objetivo, porque esto depende de la verdad de una oración. Por eso depende de la verdad de la oración

> "hubo uno que descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias",

el que la subordinada

> "quien descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias"

designe realmente un objeto, o bien que sólo produzca la apariencia de ello, careciendo de hecho de referencia. Y así es como llega a parecer que nuestra subordinada contiene, como parte de su sentido, el pensamiento de que hubo uno que descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias. Si esto fuera correcto, la negación debería ser:

> "quien descubrió por primera vez la forma elíptica de las órbitas planetarias, no murió en la miseria, o bien no hubo nadie que descubriese la forma elíptica de las órbitas planetarias".

Esto surge, pues, de una imperfección del lenguaje, de la que, por lo demás, tampoco está completamente libre el lenguaje simbólico del análisis matemático; también en este último caso pueden aparecer filas de signos que producen la ilusión de que refieren a algo, pero que, por lo menos hasta este momento, todavía carecen de referencia, como por ejemplo, las series divergentes infinitas. Esto puede remediarse, por ejemplo, mediante la estipulación especial de que las series divergentes infinitas tienen que referirse al número 0. De un lenguaje lógicamente perfecto (conceptografía) hay que exigir que cada expresión, que se haya formado como nombre propio a partir de signos ya introducidos de manera gramaticalmente correcta, designe realmente también un objeto, y que no se introduzca ningún signo como nombre propio sin que antes no se le haya asegurado una referencia. En los tratados de lógica se previene en contra de la multivocidad de las expresiones como fuente de errores lógicos. Creo que es por lo menos igualmente oportuna la prevención frente a los nombres propios aparentes que no tienen ninguna referencia. La historia de las matemáticas podría narrar todos los errores que han surgido de ahí. Éstos conducen con frecuencia al abuso demagógico, quizás más todavía que las palabras multívocas. Puede servir de ejemplo "la voluntad del pueblo", pues es fácil establecer que, por lo menos, no hay una referencia universalmente aceptada de esta expresión. Por esto no es irrelevante cegar de una vez por todas la fuente de esos errores, por lo menos en la ciencia. Objeciones como la antes discutida serán entonces imposibles, porque nunca podrá depender de la ver-

dad de un pensamiento el que un nombre propio tenga una referencia.

Podemos someter a estudio estas cláusulas nominales juntamente con una clase de cláusulas adjetivales* y adverbiales que están lógicamente emparentadas con las primeras.

También algunas cláusulas adjetivales pueden servir para formar nombres propios compuestos, si bien esto no lo consiguen por sí solas, como en el caso de las nominales. Estas cláusulas adjetivales deben ser tomadas como adjetivos calificativos. En vez de "la raíz cuadrada de 4 que es menor que 0", puede decirse también "la raíz cuadrada negativa de 4". Nos hallamos aquí ante el caso en que, a partir de una expresión conceptual, se forma un nombre propio compuesto con la ayuda del artículo definido en singular; lo cual, de todos modos, solamente está permitido cuando cae bajo el concepto un objeto y sólo uno.[9] Las expresiones conceptuales pueden formarse de tal manera que se indiquen sus características por medio de cláusulas adjetivales, como en nuestro ejemplo por medio de la oración "que es menor que 0". Es evidente que semejante cláusula adjetival, lo mismo que antes la cláusula nominal, no puede tener un pensamiento como sentido, ni un valor veritativo como referencia, sino que tiene como sentido solamente una parte de un pensamiento que, en algunos casos, puede expresarse también mediante un único calificativo. También en este caso, lo mismo que en el de las cláusulas nominales, falta el sujeto independiente y con esto también la posibilidad de reproducir el sentido de la subordinada mediante una independiente.

Desde un punto de vista lógico, los lugares, instantes e intervalos son objetos; por lo tanto, la denominación lingüística de un determinado lugar, de un determinado momento o intervalo temporal debe ser considerada como un nombre propio. Las

* Traducimos por "cláusula adjetival" el alemán "Beisatz": se trata de una oración (que gramaticalmente será casi siempre relativa) cuya función es equivalente a la de un atributo o adjetivo calificativo. [N. del t.]

[9] Según lo anteriormente observado, a una expresión semejante, de hecho se le debería asegurar siempre una referencia por medio de una estipulación especial, por ejemplo, por medio de la definición de que su referencia será el número 0 siempre que bajo el concepto no caiga ningún objeto o caiga más de uno.

cláusulas adverbiales de lugar y de tiempo pueden entonces ser utilizadas para la formación de un nombre propio tal, de manera análoga a como lo acabamos de ver para las cláusulas nominales y adjetivales. Asimismo pueden formarse expresiones de conceptos que se refieren a lugares, etc. También aquí hay que hacer notar que no puede reproducirse el sentido de estas subordinadas mediante una principal, porque falta un componente esencial, a saber, la determinación espacial o temporal, a la que sólo se alude por medio de un pronombre relativo o una conjunción.[10]

Incluso en las oraciones condicionales puede reconocerse generalmente, como lo acabamos de ver en el caso de las cláusulas nominales, adjetivales y adverbiales, un componente que indica indeterminadamente, al que corresponde otro igual en la oración consecuente. Toda vez que los dos se indiquen el uno al otro, se combinan ambas oraciones en una totalidad que, por lo general, expresa solamente un pensamiento. En la oración:

> "si un número es menor que 1 y mayor que 0, también su cuadrado es menor que 1 y mayor que 0",

[10] Por lo demás, respecto de estas oraciones, son posibles interpretaciones ligeramente distintas. El sentido de la oración "después de que Schleswig-Holstein se hubo separado de Dinamarca, se enemistaron Prusia y Austria" podemos verterlo bajo la forma "después de la separación de Schleswig-Holstein de Dinamarca, se enemistaron Prusia y Austria". En esta versión está suficientemente claro que no debe considerarse parte de este sentido el pensamiento de que Schleswig-Holstein se separó alguna vez de Dinamarca, sino que esto es la condición necesaria para que la expresión "después de la separación de Schleswig-Holstein de Dinamarca" tenga alguna referencia. Naturalmente, nuestra oración puede interpretarse de tal manera que con ella se diga que Schleswig-Holstein se separó alguna vez de Dinamarca. Entonces tenemos un caso que deberá estudiarse más adelante. Para hacer más clara la diferencia, pongámonos en la mente de un chino que, por sus escasos conocimientos de la historia europea, crea que es falso que Schleswig-Holstein se haya separado alguna vez de Dinamarca. Éste considerará que nuestra oración, concebida de la primera manera, no es ni verdadera ni falsa, y rehusará darle referencia alguna, porque ésta le faltaría a la subordinada. Esta última sólo aparentemente daría una determinación temporal. Si, por el contrario, concibe nuestra oración del segundo modo, hallaría expresado en ella un pensamiento que creería falso, junto a una parte que, para él, carecería de referencia.

este componente es "un número" en el antecedente o condicional y "su" en el consecuente. Justamente debido a esa indeterminación, obtiene el sentido la generalidad que se espera de una ley. Pero precisamente eso hace también que el antecedente por sí solo no tenga como sentido ningún pensamiento completo, y que exprese, junto con el consecuente, un pensamiento y uno solo, cuyas partes ya no son pensamientos. En general, es erróneo creer que en un juicio hipotético se interrelacionan dos juicios. Si se dice esto o algo parecido, la palabra "juicio" se usa en el mismo sentido que yo he asociado con la palabra "pensamiento", de modo que yo debería decir: "En un pensamiento hipotético, se interrelacionan dos pensamientos". Esto podría ser verdadero únicamente en el caso en que no hubiese un componente que indicase indeterminadamente;[11] pero entonces tampoco habría generalidad.

Cuando debe indicarse indeterminadamente un instante en la oración condicional o antecedente y en el consecuente, esto se logra no pocas veces solamente por medio del *tiempo presente* del verbo, que en este caso no connota el presente. Esta forma gramatical es entonces el componente que indica indeterminadamente en la oración principal y en la subordinada. "Cuando el Sol se halla en el trópico de Cáncer, tenemos el día más largo en el hemisferio norte", es un ejemplo de este caso. También aquí es imposible expresar el sentido de la subordinada mediante una principal, ya que este sentido no es un pensamiento completo; pues si dijéramos: "el Sol se halla en el trópico de Cáncer", nos referiríamos con ello a nuestro presente y, de este modo, cambiaríamos el sentido. Todavía menos es el sentido de la principal un pensamiento; tan sólo el todo consistente en la principal y la subordinada es lo que contiene un pensamiento. Por cierto, también puede indicarse indeterminadamente varios componentes comunes en el antecedente y el consecuente.

Es obvio que las oraciones nominales que comienzan con "quien", "lo que" y adverbiales con "donde", "cuando", "dondequiera que", " siempre que" frecuentemente deben ser consideradas, en lo concerniente a su sentido, como oraciones condicionales; por ejemplo: "Quien coge barro, se ensucia".

[11] A veces falta una indicación lingüística explícita y debe ser deducida de todo el contexto.

También algunas cláusulas adjetivales representan oraciones condicionales. De este modo, podemos expresar el sentido de nuestra oración antes mencionada también de la siguiente forma: "el cuadrado del número que es menor que 1 y mayor que 0 es menor que 1 y mayor que 0".

La situación parece totalmente distinta cuando el componente común de la principal y de la subordinada es designado con un nombre propio. En la oración:

> "Napoleón, quien se dio cuenta del peligro en su flanco derecho, dirigió él mismo a sus guardias contra la posición enemiga",

se expresan los dos pensamientos siguientes:

1. Napoleón se dio cuenta del peligro en su flanco derecho;
2. Napoleón dirigió él mismo a sus guardias contra la posición enemiga.

Cuándo y dónde ocurrió esto puede saberse ciertamente sólo por el contexto, pero por eso mismo debe considerarse determinado. Si la oración entera es dicha como una afirmación, afirmamos con ella al mismo tiempo las dos oraciones componentes. Si una de estas oraciones es falsa, lo es también el todo. Aquí tenemos el caso en que la subordinada por sí sola tiene como sentido un pensamiento completo (si lo completamos con una indicación temporal y espacial). En consecuencia, la referencia de la oración subordinada es un valor veritativo. Podemos esperar, pues, que, sin perjuicio de la verdad del todo, pueda ponerse en su lugar una oración con el mismo valor veritativo. Éste es justamente el caso; sólo debe tenerse en cuenta que su sujeto ha de ser "Napoleón", por una razón puramente gramatical, puesto que sólo entonces puede ponerse la oración en la forma de una cláusula adjetival atribuida a "Napoleón". Pero si se prescinde de la exigencia de que tenga que aparecer en esa forma, y si se admite también la conexión por medio de "y", entonces desaparece esta restricción. Incluso en cláusulas subordinadas que comienzan con "aunque" se expresan pensamientos completos. Esta conjunción no tiene

propiamente ningún sentido y tampoco modifica el sentido de la oración, sino que sólo lo aclara de una manera peculiar.[12] En verdad, podríamos sustituir, sin perjuicio de la verdad del todo, la cláusula concesiva por otra del mismo valor veritativo; pero la aclaración parecería entonces ligeramente inadecuada, como si se quisiera cantar una canción triste de una manera alegre.

En los últimos casos, la verdad del todo incluía la verdad de las oraciones componentes. Caso distinto es aquel en que una oración antecedente expresa un pensamiento completo, lo cual sucede cuando, en lugar del componente que sólo indica, contiene un nombre propio o algo que deba considerarse equivalente. En la oración

> "si ahora el Sol ya ha salido, entonces el cielo está muy nublado",

el tiempo es el presente, o sea, está determinado. También el lugar debe pensarse que está determinado. Aquí puede decirse que se ha establecido una relación entre los valores de verdad del antecedente y del consecuente, o sea, la de que no se da el caso en que el antecedente refiere a lo verdadero y el consecuente a lo falso. Según esto, nuestra oración es verdadera, tanto si el Sol todavía no ha salido ahora, esté el cielo muy nublado o no, como si el Sol ha salido ya y el cielo está muy nublado. Puesto que, en este caso, sólo interesan los valores veritativos, puede sustituirse cada una de las cláusulas componentes por otra del mismo valor veritativo, sin que cambie el valor veritativo del todo. Por supuesto, aquí la aclaración sería generalmente inoportuna: el pensamiento parecería ligeramente absurdo; pero esto no tiene nada que ver con su valor veritativo. En todo esto, debe tenerse siempre en cuenta que hay pensamientos adicionales que resuenan y que, sin embargo, no están expresados y que por ello no deben ser incluidos en el sentido de la oración, no interesándonos, por lo tanto, su valor veritativo.[13]

[12] Análogamente ocurre con "pero" y "no obstante".

[13] Podría expresarse el pensamiento de nuestra oración también así: "o bien el Sol aún no ha salido ahora, o el cielo está muy nublado", de donde se infiere cómo debe concebirse este tipo de conexión de oraciones.

Con esto se habrían discutido los casos simples. Echemos una mirada retrospectiva hacia lo que hemos aprendido.

La cláusula subordinada, por lo general, no tiene como sentido ningún pensamiento, sino únicamente una parte de alguno y, en consecuencia, no tiene como referencia ningún valor veritativo. La razón consiste, o bien en que, en la subordinada, las palabras tienen su referencia indirecta, de modo que la referencia, y no el sentido de la cláusula subordinada, es un pensamiento, o bien en que la subordinada es incompleta debido a que hay en ella un componente que sólo indica indeterminadamente, de modo que únicamente junto con la oración principal puede expresar un pensamiento, y entonces, sin perjuicio de la verdad del todo, puede ser sustituida por otra oración del mismo valor veritativo, siempre y cuando no existan impedimentos gramaticales.

Si, después de lo dicho, se examinan todas las cláusulas subordinadas especiales, se encontrarán pronto algunas que no podrán meterse en esas casillas. Por lo que alcanzo a ver, la razón de ello proviene de que estas cláusulas subordinadas no tienen un sentido tan simple. Parece que casi siempre asociamos a un pensamiento principal que expresamos, pensamientos secundarios que, a pesar de no ser expresados, también asocia el oyente a nuestras palabras según leyes psicológicas. Y dado que parecen asociados por sí mismos a nuestras palabras, casi tanto como el propio pensamiento principal, también nosotros queremos expresarlos. Por ello se hace más rico el sentido de la oración, y puede muy bien ocurrir que tengamos más pensamientos simples que oraciones. En algunos casos, la oración tiene que ser entendida de ese modo, mientras que en otros puede ser dudoso si el pensamiento secundario pertenece realmente al sentido de la oración o bien sólo la acompaña.[14] Así, podría quizás encontrarse que en la oración

> "Napoleón, quien se dio cuenta del peligro en su flanco derecho, dirigió él mismo a sus guardias contra la posición enemiga",

[14] Esto puede ser de importancia para la cuestión de saber si una afirmación puede ser una mentira, o un juramento, un perjurio.

no se han expresado únicamente los dos pensamientos antes mencionados, sino también el de que el darse cuenta del peligro fue la razón por la cual dirigió a sus guardias contra la posición enemiga. De hecho, puede dudarse de si este pensamiento sólo está ligeramente sugerido o está realmente expresado. Se nos plantea la pregunta de si nuestra oración sería falsa en el caso de que Napoleón ya hubiese tomado su decisión antes de percibir el peligro. Si, a pesar de esto, nuestra oración fuera verdadera, entonces nuestro pensamiento secundario no debería considerarse parte del sentido de nuestra oración. Probablemente nos decidiríamos por esto último. En el primer caso, la situación sería bastante embrollada: tendríamos más pensamientos simples que oraciones. Si sustituimos también la oración

> "Napoleón se dio cuenta del peligro en su flanco derecho"

por otro del mismo valor veritativo, por ejemplo, por

> "Napoleón tenía ya más de 45 años de edad",

se habría alterado entonces no sólo nuestro primer pensamiento, sino también el tercero, y por ello podría también modificarse su valor veritativo –a saber, en el caso en que su edad no hubiese sido la razón de la decisión de dirigir a sus guardias contra el enemigo. A partir de esto puede comprenderse por qué no siempre en tales casos pueden reemplazarse mutuamente oraciones del mismo valor veritativo, pues, justamente entonces, la oración, gracias a su conexión con otra, expresa más de lo que expresa por sí sola.

Consideremos ahora algunos casos en los que esto sucede regularmente. En la oración

> "Bebel se imagina que la devolución de Alsacia-Lorena acallaría los deseos de venganza de Francia",

se expresan dos pensamientos, de los cuales, no obstante, el primero no pertenece a la oración principal y el otro tampoco a la subordinada, a saber:

1. Bebel cree que la devolución de Alsacia-Lorena acallaría los deseos de venganza de Francia;
2. la devolución de Alsacia-Lorena no acallaría los deseos de venganza de Francia.

En la expresión del primer pensamiento, las palabras de la cláusula subordinada tienen su referencia indirecta, mientras que esas mismas palabras en la expresión del segundo pensamiento, tienen su referencia habitual. Vemos, pues, que en nuestra oración compleja original, la cláusula subordinada debe interpretarse dos veces, con distintas referencias, de las cuales una es un pensamiento y la otra un valor veritativo. Ahora bien, puesto que el valor veritativo no es toda la referencia de la oración subordinada, no podemos sustituir sin más ésta por otra del mismo valor veritativo. Análogamente ocurre con expresiones como "saber", "reconocer", "es sabido".

Por medio de una oración subordinada causal y la correspondiente oración principal, expresamos varios pensamientos, que, sin embargo, no corresponden a cada una de las oraciones aisladas. En la oración

> "porque el hielo es menos denso que el agua, flota en el agua"

tenemos:

1. el hielo es menos denso que el agua;
2. si algo es menos denso que el agua, flota en el agua;
3. el hielo flota en el agua.

No era necesario quizás manifestar explícitamente el tercer pensamiento, al estar contenido en los dos primeros. Por el contrario, ni juntando el primero con el tercero, ni el segundo con el tercero, se obtendría el sentido de nuestra oración. Vemos, pues, que en nuestra cláusula subordinada

> "porque el hielo es menos denso que el agua"

se expresa tanto nuestro primer pensamiento como una parte del segundo. De ahí que no podamos, sin más, sustituir nuestra cláusula subordinada por otra oración con el mismo valor

veritativo; pues eso modificaría nuestro segundo pensamiento y esto también podría fácilmente afectar su valor veritativo.

Análogamente aparece la cuestión en la oración

> "si el hierro fuera menos denso que el agua, flotaría en el agua".

Aquí tenemos los dos pensamientos de que el hierro no es menos denso que el agua y de que algo flota en el agua si es menos denso que el agua. Nuevamente, la cláusula subordinada expresa un pensamiento y una parte del otro.

Si interpretamos la oración antes analizada:

> "después de que Schleswig-Holstein se hubo separado de Dinamarca, se enemistaron Prusia y Austria",

de forma que en ella se exprese el pensamiento de que Schleswig-Holstein se separó alguna vez de Dinamarca, tenemos entonces, en primer lugar, este pensamiento, y en segundo lugar, el pensamiento de que en cierto momento, que queda algo más determinado por medio de la subordinada, Prusia y Austria se enemistaron. También en este caso expresa la subordinada no sólo un pensamiento, sino también una parte de otro. De aquí que, en general, no se pueda sustituir por otra oración con el mismo valor veritativo.

Es difícil agotar todas las posibilidades dadas en el lenguaje; pero, con todo, espero haber hallado, en lo esencial, las razones por las que no siempre se puede sustituir una cláusula subordinada por otra con el mismo valor veritativo, sin perjuicio de la verdad de la oración compleja entera. Estas razones son

1. que la cláusula subordinada no se refiere a ningún valor veritativo, al expresar sólo una parte de un pensamiento;
2. que la subordinada se refiere ciertamente a un valor veritativo, pero no se limita a esto, al comprender su sentido, además de un pensamiento, una parte de otro pensamiento.

El primer caso se da

a) cuando las palabras tienen su referencia indirecta,

b) cuando una parte de la oración indica sólo indeterminadamente, en vez de ser un nombre propio.

En el segundo caso, la oración subordinada puede interpretarse de dos maneras, a saber, una vez con su referencia habitual, la otra con su referencia indirecta; o bien, puede ser que el sentido de una parte de la cláusula subordinada sea, a la vez, componente de otro pensamiento, que unido al sentido expresado directamente en la subordinada constituya el sentido total de la oración principal y de la subordinada.

De todo esto resulta con suficiente probabilidad que los casos en que una cláusula subordinada no es sustituible por otra del mismo valor veritativo no demuestran nada en contra de nuestra idea de que el valor veritativo es la referencia de la oración, cuyo sentido es un pensamiento.

Volvamos a nuestro punto de partida.

Si, en general, encontramos que el valor cognoscitivo de "$a = a$" y "$a = b$" es diferente, ello se explica por el hecho de que, para el valor cognoscitivo, el sentido de la oración, o sea el pensamiento expresado en ella, no entra menos en consideración que su referencia, es decir, su valor veritativo. Ahora bien, si $a = b$, la referencia de "b" es ciertamente la misma que la de "a", y por lo tanto, también el valor veritativo de "$a = b$" es el mismo que el de "$a = a$". Sin embargo, el sentido de "b" puede diferir del sentido de "a", y con ello también será el pensamiento expresado en "$a = b$" diferente del expresado en "$a = a$"; pero entonces las dos oraciones no tienen el mismo valor cognoscitivo. Si, como hemos hecho antes, por "juicio" entendemos el paso del pensamiento a su valor veritativo, entonces también diremos que los juicios son diferentes.

SOBRE CONCEPTO Y OBJETO*

[1892]

En una serie de artículos en esta revista sobre la intuición y su elaboración psíquica, Benno Kerry se ha referido repetidamente a mis *Fundamentos de la aritmética* y a otros de mis escritos, concordando con ellos en parte y en parte rebatiéndolos. Esto no puede ser para mí más que motivo de satisfacción, y creo que la mejor manera de mostrar mi reconocimiento es emprender la discusión de los puntos impugnados por él. Esto me parece tanto más necesario cuanto que su oposición se basa, en parte por lo menos, en una mala interpretación de lo que digo sobre el concepto, la cual podría ser compartida por otros, y también porque esta cuestión es lo suficientemente importante y difícil como para que, independientemente de ese motivo especial, sea tratada con más detenimiento del que me pareció adecuado en mis *Fundamentos*.

La palabra "concepto" se utiliza de distintas maneras, a veces en un sentido psicológico, y a veces en un sentido lógico, y quizás, en una mezcla confusa de ambos. Esta libertad ahora existente halla su limitación natural al exigirse que se mantenga siempre el mismo uso, una vez fijado éste. Yo he decidido hacer estrictamente un uso puramente lógico. La cuestión de si es este uso o el otro el más apropiado la dejaré a un lado por considerarla de menor importancia. Nos podremos poner fácilmente de acuerdo sobre la expresión utilizada, una vez que se

* Título original: "Über Begriff und Gegenstand", publicado en *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie*, no. 16, 1892, pp. 192–205.

Traducción de Carlos Ulises Moulines, originalmente publicada en Frege 1971, revisada para el presente volumen.

haya reconocido que hay algo que merece una denominación especial.

El error de Kerry me parece que ha sido ocasionado por el hecho de que involuntariamente ha confundido su propio uso de la palabra "concepto" con el mío. De allí surgen fácilmente contradicciones, de las que no es responsable mi uso.

Kerry discute lo que denomina mi definición de concepto. A esto quisiera observar ante todo que mi explicación no debe ser entendida como una definición propiamente dicha. Tampoco se puede exigir que todo sea definido, del mismo modo como no se puede exigir del químico que descomponga todas las sustancias. Lo que es simple no puede ser descompuesto, y lo que es lógicamente simple no puede ser propiamente definido. Ahora bien, lo lógicamente simple, al igual que la mayoría de los elementos químicos, no está dado de antemano, sino que sólo se alcanza después de la labor científica. Si se descubre algo que es simple o que, por lo menos hasta el momento, debe ser considerado como simple, habrá que acuñar para ello una denominación, dado que el lenguaje originariamente no tendrá una expresión exactamente correspondiente. No es posible una definición para la introducción de un nombre que corresponda a algo lógicamente simple. Lo único que se puede hacer entonces es inducir al lector o al oyente, por medio de alusiones, a entender lo que se quiere decir con esa palabra.

Kerry no quisiera admitir una diferencia absoluta entre concepto y objeto. Dice:

> Antes hemos expresado la opinión de que la relación entre contenido conceptual y objeto conceptual es, en cierto sentido, una relación peculiar, irreducible; a esto, empero, no hemos unido en absoluto la idea de que las propiedades de ser un concepto y ser un objeto se excluyen entre sí; esta última idea no se deduce de la primera en absoluto, del mismo modo como, si la relación entre padre e hijo fuera irreducible, de ello no se deduciría que alguien no pueda ser a la vez padre e hijo (aunque, naturalmente, no podría ser, por ejemplo, padre de quien es hijo).

¡Continuemos con esta analogía! Si hubiera seres, o los hubiera habido, que aun siendo padres no pudieran ser hijos, en tal caso tales seres evidentemente serían de una naturaleza completamente diferente de todos los hombres que son hijos. Algo parecido ocurre aquí. El concepto —tal como entiendo la palabra— es predicativo.[1] Un nombre de objeto, por el contrario, un nombre propio, es totalmente inadecuado para ser utilizado como predicado gramatical. Esto precisa naturalmente de una explicación para que no parezca falso. ¿Acaso no puede decirse de algo que es Alejandro Magno, o que es el número cuatro, o que es el planeta Venus, del mismo modo como se puede decir de algo que es verde o que es un mamífero? Si se cree esto, entonces no se distinguen los usos de la palabra "es". En los dos últimos ejemplos, esta palabra sirve de cópula, como término meramente formal de la oración. Como tal, a veces puede ser representada por la simple terminación personal del verbo. Compárense, por ejemplo, "esta hoja es verde" [*dieses Blatt ist grün*] y "esta hoja verdea" [*dieses Blatt grünt*]. Decimos aquí que algo cae bajo un concepto, y en tal caso, el predicado gramatical se refiere a ese concepto. Por el contrario, en los tres primeros ejemplos, el "es" se utiliza igual que el signo de igualdad en la aritmética, para expresar una igualdad.[2] En la oración "el lucero matutino es Venus", tenemos dos nombres propios, "lucero matutino" y "Venus", para el mismo objeto. En la oración "el lucero matutino es un planeta", tenemos un nombre propio: "el lucero matutino", y un término conceptual: "un planeta". Lingüísticamente, no ha sucedido ciertamente sino que "Venus" ha sido sustituido por "un planeta"; pero, materialmente, la relación se ha convertido en otra muy diferente. Una igualdad es reversible; el caer un objeto bajo un concepto no es una relación reversible. El "es" en la oración "el lucero matutino es Venus" no es evidentemente la mera cópula, sino que también, por el contenido, es una parte esencial del predicado, de modo que en la palabra "Venus" no está contenido el

[1] O sea, es la referencia de un predicado gramatical.

[2] Utilizo la palabra "igual" y el signo "=" en el sentido de "lo mismo que", "no es sino", "idéntico a". Véanse las *Conferencias sobre el álgebra de la lógica* [*Vorlesungen über die Algebra der Logik*], de E. Schröder (Leipzig, 1890), t. 1, § 1, donde, no obstante, hay que reprochar el hecho de que no se distinga entre las dos relaciones, fundamentalmente distintas, de caer un objeto bajo un concepto y de estar un concepto subordinado a otro concepto. También suscitan objeciones las observaciones sobre la raíz total. El signo $\neq$ de Schröder no representa simplemente la cópula.

predicado entero.[3] En lugar de lo anterior, se podría decir: "el lucero matutino no es sino Venus", y aquí hemos descompuesto en tres palabras lo que antes radicaba en el simple "es", y en "no es sino" el "es" es ya sólo la cópula. Lo que aquí se ha expresado no es pues *Venus*, sino *no es sino Venus*. Estas palabras se refieren a un concepto, bajo el cual, claro está, sólo cae un único objeto. Pero semejante concepto debe seguir siendo distinguido del objeto.[4] Tenemos aquí una palabra, "Venus", que nunca podrá ser propiamente un predicado, si bien puede formar parte de un predicado. La referencia[5] de esta palabra no puede, pues, aparecer nunca como concepto, sino sólo como objeto. Que hay algo de esta clase, tampoco lo discutiría Kerry. No obstante, con ello se habría admitido una diferencia, cuyo reconocimiento es muy importante, entre lo que puede aparecer solamente como objeto y todo lo demás. Y esta diferencia no se borraría ni siquiera si fuera cierto lo que Kerry cree, a saber, que hay conceptos que también pueden ser objetos. Hay realmente casos que parecen apoyar esta opinión. Yo mismo he señalado (*Fundamentos*, § 53, al final) que un concepto puede caer bajo uno superior, lo cual, sin embargo, no tiene que ser confundido con la subordinación de un concepto bajo otro. Kerry no se atiene a esta diferencia, sino que da el siguiente ejemplo: "el concepto 'caballo' es un concepto fácilmente asequible, y es ciertamente uno de los objetos que caen bajo el concepto 'concepto fácilmente asequible' ". ¡Totalmente de acuerdo! Las tres palabras "el concepto 'caballo' " designan un objeto, pero justamente por esto no designan un concepto, tal como yo empleo la palabra. Esto concuerda plenamente con la caracterización dada por mí,[6] según la cual, en singular, el artículo determinado siempre indica un objeto, mientras que el indeterminado acompaña a un término conceptual [*Begriffswort*].

Es verdad que Kerry opina que no se pueden fundamentar estipulaciones lógicas sobre la base de diferencias lingüísticas; pero del modo como yo lo hago, nadie que haga semejantes estipulaciones puede evitarlo, porque sin el lenguaje no podemos entendernos y, por lo tanto, en último término, siempre dependemos de la suposición de que el otro entiende las palabras, las formas y la estructura oracional, en lo esencial, igual que nosotros. Como ya he dicho: yo no quería dar una definición, sino sólo hacer alusiones, apelando para ello al sentimiento común del lenguaje alemán. Viene muy bien al caso resaltar que la diferencia lingüística concuerda tan bien con la real. En el caso del artículo indefinido apenas se podría observar excepción alguna a nuestra regla, a no ser en fórmulas antiguas como "*Ein edler Rat*" [concejal]. La cosa no es tan sencilla en el caso del artículo definido, particularmente en el plural; pero mi caracterización no se refiere a este caso. Hasta donde alcanzo a ver, la cuestión sólo aparece dudosa en el singular cuando éste reemplaza al plural, como en las oraciones: "el turco sitió Viena", "el caballo es un animal cuadrúpedo". Es tan fácil darse cuenta de que estos casos son especiales, que su aparición no hace perder valor a nuestra regla. Está claro que, en la primera oración, "el turco" es el nombre propio de un pueblo. En cuanto a la segunda oración, lo más adecuado es considerarla como un juicio general, tal como: "todos los caballos son animales cuadrúpedos", o bien: "todos los caballos bien constituidos son animales cuadrúpedos", de lo cual se volverá a hablar más tarde.[7] Ahora bien, cuando Kerry dice que mi caracterización es inexacta al afirmar él que en la oración "el concepto, del que

[3] Véanse mis *Fundamentos*, § 66, nota.
[4] Véanse mis *Fundamentos*, § 51.
[5] Véase mi ensayo "Sobre sentido y referencia" [*supra*, pp. 249 y ss.].
[6] *Fundamentos*, § 51, § 66 nota, § 68 nota, p. 80.

[7] Por lo visto, actualmente se tiende a exagerar el alcance del principio de que diferentes expresiones lingüísticas nunca son totalmente equivalentes y de que una palabra nunca puede traducirse exactamente a otra lengua. Quizás se podría ir más allá todavía y afirmar que ni siquiera la misma palabra se concibe de manera idéntica por todos los hombres que hablan una misma lengua. No voy a investigar lo que hay de verdad en estas oraciones, sino sólo quiero subrayar que, con todo, no pocas veces tienen algo en común expresiones diferentes; esto es lo que yo llamo el sentido y, para las oraciones en particular, el pensamiento; en otras palabras: no debe desconocerse que se puede expresar diferentemente el mismo sentido, el mismo pensamiento, con lo cual, por tanto, la diferencia no lo es del sentido, sino sólo de la concepción, el matiz, la coloración del sentido, y ésta no entra en consideración para la lógica. Es posible que una oración no dé ni más ni menos información que otra; y, a pesar de toda la diversidad de las lenguas, la humanidad tiene un tesoro común de pensamientos. Si se quisiera prohibir cualquier transformación de la expresión, bajo el pretexto de que así se cambiaría también el contenido, la lógica quedaría totalmente paralizada, pues su tarea es ciertamente irrea-

estoy hablando ahora, es un concepto individual", el nombre compuesto de las siete primeras palabras se refiere sin duda a un concepto, es que no entiende la palabra "concepto" en mi sentido, y la contradicción no yace en mis afirmaciones. Pero nadie puede exigir que mi modo de expresión coincida con el de Kerry.

No puede pasarse por alto que en este punto aparece un impedimento lingüístico evidentemente inevitable, cuando afirmamos: el concepto *caballo* no es un concepto,[8] mientras que, en cambio, la ciudad Berlín, por ejemplo, es una ciudad y el volcán Vesubio es un volcán. El lenguaje se encuentra aquí en una situación forzada, que justifica el que se aparte de lo usual. Que nuestro caso es especial lo indica el propio Kerry al poner las comillas en la palabra "caballo" –para el mismo fin yo utilizo la letra cursiva–. No había motivo alguno para señalar del mismo modo las palabras "Berlín" y "Vesubio". En investigaciones lógicas, no pocas veces es necesario enunciar algo sobre un concepto y hacerlo además en la forma usual para tales predicaciones, o sea, de modo que la oración se convierta en contenido del predicado gramatical. Según esto, se esperaría que la referencia del sujeto gramatical fuera el concepto; pero debido a su naturaleza predicativa, éste no puede aparecer así sin más, sino que tiene que ser transformado primero en un objeto, o, dicho más exactamente, tiene que ser representado por un objeto,[9] que designamos anteponiéndole las palabras "el concepto"; por ejemplo,

"el concepto *hombre* no es vacío".

En este caso, las tres primeras palabras deben ser concebidas como un nombre propio,[10] que, lo mismo que "Berlín" o "Vesubio", no puede ser utilizado como predicado. Cuando decimos: "Jesús cae bajo el concepto *hombre*", el predicado (prescindiendo de la cópula) es:

"cae bajo el concepto *hombre*",

y esto se refiere a lo mismo que

"un hombre".

Pero, de este predicado, la combinación de palabras

"el concepto *hombre*"

es sólo una parte.

En contra de la naturaleza predicativa del concepto podría argüirse que, a pesar de todo, puede hablarse de un concepto-sujeto [*Subjectsbegriffe*]. Pero incluso en tales casos, como por ejemplo, en la oración

"todo mamífero tiene sangre roja",

no puede ignorarse la naturaleza predicativa[11] del concepto; pues, en lugar de lo anterior, puede decirse:

"lo que es mamífero tiene sangre roja",

o bien,

"si algo es un mamífero, entonces tiene sangre roja".

Cuando escribí mis *Fundamentos de la aritmética*, todavía no había hecho la distinción entre sentido y referencia,[12] y por esto aún reunía bajo la expresión "contenido asertivo" lo que ahora designo diferenciadamente con las palabras "pensamiento" y "valor veritativo". De ahí que ya no apruebo del todo, debido al contexto, la explicación dada allí, aunque, en lo esencial, todavía soy de la misma opinión. Brevemente, podemos

lizable si uno no se esfuerza por reconocer el pensamiento bajo sus diversos ropajes. Más aún, cualquier definición debería entonces rechazarse por falsa.

[8] Algo parecido ocurre cuando, refiriéndonos a la oración "esta rosa es roja", decimos: el predicado gramatical "es roja" pertenece al sujeto "esta rosa". Las palabras "el predicado gramatical 'es roja' " no son un predicado gramatical, sino un sujeto. Precisamente por el hecho de llamarlo explícitamente predicado, le arrebatamos esta propiedad.

[9] Véanse mis *Fundamentos*, p. 370 del presente volumen.

[10] Llamo nombre propio a cualquier signo para un objeto.

[11] Lo que aquí denomino naturaleza predicativa del concepto es sólo un caso especial de la falta de complementación o no saturación, de lo que he afirmado que es esencial para la función en mi escrito "Función y concepto" [*supra*, pp. 225 y ss.]. Ciertamente allí no pudo evitarse la expresión "la función $f(x)$", si bien también allí surgía el impedimento de que la referencia de estas palabras no es una función.

[12] Véase mi ensayo "Sobre sentido y referencia" [*supra*, pp. 249 y ss.].

decir, entendiendo "predicado" y "sujeto" en el sentido lingüístico: concepto es la referencia de un predicado, mientras que objeto es lo que nunca puede ser toda la referencia de un predicado, aunque puede ser la referencia de un sujeto. Aquí hay que observar que las palabras "todos", "cada", "ningún" aparecen delante de términos conceptuales. En las oraciones universales y particulares, afirmativas y negativas, expresamos relaciones entre conceptos e indicamos la naturaleza particular de esta relación por medio de aquellas palabras, las cuales se refieren a la oración entera más bien que a los términos conceptuales que las siguen. Esto se ve fácilmente en la negación. Si en la oración

"todos los mamíferos son terrestres",

la combinación de palabras "todos los mamíferos" expresase el sujeto lógico del predicado *son terrestres*, entonces, para negar el todo, debería negarse el predicado: "no son terrestres". En lugar de esto, hay que poner el "no" delante de "todos", de lo cual se sigue que "todos" pertenece lógicamente al predicado. Por el contrario, negamos la oración "el concepto *mamífero* está subordinado al concepto *terrestre*", negando el predicado: "no está subordinado al concepto *terrestre*".

Si nos fijamos en que, en mi modo de hablar, expresiones como "el concepto F" no designan conceptos, sino objetos, la mayor parte de las objeciones de Kerry caen por su propio peso. Cuando él sostiene (p. 281) que yo he identificado el concepto con la extensión del concepto, se equivoca. Yo sólo he indicado mi opinión de que, en la expresión "el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto *equinumeroso al concepto* F", las palabras "extensión del concepto" podrían sustituirse por "concepto". Obsérvese aquí que esta palabra está entonces unida al artículo definido. Por lo demás, ésta era solamente una observación de pasada, sobre la que no basé nada.

Si bien Kerry no logra salvar el abismo entre concepto y objeto, alguien podría intentar aprovechar mis propias afirmaciones en ese sentido. He dicho[13] que la asignación de número

[13] *Fundamentos*, § 46.

dice algo acerca de un concepto; hablo de propiedades que pueden decirse de un concepto y admito que un concepto caiga bajo otro superior.[14] He llamado a la existencia propiedad de un concepto. En qué sentido digo esto, se verá claramente con un ejemplo. En la proposición "hay por lo menos una raíz cuadrada de 4", no se afirma nada del número definido 2, ni del −2, sino de un concepto, a saber, *raíz cuadrada de 4*, y se dice que éste no es vacío. Pero si expreso el mismo pensamiento así: "el concepto *raíz cuadrada de 4* es satisfecho", las primeras seis palabras constituyen el nombre propio de un objeto, y de este objeto se dice algo. Pero nótese bien que lo que se dice del objeto no es lo mismo que lo que se dice del concepto. Esto sólo sorprenderá a aquel que olvide que un pensamiento puede ser descompuesto de múltiples maneras y que, por eso, unas veces aparece una cosa, otras otra, como sujeto o como predicado. El pensamiento mismo no determina lo que debe ser considerado como sujeto. Cuando se dice: "el sujeto de este juicio", se designa algo determinado únicamente cuando al mismo tiempo se señala un determinado modo de descomposición. Generalmente, esto se hace en relación con una cierta forma de palabras. Pero no debe olvidarse nunca que diferentes oraciones pueden expresar el mismo pensamiento. Así, en nuestro anterior pensamiento también podría encontrarse una afirmación sobre el número 4 como:

"el número 4 tiene la propiedad de que hay algo de lo cual es su cuadrado".

El lenguaje tiene medios para hacer que aparezca como sujeto unas veces una parte del pensamiento, otras veces otra. Uno de los más conocidos es la distinción de formas de la voz activa y la pasiva. De ahí que no sea imposible que el mismo pensamiento aparezca en *una* descomposición como singular, en otra como particular, y en una tercera como universal. Según esto, no debe asombrarnos que la misma oración pueda ser considerada como un enunciado sobre un concepto y también como un enunciado sobre un objeto, siempre y cuando nos demos cuenta de que estos enunciados son diferentes. En

[14] *Fundamentos*, § 53.

la oración "hay por lo menos una raíz cuadrada de 4", es imposible sustituir las palabras "una raíz cuadrada de 4" por "el concepto *raíz cuadrada de 4*"; es decir, lo que es adecuado para el concepto, no lo es para el objeto. Si bien en nuestra oración el concepto no aparece como sujeto, la oración dice, con todo, algo de él. Puede concebirse de modo que exprese que un concepto cae bajo otro superior.[15] Pero con esto no se ha borrado en absoluto la diferencia entre objeto y concepto. Ante todo, observemos que en la proposición "hay por lo menos una raíz cuadrada de 4" el concepto no desmiente su naturaleza predicativa. Puede decirse "hay algo que tiene la propiedad de que, multiplicado por sí mismo, da 4". En consecuencia, no puede afirmarse jamás de un objeto lo que aquí se afirma del concepto; pues un nombre propio no puede ser nunca una expresión predicativa, aun cuando pueda ser parte de ella. No quiero decir que sea falso afirmar de un objeto lo que aquí se afirma de un concepto; lo que quiero decir es que es imposible, carece de sentido. La oración "hay Julio César" no es ni verdadera ni falsa, carece de sentido, aunque la oración "hay un hombre llamado Julio César" sí tiene sentido; pero en este caso volvemos a tener un concepto, como lo hace ver el uso del artículo indefinido. Lo mismo ocurre en la oración "hay sólo una Viena". No debemos dejarnos engañar por el hecho de que la lengua utiliza a veces la misma palabra como nombre propio y a veces como término conceptual. El numeral indica que se trata del segundo caso. "Viena" es aquí un término conceptual lo mismo que "ciudad imperial". En este sentido puede decirse "Trieste no es una Viena". Si, por el contrario, en la oración "el concepto de *raíz cuadrada de 4* es satisfecho", sustituimos el nombre propio formado por las primeras seis palabras por "Julio César", obtenemos una oración que tiene un sentido, pero que es falsa; pues el ser satisfecho, tal como se entiende esta palabra aquí, en realidad sólo puede afirmarse de objetos de tipo muy especial, a saber, aquellos que pueden ser designados por nombres propios de la forma "el concepto F". Las palabras "el concepto *raíz cuadrada de 4*" se comportan, no

[15] En mis *Fundamentos*, he llamado de segundo orden (*zweiter Ordnung*) a semejante concepto, y en mi escrito "Función y concepto" lo he llamado de segundo nivel (*zweiter Stufe*), denominación que seguiré aquí también.

obstante, en lo que respecta a su sustituibilidad, de una manera esencialmente diferente de como se comportan las palabras "una raíz cuadrada de 4" en nuestra oración original; es decir, las referencias de estas dos combinaciones de palabras son esencialmente distintas.

Lo que aquí se ha mostrado con un ejemplo vale en general: el concepto se comporta de modo esencialmente predicativo incluso cuando se dice algo de él; en consecuencia, en tales casos sólo puede ser sustituido por un concepto, jamás por un objeto. Así, pues, lo que se dice sobre un concepto no es en absoluto adecuado para un objeto. Los conceptos de segundo nivel, bajo los cuales caen conceptos, son esencialmente distintos de los conceptos de primer nivel, bajo los cuales caen objetos. La relación de un objeto con un concepto de primer nivel bajo el cual cae es distinta, aunque parecida, a la relación de un concepto de primer nivel con un concepto de segundo nivel. Quizás se podría decir, para hacer justicia tanto a la diferencia como a la semejanza, que un objeto cae *bajo* un concepto de primer nivel, y que un concepto cae en un concepto de segundo nivel. La diferencia entre concepto y objeto sigue siendo, pues, completamente tajante.

Con esto se halla relacionado lo que he dicho en el § 53 de mis *Fundamentos* sobre mi modo de emplear las palabras "propiedad" y "característica". Las críticas de Kerry me dan la ocasión para volver a ello una vez más. Esas palabras sirven para designar relaciones en oraciones como "Φ es una propiedad de Γ" y "Φ es una característica de Ω". Según mi modo de hablar, algo puede ser a la vez propiedad y característica, pero no de lo mismo. A los conceptos, bajo los cuales cae un objeto, los llamo sus propiedades, de modo que

"ser Φ es una propiedad de Γ"

es solamente otra manera de decir

"Γ cae bajo el concepto de Φ".

Cuando el objeto Γ tiene las propiedades Φ, X y Ψ, puedo reunir éstas en Ω, de manera que sea lo mismo decir Γ tiene la propiedad Ω, o bien decir Γ tiene las propiedades Φ, X y Ψ. A Φ, X y Ψ las denomino características del concepto Ω

y asimismo propiedades de Γ. Está claro que la relación de Φ con Γ es completamente diferente de la que tiene con Ω, y que por eso se les da una denominación distinta. Γ cae bajo el concepto Φ; pero Ω, que es también un concepto, no puede caer bajo el concepto de primer nivel Φ, sino que sólo podría estar en semejante relación con un concepto de segundo nivel. En contraste, Ω está subordinado a Φ.

Consideremos un ejemplo de esto. En vez de decir:

"2 es un número positivo" y
"2 es un número entero" y
"2 es menor que 10",

también podemos decir

"2 es un número entero positivo menor que 10".

Aquí aparecen

ser un número positivo,
ser un número entero,
ser menor que 10.

como propiedades del objeto 2, pero al mismo tiempo como características del concepto

número entero positivo menor que 10.

Este concepto no es ni positivo, ni un número entero, ni menor que 10. Ciertamente está subordinado al concepto *número entero*, pero no cae bajo éste.

Comparemos ahora esto con lo que dice Kerry en el 2o. artículo (p. 424):

> Por número 4 se entiende el resultado de la unión aditiva de 3 y 1. El objeto conceptual del concepto dado así es el individuo numérico 4, un número completamente determinado de la serie numérica natural. Evidentemente, este objeto lleva consigo exactamente las características designadas en su concepto y ninguna más –siempre y cuando, como se tiene que hacer, se desista de contar como *propria* el infinito número de relaciones en las que está con todos los demás números individuales–: "el" 4 es asimismo el resultado de la unión aditiva de 3 y 1.

Inmediatamente se ve que aquí ha borrado totalmente la distinción que he hecho entre propiedad y característica. Kerry distingue aquí entre el número 4 y "el" número 4. Tengo que confesar que esta distinción me es incomprensible. El número 4 sería concepto; "el" número 4 sería objeto conceptual y no otra cosa que el individuo numérico 4. No es necesario demostrar que aquí no se trata de mi distinción entre concepto y objeto. Casi parece como si aquí Kerry pensara –aunque muy oscuramente– en la distinción que yo hago entre el sentido y la referencia de las palabras "el número 4".[16] Pero solamente de la referencia puede decirse que es el resultado de la unión aditiva de 3 y 1.

¿Cómo debe entenderse el "es" en las oraciones "el número 4 es el resultado de la unión aditiva de 3 y 1" y " 'el' número 4 es el resultado de la unión aditiva de 3 y 1"? ¿Es una simple cópula o contribuye a expresar una igualdad lógica? En el primer caso debería omitirse "el" delante de "resultado" y las oraciones serían como sigue:

"el número 4 es resultado de la unión aditiva de 3 y 1"

y

" 'el' número 4 es resultado de la unión aditiva de 3 y 1".

En ese caso en los objetos designados por Kerry como

"el número 4" y " 'el' número 4"

caerían ambos bajo el concepto

resultado de la unión aditiva de 3 y 1.

Quedaría entonces por ver en qué se diferencian estos objetos. Utilizo aquí las palabras "objeto" y "concepto" del modo que me es usual. Lo que Kerry parece querer decir lo expresaría yo así:

"el número 4 tiene como propiedad lo que el concepto *resultado de la unión aditiva de 3 y 1* tiene como característica (y sólo eso)".

[16] Véase mi ensayo antes citado "Sobre sentido y referencia". [En este volumen, pp. 249-275.]

En tal caso, yo expresaría el sentido de la primera de nuestras dos oraciones de la siguiente manera:

> "ser un número 4 es lo mismo que ser resultado de la unión aditiva de 3 y 1";

y, entonces, lo que he conjeturado que era la opinión de Kerry podría darse también así:

> "el número 4 tiene como propiedad lo que el concepto *número 4* tiene como característica (y sólo eso)".

Si esto es o no verdad, no podemos decidirlo aquí. En las palabras " 'el' número 4" podríamos quitar las comillas al artículo definido.

Pero en estos intentos de interpretación hemos presupuesto que los artículos definidos delante de "resultado" y "número 4" habían sido puestos por equivocación, por lo menos en una de las dos oraciones. Si tomamos las palabras tal como están, su sentido solamente puede comprenderse como una igualdad lógica, tal como

> "el número 4 no es más que el resultado de la unión aditiva de 3 y 1"

El artículo definido delante de "resultado" está aquí justificado lógicamente únicamente en el caso que se admita: 1) que existe semejante resultado, y 2) que no existe más que uno. Entonces esta combinación de palabras designa un objeto y debe considerarse como nombre propio. Si hubiera que entender nuestras dos oraciones como igualdades lógicas, se seguiría de ellas, dado que los miembros de la derecha coinciden, que el número 4 es 'el' número 4, o, si se prefiere, que el número 4 no es más que 'el' número 4, con lo cual se habría demostrado que la distinción hecha por Kerry es insostenible. Pero mi tarea no es aquí señalar contradicciones en su exposición. En realidad, no me interesa lo que él entienda por las palabras "objeto" y "concepto"; sólo quiero iluminar más claramente mi propio uso de estas palabras y con ello mostrar, en todo caso, que este uso se aparta del suyo, sea éste consistente o no.

No le discuto a Kerry en absoluto el derecho a emplear a su modo las palabras "objeto" y "concepto", pero debería dejar a salvo igualmente mi derecho, y admitir que, con mi designación, he señalado una distinción de la máxima importancia. Hay, desde luego, un obstáculo peculiar en el camino del entendimiento con el lector, a saber, que por una cierta necesidad lingüística, mi expresión, tomada literalmente, a veces no corresponde al pensamiento, al nombrarse un objeto cuando se quiere significar un concepto. Soy plenamente consciente, en estos casos, de apelar a la comprensión bienintencionada del lector, que no escatima un grano de sal.

Quizás se piense que esta dificultad se ha producido artificialmente, que no es necesario tomar en consideración algo tan difícil de manejar como lo que he llamado concepto, y se esté de acuerdo con Kerry en considerar que el caer un objeto bajo un concepto es una relación en la que la misma cosa podría aparecer *una* vez como objeto y otra vez presentarse como concepto. Las palabras "objeto" y "concepto" sólo servirían entonces para indicar la diferente posición en la relación. Esto puede hacerse; pero se equivocará quien crea que con ello se ha evitado la dificultad. Ésta sólo se ha desplazado; pues no todas las partes de un pensamiento pueden ser completas, sino que por lo menos una tiene que ser de algún modo no saturada o predicativa; en caso contrario, nunca podrían engancharse unas con otras. Así, por ejemplo, el sentido de la combinación de palabras "el número 2" no se engancha con el de la expresión "el concepto *número primo*" sin un medio de conexión. Tal medio se aplica en la oración "el número 2 cae bajo el concepto *número primo*"; está contenido en las palabras "cae bajo", las cuales necesitan de complementación en un doble sentido: por un sujeto y por un complemento directo. Sólo porque su sentido es no saturado, son aptas para servir de medio de conexión. Tan sólo cuando han sido completadas en ese doble aspecto, tenemos un sentido completo, tenemos un pensamiento. De tales palabras o combinaciones de palabras digo que se refieren a una relación. Ahora bien, en el caso de la relación tenemos la misma dificultad que queríamos evitar en el caso de los conceptos, pues con las palabras "la relación de caer un objeto bajo un concepto" no designamos ninguna relación, sino un objeto, y los tres nombres propios "el número 2", "el concepto *número primo*" y "la relación de caer un obje-

to bajo un concepto" son tan poco asociables entre sí como los dos primeros solos; sea como sea que los yuxtapongamos, no obtenemos oración alguna. Así comprendemos fácilmente que la dificultad, que radica en la no saturación de una parte de un pensamiento, puede ciertamente desplazarse, pero no evitarse. "Completo" y "no saturado" sólo son, es verdad, expresiones intuitivas, pero aquí sólo quiero y puedo hacer alusiones.

La comprensión puede facilitarse si el lector consulta mi escrito "Función y concepto", pues ante la pregunta de qué es lo que en el análisis se denomina función, se choca con el mismo obstáculo; y un examen más a fondo nos hará ver que de la naturaleza misma de la cuestión y de la de nuestro lenguaje proviene el que no pueda evitarse cierta inadecuación de la expresión lingüística y que nada pueda hacerse más que ser uno consciente de ella y tenerla siempre en cuenta.

CONSIDERACIONES SOBRE SENTIDO Y REFERENCIA*

[1892–1895]

En un ensayo ("Sobre sentido y referencia") establecí la diferencia entre sentido y referencia, de momento, sólo para los nombres propios (o, si se prefiere, nombres individuales). La misma diferencia puede establecerse también para los términos conceptuales [*Begriffswörter*]. Ahora bien: es fácil que surjan confusiones por el hecho de entremezclar la división en conceptos y objetos con la distinción entre sentido y referencia, de tal modo que se hagan coincidir sentido y concepto por un lado, y referencia y objeto por otro. A cada término conceptual o nombre propio le corresponde, por lo general, un sentido y una referencia, tal como uso yo estas palabras. En la poesía las palabras tienen evidentemente tan sólo sentido, pero en la ciencia, y siempre que nos interesa la pregunta por la verdad, no nos contentamos únicamente con el sentido, sino que también asociamos una referencia a los nombres propios y términos conceptuales; y si por descuido no lo hacemos, cometemos un error que fácilmente puede arruinar nuestra reflexión. La referencia de un nombre propio es el objeto que éste designa o denomina. Un término conceptual refiere a un concepto si el término se emplea tal como es conveniente en lógica. Para

*Título original: "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", publicado en Frege 1969, vol. 1, pp. 128–136. El texto es parte de un legajo de papeles intitulado "Schrödersche Logik" y ya existía en su forma completa antes de 1895.

Traducción de Carlos Ulises Moulines, originalmente publicada en Frege 1971, revisada para el presente volumen.

aclarar esto, voy a recordar una circunstancia que parece hablar muy a favor de los lógicos extensionalistas, en contra de los lógicos intensionalistas: a saber, que, sin perjuicio de la verdad, en toda oración, un término conceptual puede reemplazar a otro si a ambos corresponde la misma extensión conceptual; o sea, que también en relación con la inferencia y las leyes lógicas, los conceptos funcionan de manera diferente sólo en la medida en que sus extensiones son diferentes. La relación lógica fundamental es la de caer un objeto bajo un concepto: a ella pueden reducirse todas las relaciones entre conceptos. Si un objeto cae bajo un concepto dado, cae bajo todos los conceptos de la misma extensión, de donde se sigue lo antes dicho. Y así como nombres propios del mismo objeto pueden reemplazarse el uno al otro sin perjuicio de la verdad, también es válido esto para los términos conceptuales si la extensión de los conceptos es la misma. Claro que, con tales sustituciones, cambiará el pensamiento; pero éste es el sentido de la oración, no su referencia.[1] Esta última, que es el valor veritativo, permanece igual. Es fácil que a uno se le ocurra entonces tomar la extensión del concepto por la referencia del término conceptual; pero con ello se pasaría por alto que las extensiones de concepto son objetos y no conceptos (véase mi conferencia "Función y concepto").* Con todo, esa idea contiene un núcleo de verdad. Para hacer ver éste más claramente, debo partir de lo que he dicho en mi ensayo sobre función y concepto. El concepto es una función de un argumento, cuyo valor es siempre un valor veritativo. En este caso tomo la palabra "función" del análisis [matemático], y la utilizo conservando lo esencial de su significado, con una referencia algo más amplia, a la cual da pie la historia misma del análisis. Un nombre de función contiene siempre lugares vacíos (por lo menos uno) para el argumento, que en el análisis generalmente se indican por medio de la letra "x", que llena esos lugares vacíos. Pero el argumento no forma parte de la función, y por tanto tampoco la letra "x" forma parte del nombre de la función, de modo que siempre puede decirse que este último tiene lugares vacíos, pues lo que los llena no les pertenece propiamente. En consecuencia, a la

[1] Véase mi ensayo "Sobre sentido y referencia" [*supra*, pp. 249 y ss.].
* Se incluye en este volumen, pp. 225-248.

función misma la llamo yo no saturada o necesitada de complemento porque, para obtener una referencia completa, su nombre debe ser completado por el signo de un argumento. Tal referencia completa la denomino objeto, y en este caso es el valor de la función para el argumento que efectúa la complementación o saturación. En los casos más simples que se presentan, el argumento es también un objeto; y por el momento vamos a limitarnos a estos casos. Con respecto al concepto tenemos el caso especial de que el valor es siempre un valor veritativo, pues si completamos un nombre de concepto por medio de un nombre propio, obtenemos una oración cuyo sentido es un pensamiento; y a la oración le corresponde como referencia un valor veritativo. Si reconocemos que éste es el valor de lo verdadero (como lo verdadero), juzgamos que el objeto tomado como argumento cae bajo el concepto. Lo que en la función llamamos no saturación, en el concepto podemos llamarlo su naturaleza predicativa.[2] Ésta se da también cuando se habla de un concepto sujeto. ("Todos los triángulos equiláteros son equiángulos"; es decir: "Si algo es un triángulo equilátero, es un triángulo equiángulo".)

Esta esencia del concepto es un gran obstáculo para la expresión adecuada y para la comprensión. Cuando quiero hablar de un concepto, el lenguaje me fuerza con violencia casi insoslayable a una expresión inadecuada, con lo cual el pensamiento queda oscurecido —casi diría falseado—. Cuando digo "el concepto de *triángulo equilátero*", se podría suponer, por la analogía lingüística, que con ello designo un concepto, del mismo modo que denoto un planeta sin lugar a dudas cuando digo "el planeta Neptuno". Pero éste no es el caso; porque falta la naturaleza predicativa. Por eso la referencia de la expresión "el concepto de *triángulo equilátero*" (en la medida en que exista) es un objeto. No podemos evitar palabras como "el concepto", pero debemos tener siempre presente su inadecuación.[3] De lo dicho se desprende que objetos y conceptos son radicalmente distintos y no son sustituibles entre sí. Lo mismo

[2] Las palabras "no saturado" y "predicativo" parecen adecuarse mejor al sentido que a la referencia; pero a ellas debe corresponder algo también en la referencia; y no conozco términos más adecuados.
[3] Trataré esta dificultad.

vale para las palabras o signos correspondientes. Los nombres propios no pueden ser utilizados realmente como predicados. En los casos en que esto parece ser así, un examen más detenido muestra que, por el sentido, sólo son una parte del predicado: los conceptos no pueden estar en las mismas relaciones que los objetos. Imaginarlos en tales relaciones no sería falso, sino imposible. De ahí que las palabras "relación del sujeto con el predicado" designan dos relaciones completamente distintas según que el sujeto sea un objeto o un concepto. Por eso lo mejor sería expulsar definitivamente de la lógica las palabras "sujeto" y "predicado", puesto que siempre nos inducen al error de confundir las dos relaciones radicalmente distintas de caer un objeto bajo un concepto y [la de] subordinación de un concepto bajo otro concepto. Las palabras "todos" y "algunos", que aparecen junto al sujeto gramatical, pertenecen por el sentido al predicado gramatical, como se ve cuando se pasa a la negación (no todos, *nonnulli*).* De esto sólo resulta que, en estos casos, el predicado es diferente de lo que afirmamos de un objeto. También la relación de igualdad, por la que entiendo coincidencia total, identidad [*Gleichheit*], sólo es concebible entre objetos, no entre conceptos. Cuando decimos "La referencia del término conceptual 'sección cónica' es la misma que la del término conceptual 'curva de segundo nivel'" o "El concepto de *sección cónica* coincide con el concepto de *curva de segundo nivel*", las palabras "referencia del término conceptual 'sección cónica'" son el nombre de un objeto, no de un concepto; pues les falta la naturaleza predicativa, la no saturación, la posibilidad de ser utilizadas con el artículo indefinido. Lo mismo vale para las palabras "el concepto de *sección cónica*". Pero si bien la relación de igualdad sólo es concebible entre objetos, en el caso de los conceptos se da una relación semejante, a la que llamo de segundo nivel por ser una relación entre

*Señalan los editores de Frege 1969, que Frege se refiere a lo siguiente: La negación de "Aristóteles es filósofo" es "Aristóteles no es filósofo". En cambio, la negación de "Todos los triángulos equiláteros son equiángulos" no es en absoluto "Todos los triángulos equiláteros no son equiángulos". La negación puede formarse en este caso del mismo modo que en el primer ejemplo solamente si se analiza la oración como afirmación de la *subordinación* de un concepto bajo otro concepto: "El concepto 'triángulo equilátero' está subordinado al concepto 'triángulo equiángulo'."

conceptos, mientras que a la igualdad la llamo relación de primer nivel. Decimos que un objeto a es igual a un objeto b (en el sentido de la coincidencia completa), si a cae bajo cada uno de los conceptos bajo los que cae b, y a la inversa. Obtenemos algo semejante para los conceptos, si hacemos que concepto y objeto intercambien sus papeles. Podríamos decir entonces que la relación en la que antes pensábamos tiene lugar entre el concepto Φ y el concepto X, si cada objeto que cae bajo Φ cae también bajo X, y a la inversa. Con esto naturalmente no se pueden evitar las expresiones "El concepto Φ", "el concepto X", de modo que el sentido propio de nuevo se ve oscurecido. Por ello añadiré todavía lo siguiente, para lectores que no se asusten ante la conceptografía: la no saturación del concepto (de primer nivel) se representa en la conceptografía de tal modo que su designación contiene por lo menos un lugar vacío destinado a recibir el nombre de un objeto que ha de caer bajo el concepto. Este lugar o estos lugares deben llenarse siempre de algún modo. Esto puede ocurrir no sólo mediante un nombre propio, sino también mediante un signo que sólo aluda a un objeto. De ello se infiere que a un lado de un signo de igualdad, o de un [signo] análogo, no puede estar nunca la designación de un concepto, sino que, además del concepto, siempre habrá que designar o aludir a un objeto. Incluso si sólo aludimos a los conceptos esquemáticamente mediante una letra funcional, esto sólo puede admitirse si se representa la no saturación por medio de un lugar vacío junto a la letra, tal como en $\Phi(\ )$ y $X(\ )$. Con otras palabras: hemos de utilizar las letras (Φ, X), que designan o aluden a conceptos, siempre sólo como letras funcionales, es decir, de modo que lleven consigo un lugar para el argumento (el espacio interior a los paréntesis que siguen a la letra). Así, pues, no debería escribirse $\Phi = X$, porque en tal caso las letras Φ y X no entran como letras funcionales. Pero tampoco hay que escribir $\Phi(\ ) = X(\ )$, porque los lugares de argumento deben llenarse. Pero si éstos se llenan, entonces no se igualan solamente las funciones (conceptos), sino que a ambos lados del signo de igualdad hay, además de las letras funcionales, algo más, que no pertenece a la función.

Estas letras no pueden sustituirse por otras que no sean utilizadas como letras funcionales: debe haber siempre el lugar

de un argumento para recibir la "α". Podría ocurrírsele a uno escribir sencillamente $\Phi = X$. Esto puede parecer admisible, mientras los conceptos se indiquen esquemáticamente; pero un modo de designación realmente adecuado tiene que servir para todos los casos. Consideremos un ejemplo que ya he utilizado en mi escrito sobre "Función y concepto".

La función $x^2 = 1$ tiene para cada argumento el mismo valor (veritativo) que la función $(x + 1)^2 = 2\,(x + 1)$; es decir, todo objeto que cae bajo el concepto de *raíz cuadrada de 1* cae bajo el concepto de *lo que es menor en 1 que un número cuyo cuadrado es igual a su duplo*, y a la inversa. En el modo antes indicado expresaríamos este pensamiento de la siguiente manera:

$$(\alpha^2 = 1) \overset{\alpha}{\asymp} ((\alpha + 1)^2 = 2\,(\alpha + 1)).$$

Aquí tenemos, en realidad, esa relación de segundo nivel que corresponde a la igualdad (a la coincidencia completa) entre objetos, pero que no debe ser confundida con ella. Si lo escribimos

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (\mathfrak{a}^2 = 1) = ((\mathfrak{a} + 1)^2 = 2\,(\mathfrak{a} + 1)),$$

habremos expresado, en lo esencial, el mismo pensamiento, concebido como la generalización de una ecuación entre valores de funciones. Tenemos la misma relación de segundo nivel; tenemos también el signo de igualdad; pero esto por sí solo no es suficiente para designar esta relación, sino sólo en conexión con el signo de generalización: lo que tenemos fundamentalmente es una generalización, no una ecuación. $\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1) = \dot{\alpha}\,((\alpha + 1)^2 = 2\,(\alpha + 1))$ es una ecuación, pero no entre conceptos (lo cual es imposible), sino entre objetos, a saber, extensiones de conceptos.

Hemos visto hasta aquí que la relación de igualdad entre objetos no puede ser concebida como algo que se da también entre conceptos, pero que hay una relación correspondiente entre ellos. La palabra "el mismo", que se emplea para designar esa relación entre objetos, no puede servir propiamente también para la designación de esta relación entre conceptos. Pero a este fin casi no tenemos otra salida que decir "el concepto Φ es el mismo que el concepto X"; desde luego, con ello nombramos una relación entre objetos,[4] cuando en realidad nos referimos a una relación entre conceptos. El mismo caso tenemos cuando decimos "la referencia del término conceptual A es la misma que la del término conceptual B". En rigor, habría que prohibir la expresión "la referencia del término conceptual A", porque el artículo definido delante de "referencia" alude a un objeto y pasa por alto la naturaleza predicativa del concepto. Mejor sería limitarnos a decir "aquello a lo que se refiere el término conceptual A", puesto que éste debe ser utilizado siempre predicativamente: "Jesús es aquello a lo que refiere el término conceptual 'hombre' ", en el sentido de [la oración] "Jesús es un hombre".

Si tenemos todo esto presente, nos será posible afirmar "Aquello a lo que se refieren dos términos conceptuales es lo mismo si y sólo si las extensiones de los conceptos correspondientes coinciden", sin ser inducidos a confusión por el uso impropio de las palabras "lo mismo". Y con ello se ha hecho una concesión importante, según creo, a los lógicos extensionalistas. Tienen razón al hacer ver, con su preferencia por la extensión frente al contenido de los conceptos, que consideran que lo esencial para la lógica es la referencia de las palabras, no el sentido. Los lógicos intensionalistas tienden a fijarse demasiado en el sentido; pues lo que llaman intensión es, si no representación, por lo menos sentido. No tienen en cuenta que en lógica no interesa cómo se producen unos pensamientos a partir de otros sin tener en cuenta su valor veritativo; que hay que dar el paso del pensamiento al valor veritativo; con mayor generalidad, que hay que dar el paso del sentido a la referencia; que las leyes lógicas son ante todo leyes en el dominio de las referencias y que sólo indirectamente se relacionan con el sentido. Si nos interesa la verdad –y la verdad es el objetivo de la lógica–, debemos preguntarnos por las referencias, debemos desechar los nombres propios que no designen o nombren ningún objeto, por mucho que tengan un sentido; hay que desechar los términos conceptuales que no tengan referencia. Pero éstos no son, como se dice, los que unen lo contradictorio –pues un concepto bien puede ser vacío–, sino aquellos cuya

[4] Estos objetos tienen por nombre "el concepto de Φ" y "el concepto de X".

delimitación es vaga. Para cada objeto debe poderse determinar si cae bajo un concepto o no; un término conceptual que no satisfaga este requisito carece de referencia. A este tipo de términos pertenece, por ejemplo, la palabra "μῶλυ"* (Homero: *Od.*, X, 305), si bien se indican algunas de sus características. No por eso carece de sentido ese pasaje de la Odisea, como tampoco carecen de él los pasajes en que aparece el nombre "Nausícaa", que probablemente no nombra ni se refiere a nada. Pero hace como si nombrara a una muchacha, y con ello se le asegura un sentido. Y para la poesía basta con el sentido, con el pensamiento sin referencia, sin valor veritativo; pero eso no basta para la ciencia.

En mis *Fundamentos* y en la conferencia *Sobre teorías formalistas de la aritmética* he mostrado que para ciertas pruebas no es en absoluto indiferente el que una serie de signos –por ejemplo, $\sqrt{-1}$ – tenga o no tenga una referencia,[5] sino que toda la fuerza de la prueba depende de ello. Así, pues, la referencia demuestra ser en todas partes lo esencial para la ciencia. Por tanto, si bien puede concederse a los lógicos intensionales que el concepto mismo es más primitivo que su extensión, el concepto no debe ser concebido en tal caso como sentido del término conceptual, sino como referencia, y los lógicos extensionales se aproximan más a la verdad, al poner como lo esencial de la extensión una referencia, que ciertamente no es el concepto mismo, pero que está muy estrechamente conectada con él.

El señor Husserl le censura a Schröder su falta de claridad,[†] al discutir las palabras "*unsinnig*" ("carente de sentido"), "*einsinnig*" ("con un sentido"), y "*mehrsinnig*" ("con varios sentidos"), "*undeutig*" ("sin referencia"), "*eindeutig*" ("unívoco" o "con una sola referencia"), "*mehrdeutig*" ("multívoco" o "con más de una referencia") (pp. 48 y ss., y 69), y realmente se da esa falta de claridad; pero las distinciones de Husserl tampoco son suficientes. Como era de esperar, el señor Schröder utiliza los componentes "*sinnig*" y "*deutig*" de las palabras anteriores de manera distinta a la mía; este uso en sí mismo no es reprobable, tanto menos cuanto que al ser publicada su obra todavía no estaba impreso nada de lo que yo he escrito sobre el tema. En su caso, esa diferencia está relacionada con la que hay entre nombre común y nombre propio, y la falta de claridad proviene de la deficiente concepción de la diferencia entre concepto y objeto. Según él, no hay error en que los nombres comunes tengan varias referencias, y en efecto las tienen cuando bajo el concepto correspondiente caen varios objetos.[6] Según ello, tampoco habría error en que un nombre común careciera de referencia, como "cuadrado redondo". Pero Schröder lo denomina también carente de sentido, con lo cual es infiel a su propio modo de hablar; pues, según éste, debería considerarse que "cuadrado redondo" tiene un sentido, y Husserl tiene razón cuando lo califica de nombre común unívoco; pues "unívoco" y "equívoco" corresponden a "con un sentido" y "con varios sentidos" en Schröder. Husserl dice (p. 250): "Evidentemente confunde aquí dos cuestiones distintas; a saber: 1) la de si a un nombre le corresponde un significado [*Bedeutung*] (un 'sentido'); y 2) la de si existe o no un objeto correspondiente a un nombre dado". Esta distinción no basta. El término "nombre común" induce a la suposición errónea de que el nombre común se relaciona en lo esencial con objetos del mismo modo que el nombre propio, sólo que éste sólo denomina un único objeto, mientras que el primero, en general, es aplicable a varios. Pero esto es falso; y por ello prefiero decir "término conceptual" en vez de "nombre común". El nombre propio debe tener por lo menos un sentido (tal como yo utilizo esta palabra); de lo contrario, sería una sucesión de sonidos vacía y sería incorrecto calificarlo de nombre. Para el uso científico,

* Los editores de Frege 1969 comentan que la palabra μῶλυ designa en Homero una planta milagrosa con hojas blancas y raíces negras que Ulises recibe de Hermes para poder protegerse de Circe. [N. del t.]

5 De todos modos yo todavía no había fijado el uso que ahora doy a las palabras "sentido" y "referencia", de modo que a veces decía "sentido" cuando ahora diría "referencia".

† Los editores de Frege 1969 señalan que en las líneas siguientes Frege se refiere al comentario que había hecho Husserl al texto de E. Schröder "Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)" I ["Conferencias sobre el álgebra de la lógica (Lógica exacta)"] (Leipzig, 1890), en los *Göttingischen Gelehrten Anzeigen* (año 1891, número del 1 de abril, pp. 243-278). [N. del t.]

6 Si, como dice Husserl en la nota de la p. 252, un nombre distributivo es tal que "su referencia consiste en designar uno cualquiera de los objetos a que refiere", entonces un término conceptual (nombre común) no es, en todo caso, un nombre distributivo.

no obstante, hay que exigir de él que tenga además una referencia; que designe o nombre un objeto. De este modo, el nombre propio se relaciona a través del sentido, y sólo a través de éste, con el objeto.

También el término conceptual debe tener un sentido y, para su uso científico, una referencia; pero ésta no consiste ni en un objeto ni en varios, sino que es un concepto. En el caso del concepto, evidentemente podemos preguntarnos si cae un objeto bajo él, o varios o ninguno. Pero esto sólo atañe directamente al concepto. Por esto un término conceptual puede ser lógicamente inobjetable, sin que haya un objeto con el que se relacione a través de su sentido y su referencia (el concepto mismo). Esta relación con un objeto es, como se ve, una relación más indirecta e inesencial, de modo que parece poco adecuado dividir los términos conceptuales según que bajo el correspondiente concepto no caiga ningún objeto o caiga uno o varios. La lógica debe exigir tanto del nombre propio como del término conceptual que el paso de la palabra al sentido y del sentido a la referencia esté determinado sin lugar a dudas. En caso contrario, no tendríamos derecho en absoluto a hablar de una referencia. Esto vale, por supuesto, para todos los signos y combinaciones de signos que tengan la misma finalidad que los nombres propios o los términos conceptuales.

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?*

[1904]

Aún no está fuera de toda duda qué significado tiene en el análisis la palabra "función",[1] a pesar de que su uso es frecuente desde hace largo tiempo. En las explicaciones del término hallamos una y otra vez dos expresiones, a veces combinadas, a veces separadas, la de expresión matemática y la de variable. También notamos un uso lingüístico vacilante en el hecho de que unas veces se llama función a lo que determina el modo de dependencia o quizás al propio modo de dependencia, mientras que otras veces se llama así a la variable dependiente.

En tiempos recientes predomina en las definiciones la palabra "variable". Pero ésta se halla asimismo muy necesitada de elucidación. Cualquier variación ocurre en el tiempo. Según esto, al someter variables a su consideración, el análisis debería ocuparse de un acontecer temporal. Pero resulta que no tiene nada que ver con el tiempo; pues que pueda ser aplicado a sucesos temporales es irrelevante. También hay aplicaciones del análisis en la geometría, en las cuales el tiempo queda fuera de toda consideración. Ésta es una dificultad fundamental con la que siempre chocaremos si queremos llegar al fondo de la

* Título original: "Was ist eine Funktion?", ensayo en homenaje a L. Boltzmann, incluido en S. Meyer (comp.), *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904*, Barth, Leipzig, 1904, pp. 656–666.

Traducción de Carlos Ulises Moulines, originalmente publicada en Frege 1971, revisada para el presente volumen.

[1] Estas consideraciones se limitarán al caso de funciones con un solo argumento.

cuestión por medio de ejemplos, pues tan pronto como tratemos de indicar una variable, caeremos en algo que varía en el tiempo y que, por lo tanto, no pertenece al análisis puro. Y, con todo, tiene que ser posible mostrar una variable que no entrañe nada ajeno a la aritmética, si es que las variables han de ser el objeto del análisis.

Si ya en la variación radica una dificultad, chocaremos con otra nueva si preguntamos qué es lo que varía. Inmediatamente la respuesta que se obtiene es: una magnitud. ¡Busquemos un ejemplo! Una barra la podemos denominar una magnitud en la medida en que es larga. Cualquier variación de la barra con respecto a su longitud, tal como puede resultar, por ejemplo, por calentamiento, ocurre en el tiempo; y ni barras ni longitudes son objetos del análisis puro. Fracasa este intento de mostrar una magnitud variable en el análisis; y asimismo tendrán que fracasar muchos otros, puesto que ni magnitudes de longitud, ni magnitudes de superficie, ni magnitudes de ángulos, ni magnitudes de masas son objetos de la aritmética. De todas las magnitudes, únicamente los números le pertenecen. Y precisamente porque esta ciencia deja totalmente fuera la cuestión de cuáles son las magnitudes que, al ser medidas, dan lugar a los números en los casos concretos, es apta para las aplicaciones más diversas. Así, pues, nos preguntamos: ¿Son las variables del análisis números variables? ¿Qué otra cosa podrían ser, si es que han de pertenecer al análisis? ¿A qué se debe, sin embargo, que casi nunca se dice "número variable", mientras que es frecuente decir "magnitud variable"? Esta última expresión suena más aceptable que "número variable"; pues, por añadidura, emerge la duda: ¿hay acaso números variables? ¿Acaso no conserva inmodificadas sus propiedades todo número? Bien, puede decirse, 3 y π son, evidentemente, números invariables, constantes; pero también los hay variables. Si digo, por ejemplo, "el número que da en milímetros la longitud de esta barra", con ello denoto un número, y éste es variable, dado que la barra no conserva siempre la misma longitud; así pues, con esa expresión me he referido a un número variable. ¡Comparemos este ejemplo con el siguiente! Si digo "el rey de este reino", me refiero a un hombre. Hace diez años, el rey de este reino era un anciano; ahora, el rey de este reino es un joven. Con aquella expresión, por tanto, me he referido a un hombre que era un anciano y que ahora es un joven. Aquí debe haber un error. La expresión "el rey de este reino" no se refiere a ningún hombre sin una indicación temporal; pero tan pronto como se le añade una indicación temporal, puede referirse a un hombre inequívocamente; entonces es esta indicación temporal un componente necesario de la expresión, y obtenemos una expresión diferente cuando damos una indicación temporal diferente. En nuestras dos frases no tenemos, pues, en absoluto el mismo sujeto de la oración. Igualmente, la expresión "el número que da en milímetros la longitud de esta barra" no se refiere, sin indicación temporal, a ningún número en absoluto. Si se le añade una indicación temporal, puede referirse así a un número, por ejemplo, 1 000; pero éste es entonces invariable. Con otra indicación temporal obtenemos una expresión diferente, que, en tal caso, puede referirse a un número diferente, por ejemplo, 1 001. Si decimos: "Hace media hora, el número que daba en milímetros la longitud de esta barra era un cubo; ahora, el número que da en milímetros la longitud de esta barra, no es un cubo", no tenemos el mismo sujeto de la oración. El 1 000 no se ha inflado hasta el 1 001, sino que ha sido sustituido por éste. ¿O quizás es el número 1 000 el mismo que el número 1 001, sólo que con otra cara? Si algo varía, es que tenemos sucesivamente diversas propiedades o estados del mismo objeto. Si no fuera el mismo, no tendríamos ningún sujeto del cual pudiéramos predicar la variación. Una barra se alarga por calentamiento. Mientras esto ocurre, sigue siendo la misma. Si, en lugar de ello, hubiera sido apartada y sustituida por una barra más larga, no podría decirse que se alargó. Un hombre envejece, pero si a pesar de todo no pudiéramos reconocerlo como el mismo, no tendríamos nada de lo cual predicar el envejecimiento. ¡Apliquemos esto al número! ¿Qué permanece lo mismo cuando un número varía? ¡Nada! Por consiguiente, el número no varía en absoluto, pues no tenemos nada de lo que pudiéramos predicar la variación. Un cubo no se convierte nunca en un número primo, y un número irracional nunca se vuelve racional.

No hay, pues, números variables, y esto queda confirmado por el hecho de que no tenemos nombres propios para nú-

meros variables. Hemos fracasado en el intento de referirnos a un número variable mediante la expresión "el número que da en milímetros la longitud de esta barra". ¿Pero acaso no nos referimos a números variables por medio de "x", "y", "z"? Es verdad que se emplea este modo de hablar; pero estas letras no son nombres propios de números variables del mismo modo como "2" y "3" son nombres propios de números constantes, pues los números 2 y 3 se distinguen de una manera determinable; pero ¿cómo se distinguen las variables a las que supuestamente nos referimos con "x" y con "y"? No hay respuesta a esta pregunta. No podemos indicar qué propiedades tiene x y qué propiedades distintas de éstas tiene y. Si hay algo que asociamos a ambas letras, es en ambos casos la misma idea borrosa. Donde aparentemente surgen diferencias, se trata de aplicaciones; pero de éstas no hablamos aquí. Dado que no podemos concebir cada variable en su singularidad, no podemos asignar a las variables nombres propios.

El señor E. Czuber trató de evitar algunas de las dificultades mencionadas.[2] Para librarse del tiempo, define la variable como un número indeterminado. Pero, ¿hay números indeterminados? ¿Pueden dividirse los números en determinados e indeterminados? ¿Hay hombres indeterminados? ¿Acaso no tiene que ser determinado todo objeto? Pero, el número n ¿no es indeterminado? El número n no lo conozco. "n" no es el nombre propio de cierto número, ni determinado ni indeterminado. Y, con todo, a veces se dice "el número n". ¿Cómo es posible tal cosa? Tal expresión debe ser considerada en su contexto. ¡Tomemos un ejemplo! "Si el número n es par, entonces $\cos n\pi = 1$". Aquí sólo el todo tiene un sentido; no lo tienen ni el antecedente ni el consecuente del condicional por sí mismos. A la pregunta de si el número n es par, no se puede contestar nada, como tampoco a la de si $\cos n\pi = 1$. Para ello debería ser "n" el nombre propio de un número, el cual sería entonces necesariamente un número determinado. Se escribe la letra "n" para obtener una generalización. La condición que hay que cumplir es que, si se la sustituye por el nombre propio

[2] *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung* [*Lecciones sobre cálculo diferencial e integral*], Teubner, Leipzig, 1898, 1, § 2.

de un número, tengan sentido tanto el antecedente como el consecuente.

Naturalmente, aquí se puede hablar de indeterminación; pero "indeterminado" no es, en este caso, un calificativo de "número", sino un adverbio del verbo "indicar". No puede decirse que "n" se refiere a un número indeterminado, pero sí que indica indeterminadamente a números. Y esto es lo que ocurre siempre que en la aritmética se usan letras, con excepción de los pocos casos (π, e, i) en que aparecen como nombres propios; pero en estos casos se refieren a números determinados, invariables. No hay, por tanto, números indeterminados, y con ello fracasa el intento del señor Czuber.

En segundo lugar, él quiere salvar la dificultad de que no se pueda concebir una variable como diferente de las otras. A la totalidad de valores que puede tomar una variable la denomina el dominio [*Bereich*] de la variable, y dice: "Se considera definida la variable x si, para cada número real al que nos refiramos, puede establecerse si pertenece o no al dominio." Se considera definida; ¿pero lo está en realidad? Dado que no existen números indeterminados, es imposible definir un número indeterminado. Se toma el dominio como lo que caracteriza la variable. Según esto, dados dominios iguales, tendríamos variables iguales. Por consiguiente, en la ecuación "$y = x^2$", y sería la misma variable que x, si el dominio de x es el de los números positivos.

Este intento debe considerarse malogrado, tanto más cuanto que la expresión "una variable toma un valor" no está nada clara. Suponiendo que una variable sea un número indeterminado, ¿cómo se las arregla entonces un número indeterminado para tomar un número? Pues el valor es evidentemente un número. ¿Acaso un nombre indeterminado toma también una persona indeterminada? Lo que se dice en otros contextos es que un objeto toma una propiedad; en este caso, el número debe desempeñar ambos papeles; en cuanto objeto, se le llama variable o magnitud variable, como propiedad, se le llama valor. Por ello, pues, se prefiere la palabra "magnitud" a la palabra "número", porque así como puede ocultarse el hecho de que la magnitud variable y el valor que supuestamente toma son en el fondo lo mismo, de que no estamos en absoluto ante

el caso en que un objeto toma sucesivamente diversas propiedades, de que, por lo tanto, de ninguna manera puede hablarse de variación.

Con respecto a las variables, hemos llegado al resultado siguiente. Pueden admitirse magnitudes variables, ciertamente, pero no pertenecen al análisis puro. Los números variables no existen. La palabra "variable" no tiene, por tanto, en el análisis puro, justificación alguna.

¿Cómo pasamos de las variables a la función? En lo esencial, esto ocurrirá siempre de la misma manera, y, por ello, seguiremos la exposición del señor Czuber, quien en § 3 escribe:

> Si a cada valor de la variable real x, que pertenezca al dominio de ésta, se le asigna un número determinado y, entonces y también queda definido en general como variable y se le llama una *función de la variable real* x. Este hecho se expresa por medio de una ecuación de la forma $y = f(x)$.

Lo que aquí sorprende, en primer lugar, es que a y se le llame un número determinado, mientras que, en cuanto variable, debería ser un número indeterminado, y no es un número ni determinado, ni indeterminado; "y" se pone incorrectamente en vez de varios números, pero luego se habla como si fuera uno solo. Sería más sencillo y claro, no obstante, representar el caso de la siguiente manera: a cada número de un dominio-x se le asigna un número. Llamo el dominio-y a la totalidad de estos números. Ciertamente tenemos un dominio-y, pero no un y del que pudiéramos decir que sea una función de la variable real x.

Ahora bien, la delimitación de los dominios parece carecer de importancia para la cuestión de la esencia de la función. ¿Por qué no podemos tomar igualmente como dominio la totalidad de los números reales o la totalidad de los números complejos con inclusión de los reales? El núcleo del problema radica, no obstante, en algo muy distinto, a saber, en la palabra "asignar". Ahora, ¿cómo me percato yo de si al número 5 se le asigna el número 4? La pregunta es incontestable si no se la completa de alguna manera. Y, con todo, según la explicación de Czuber, parece como si para cada dos números estuviera determinado sin más si el primero se le asigna al segundo o no. Afortunadamente, el señor Czuber añade la observación:

> La anterior definición no expresa nada acerca de la ley de la asignación, la cual se indica, de la manera más general, por la *característica* f; ésta puede establecerse de los modos más diversos.

O sea que la asignación se da según una ley, y son concebibles diferentes leyes de ese tipo. Pero, entonces, la expresión "y es una función de x" no tiene ningún sentido si no se complementa indicando la ley según la cual se hace la asignación. Esto es un error de definición. ¿Y acaso lo más importante estrictamente hablando no es la ley que la explicación trata como inexistente? Notemos que, con ello, la variabilidad ha desaparecido totalmente de nuestra vista, mientras que ha entrado la generalidad en nuestro campo visual, pues esto es a lo que la palabra "ley" apunta.

Las diferencias entre las leyes de asignación estarán conectadas con las diferencias entre las funciones, y ya no pueden ser concebidas como diferencias cuantitativas. Si pensamos tan sólo en las funciones algebraicas, las funciones logarítmicas y las funciones elípticas, en seguida nos persuadimos de que en estos casos se trata de diferencias cualitativas; éste es un motivo más para no definir las funciones como variables. Si fueran variables, entonces las funciones elípticas serían variables elípticas.

En general, una de estas leyes de asignación se expresa por medio de una ecuación, en cuya parte izquierda se halla "y", mientras que en la derecha aparece una expresión matemática, que se compone de signos numéricos, signos matemáticos y la letra "x", como, por ejemplo,

$$\text{“}y = x^2 + 3x\text{”}$$

Así se ha definido la función como tal expresión matemática. En tiempos recientes, este concepto se ha encontrado demasiado limitado. Con todo, este inconveniente se podría remediar con la introducción de nuevos símbolos en el lenguaje simbólico de la aritmética. Hay otra objeción de mayor peso, a saber, la de que la expresión matemática, como grupo de signos, no pertenece, en realidad, a la aritmética. Considero que la teoría según la cual los símbolos son los objetos de esta ciencia ha quedado definitivamente refutada con la crítica que

hago en el segundo volumen de mis *Leyes fundamentales de la aritmética*. No siempre se ha distinguido claramente entre signos y designado, de modo que bajo una expresión matemática (*expressio analytica*) también se ha entendido, en parte, su referencia. ¿Pero a qué se refiere "$x^2 + 3x$"? Propiamente, a nada, ya que la letra "x" sólo indica números, no se refiere a nada. Si sustituimos "x" por un numeral, obtenemos una expresión que se refiere a un número, o sea, nada nuevo. Al igual que "x", también "$x^2 + 3x$" únicamente indica. Esto puede ocurrir para expresar una generalización, como en las oraciones

$$\text{“}x^2 + 3x = x \cdot (x + 3)\text{”},$$
$$\text{“si } x > 0, \text{ entonces } x^2 + 3x > 0\text{”}.$$

¿Pero ahora dónde queda la función? Parece que no consiste ni en la expresión matemática en sí misma ni en su referencia. Y, con todo, no estamos tan alejados de lo correcto. Cada una de las expresiones "sen 0", "sen 1", "sen 2", se refiere a un número determinado; pero en ellas tenemos un componente común, "sen", con el que nos referimos a lo que es esencial a la función seno. Este "sen" corresponde ciertamente a la "f", de la que el señor Czuber dice que apunta a la ley, y, en verdad, el paso de "f" a "sen" es, análogamente al paso de "a" a "2", el paso de un signo que apunta a un signo que designa. En consecuencia, "sen" se referiría a una ley. Por supuesto, esto no es del todo exacto. Más bien nos parece que la ley está expresada en la ecuación "$y = \operatorname{sen} x$", de la cual, el signo "sen" es sólo una parte, aunque sea la que caracteriza la peculiaridad de la ley. ¿Y no tenemos aquí lo que buscamos, la función? Así, pues, también "f" apuntará, en realidad, a una función. Y ahora llegamos a aquello que diferencia las funciones de los números. A saber, que el "sen" necesita ser completado por medio de un signo numérico, el cual no pertenece, sin embargo, a la referencia de la función. Esto es válido en general: el signo de una función nunca está saturado, necesita ser completado por medio de un numeral, que entonces llamamos signo del argumento. Esto lo vemos también en el signo de la raíz cuadrada, en el signo del logaritmo. Los signos de función no pueden aparecer, como los numerales, solos en un miembro de la ecuación, sino únicamente completados por un signo que designe o apunte a un

número. ¿Pero a qué se refiere semejante unión de un signo de función y un numeral, tal como "sen 1", "$\sqrt{1}$", "log 1"? A un número, cada vez. Así obtenemos signos de números que están compuestos de dos partes heterogéneas, de las que la parte no saturada es completada por la otra.

Esta necesidad de ser completado puede hacerse visible por medio de paréntesis vacíos, por ejemplo, "sen( )" o "$(\ )^2 + 3 \cdot (\ )$". A pesar de ser realmente la más apropiada para este caso y la más adecuada para impedir la confusión que surge de considerar el signo del argumento como parte del signo de la función, esta notación no encontrará ninguna aceptación.[3] También se puede utilizar con este fin una letra. Si escogemos como tal "ξ", entonces "$\operatorname{sen} \xi$" y "$\xi^2 + 3\xi$" serán signos de funciones. Pero con ello debe quedar claro que "ξ" aquí sólo tiene la misión de señalar los lugares en que tiene que ponerse el signo completador. Lo mejor será no utilizar esta letra para ningún otro objetivo, o sea, por ejemplo, no utilizarla en vez de la "x", que en nuestros ejemplos sirve para expresar generalidad.

Un defecto de la simbolización usual del cociente diferencial es que en ella la letra "x" debe, a la vez, señalar los lugares de los argumentos y servir como expresión de generalidad, como en la ecuación

$$\text{“}\frac{d \cos \frac{x}{2}}{dx} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\text{”}$$

De ello resulta una dificultad. Según los principios generales del uso de letras en aritmética, uno se encontrará ante un caso particular siempre que se sustituya "x" por un numeral. Pero la expresión

$$\text{“}\frac{d \cos \frac{2}{2}}{d2}\text{”}$$

[3] Además, sólo es adecuada para el caso excepcional en que uno se quiera referir a una función totalmente aislada. En "sen 2", "sen" por sí solo designa ya la función.

es incomprensible, porque ya no puede saberse de qué función se trata. No sabemos si es

$$\cos\frac{(\ )}{2} \text{ o bien } \cos\frac{2}{(\ )} \text{ o bien } \cos\frac{(\ )}{(\ )}.$$

Por esto nos vemos obligados a utilizar el estorboso simbolismo

$$\left(\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}\right)x = 2$$

Pero la mayor desventaja es que así se dificulta la comprensión de la función.

A la peculiaridad del signo de función, que hemos llamado no saturación, le corresponde, desde luego, algo en las funciones mismas. También a éstas las podemos llamar no saturadas, caracterizándolas así como algo completamente distinto de los números. Naturalmente, esto no es una definición; pero ésta tampoco es posible darla aquí.[4] Tengo que limitarme a indicar, por medio de una expresión intuitiva, lo que quiero decir, y con ello me remito a la comprensión benevolente del lector.

Si completamos una función mediante un número convirtiéndola con ello en un número, a este último lo llamamos el valor de la función para el primero, el argumento. Se ha hecho costumbre leer la ecuación "$y = f(x)$" así: "y es una función de x". En esto radican dos errores: primero, se traduce el signo de igualdad por la cópula; segundo, se confunde la función con su valor para un argumento. Por estos errores ha surgido la opinión de que la función es un número, si bien variable o indeterminado. Hemos visto, por el contrario, que no hay tales números y que las funciones son radicalmente distintas de los números.

El deseo de brevedad ha introducido muchas expresiones inexactas en el lenguaje matemático, y el efecto retroactivo de

[4] La definición que da H. Hankel en el § 1 de sus *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und stetingen Funktionen* [*Investigaciones sobre las funciones infinitamente oscilantes y discontinuas*] (Universitäts-Programm, Tubinga, 1870), es inutilizable debido a un círculo vicioso, al contener la expresión "$f(x)$", la cual hace que se presuponga lo que hay que definir.

éstas ha sido enturbiar las ideas y producir definiciones defectuosas. La matemática debería ser un modelo de claridad lógica. En realidad, quizás no se encontrarán en los escritos de ninguna ciencia tantas expresiones equívocas y, por lo tanto, tantas ideas equívocas, como en los escritos matemáticos. Nunca debería sacrificarse la corrección lógica a la brevedad de la expresión. Por esto es de gran importancia crear un lenguaje matemático que conjugue la exactitud más rigurosa con la mayor brevedad posible. Para ello, lo más adecuado será una conceptografía, un conjunto de reglas, según las cuales, por medio de signos escritos o impresos, puedan expresarse directamente los pensamientos, sin la intervención de la voz.

Carta de Gottlob Frege a Philip Jourdain*

[1914]

Muy estimado Sr. Jourdain,

Con mucho gusto le doy mi permiso para traducir partes de mis *Leyes fundamentales* para el *Monist*. Por su carta colijo que el Sr. Wittgenstein se encuentra otra vez en Cambridge.† Antes de Navidad, tuve largas conversaciones con él y tenía la intención de escribirle una carta sobre los mismos temas con el fin de continuar el hilo de aquellos pensamientos, pero no sabía dónde se encontraba. Lamentablemente no sé suficiente inglés como para determinar plenamente si la teoría de Russell (*Principia Mathematica* I, 54 ss.) coincide con mi teoría de las funciones de niveles primero, segundo, etc. Sin duda, así parece. Pero no comprendo todo. Lo que Russell pretende con

* Esta carta, numerada como XXI/12 en la edición de Frege 1969, vol. II, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, es en realidad un esbozo preparatorio de la que Frege envió al lógico británico Philip Jourdain el 28 de enero de 1914, la cual es una contestación a la misiva que le había enviado Jourdain el 15 de enero de ese año, donde —además de hacerle una serie de preguntas de contenido— le pedía permiso para traducir partes de sus *Leyes fundamentales de la aritmética* para la revista *The Monist* y en donde le comentaba que Wittgenstein se ofrecía para revisar la traducción. En esta carta, Frege intenta responder a las preguntas formuladas por Jourdain en la mencionada misiva del 15 de enero: (1) si la teoría de las funciones de Frege no coincide con la teoría de la jerarquía de las funciones de *Principia Mathematica*, (2) si Frege ve en la aserción algo meramente psicológico, y (3) si Frege concibe el sentido [*Sinn*] como una mera propiedad psicológica de un nombre. [N. del t.]

† Brian McGinness y Hans Kaal, editores de la correspondencia de Frege al inglés, señalan que esto es falso, pues Wittgenstein había dejado Inglaterra desde octubre de 1913. [N. del t.]

su designación $\Phi!\hat{x}$ no me resulta completamente claro. Nunca estoy seguro de si está hablando del signo o de su contenido. ¿"Función" significa un signo? Ya le he escrito en otra ocasión acerca de por qué quiero proscribir el uso de la expresión "variable". Nunca se sabe del todo si se trata de un signo o del contenido del signo. En la p. 54, Russell escribe en relación con la oración "$\Phi!\hat{x}$ implica $\Phi!a$ para todos los posibles valores de Φ"[:] "Esto hace una oración acerca de x, pero no atribuye a x un *predicado* en el sentido especial que se acaba de definir."[†] Si lo he entendido bien, de acuerdo con mi *Conceptografía* yo escribiría dicha oración así:

$$\smile^{\mathfrak{f}}\!\!\begin{array}{l} \text{—} \mathfrak{f}(a) \\ \text{—} \mathfrak{f}(x) \end{array}$$

y, en mi opinión, también se podría escribir como "$x = a$". ¿Por qué, pues, no debería ser éste un caso como cualquier otro en el que un predicado es atribuido a x? ¿No tenemos aquí también una función de primer orden?[‡] En relación con su segunda pregunta, quisiera decir lo siguiente. Es cierto que juzgar (esto es, el reconocer algo como verdadero) es un proceso mental interno; pero que algo sea verdadero es independiente de ser reconocido como tal, es algo objetivo. Cuando yo afirmo algo como verdadero no quiero hablar de mí mismo, de un proceso en mi mente. Y para comprenderlo no se precisa saber quién lo afirma. Quien entiende una oración proferida con fuerza asertiva le añade su reconocimiento de la verdad. Si una oración proferida con fuerza asertiva expresa un pensamiento

[†] La frase está en inglés en el original. El texto se halla en *Principia Mathematica* vol. I, Introducción, capítulo II, § V, Cambridge at the University Press, 1927, p. 52. La cita completa donde se hallan las frases citadas por Frege reza, en traducción española: "Por consiguiente, la oración "$\Phi!\hat{x}$ implica $\Phi!\hat{a}$ para todos los posibles valores de Φ" puede leerse "todos los predicados de x son predicados de a". Esto establece una oración acerca de x, pero no atribuye a x un *predicado* en el sentido especial que se acaba de definir". En el contexto de la discusión, Russell llama "predicado" a cualquier función de primer nivel $\Phi\hat{x}$. El acento circunflejo encima de una variable en una fórmula abierta indica en Russell que estamos ante una función proposicional, mientras que el signo de admiración tras la variable funcional indica que la función es predicativa. [N. del t.]

[‡] En inglés en el original: "first-order function". [N. del t.]

falso, entonces es lógicamente inservible y, estrictamente hablando, incomprensible. Una oración proferida sin fuerza asertiva puede ser lógicamente útil, aun si expresa un pensamiento falso, por ejemplo, como parte (antecedente) de otra oración. Lo que haya de servir de premisa de un argumento tiene que ser verdadero. De la misma forma, cuando se expone un argumento, las oraciones que sirven de premisas tienen que ser proferidas con fuerza asertiva; pues la verdad de las premisas es esencial para la corrección del argumento. Si al representar un argumento en la notación de mi *Conceptografía* alguien omitiera la barra de juicio delante de las premisas, le faltaría, pues, algo esencial. Y está bien que aquello que es esencial se represente y haga visible por medio de un signo y no que sea meramente añadido en el acto de entenderlo de acuerdo con una convención tácita, pues una convención por la cual algo debiera ser entendido de determinada manera bajo ciertas circunstancias podría ser fácilmente olvidada, incluso si en algún momento haya sido expresada explícitamente. Por esta razón ocurre que algo que es esencial pasa desapercibido, pues no se lo ha incorporado en un signo. La lógica, sin embargo, debe tener en cuenta lo que es esencial a la inferencia.

En lo concerniente a su tercera pregunta, no creo que en la lógica podamos prescindir del sentido de los nombres; pues una oración tiene que tener un sentido, si es que ha de poder utilizarse. Pero la oración consta de partes, que tienen que contribuir de algún modo a la expresión del sentido de una oración y por ende tienen que tener sentido ellas mismas. Tomemos como ejemplo la oración "El Etna es más alto que el Vesubio". Tenemos, pues, el nombre "Etna", que también ocurre en otras oraciones, como, por ejemplo, en "El Etna está en Sicilia". La posibilidad de entender oraciones que nunca antes hemos oído descansa evidentemente en que componemos el sentido de una oración a partir de partes que corresponden a las palabras. Si encontramos la misma palabra –digamos, por ejemplo, "Etna"– en dos oraciones distintas, reconocemos que los pensamientos correspondientes tienen algo en común, que corresponde a la palabra en cuestión. Sin esto, el lenguaje en sentido propio sería imposible. Podríamos ciertamente convenir que ciertos signos debieran expresar ciertos pensa-

mientos, como las señales del ferrocarril ("la vía está libre"); pero de este modo quedaríamos constreñidos a un ámbito muy estrecho y no podríamos formar una oración completamente nueva, una que fuera comprensible para otro, aunque no se haya adoptado con antelación una convención para este caso. Ahora bien, esta parte del pensamiento que corresponde al nombre "Etna" no puede ser el propio monte Etna, es decir, no puede ser la referencia [*Bedeutung*] de este nombre. Si así fuera, cada trozo de lava solidificada que fuera parte del monte Etna sería parte del pensamiento de que el Etna es más alto que el Vesubio. Y me parece absurda la idea de que trozos de lava y, en particular, trozos de lava de los que no tengo conocimiento alguno, hubiesen de formar parte de mi pensamiento. En consecuencia, dos cosas me parecen necesarias: (1) la referencia [*Bedeutung*] del nombre que es aquello acerca de lo que se dice algo; y (2) el sentido [*Sinn*] del nombre que es parte del pensamiento [*Gedanke*]. Sin la referencia podríamos tener efectivamente un pensamiento, pero un pensamiento propio de un mito o de una creación literaria, no un pensamiento que pudiera avanzar el conocimiento científico. Por otra parte, sin el sentido no tendríamos ningún pensamiento y, por tanto, nada que pudiéramos reconocer como verdadero.

Además, hay que añadir lo siguiente. Supongamos que un explorador divisa en el horizonte septentrional de una tierra inexplorada una alta montaña nevada. Preguntando a la gente del lugar, llega a saber que la montaña en cuestión se llama "Afla". Supongamos que ve la cima desde diversos puntos, determina su posición lo más exactamente posible, la coloca en un mapa y anota en su diario: "El Afla mide al menos 5 000 metros". Otro explorador divisa una alta montaña nevada en el horizonte meridional y se entera de que se llama "Ateb". Luego, incluye este nombre en su mapa. Un estudio comparativo realizado con posterioridad permite concluir que los dos exploradores vieron la misma montaña. El contenido de la oración "El Ateb es el Afla" no es en modo alguno una simple consecuencia del principio de identidad, sino que encierra un valioso descubrimiento geográfico. Lo expresado en la oración "El Ateb es el Afla" no es en absoluto lo mismo que el contenido de la oración "El Ateb es el Ateb". Si lo que

corresponde al nombre "Afla" como parte del pensamiento fuera la referencia del nombre, es decir, el propio monte Afla, en tal caso en ambos pensamientos sería lo mismo. El pensamiento expresado por la oración "El Ateb es el Afla" tendría que coincidir entonces con el pensamiento expresado por la oración "El Ateb es el Ateb", lo cual dista de ser el caso. Lo que corresponde al nombre "Ateb" como parte del pensamiento tiene, por tanto, que ser diferente de lo que corresponde al nombre "Afla" como parte del pensamiento. Esto de ningún modo puede ser la referencia, que en el caso de estos dos nombres es la misma, sino que debe ser algo que, en ambos casos, es distinto y, conforme a esto, digo que el sentido [*Sinn*] del nombre "Ateb" es diferente del sentido del nombre "Afla". Del mismo modo, el sentido de la oración "El Ateb mide al menos 5 000 metros" también difiere del sentido de la oración "El Afla mide al menos 5 000 metros". El que toma por verdadera a esta última oración no necesita tomar por verdadera a la primera. Un mismo objeto puede ser determinado de varias maneras y cada una de estas maneras puede dar lugar a un nombre diferente, en cuyo caso estos nombres diferentes tendrán sentidos diferentes; pues no resulta evidente en sí mismo que se trate del mismo objeto determinado de maneras distintas. En la astronomía se dan casos semejantes con los planetoides y los cometas. Si el sentido de un nombre fuese algo subjetivo, también debería serlo el sentido de la oración en la que figura ese nombre, como lo sería también el pensamiento. Y el pensamiento que uno asocia con la oración sería diferente del pensamiento que otro asocia con ella; un común acervo de pensamientos, una ciencia común sería imposible. Sería imposible que hubiera una contradicción entre lo que dice uno y lo que dice el otro, pues no estarían expresando los mismos pensamientos, sino cada uno el suyo propio.

Por estas razones creo que el sentido de un nombre no es algo subjetivo [aquí está tachado: en la vida mental de un sujeto] y, consecuentemente, que no pertenece a la psicología, y que además es indispensable.

EL PENSAMIENTO.*
UNA INVESTIGACIÓN LÓGICA

[1918/1919]

Como la palabra "bello" señala su dirección a la estética y "bueno" a la ética, así "verdadero" señala su dirección a la lógica. Es cierto que todas las ciencias tienen la verdad como fin, pero la lógica se ocupa de ella de un modo totalmente diferente. Se comporta respecto de la verdad casi del mismo modo como la física respecto del peso o del calor. Descubrir verdades es tarea de todas las ciencias: a la lógica le corresponde reconocer las leyes de lo verdadero. La palabra "ley" es usada en un sentido doble. Cuando hablamos de leyes morales o de leyes del Estado, nos referimos a prescripciones que deben ser observadas, pero con las cuales los hechos no siempre concuerdan. Las leyes naturales son lo general del acontecer natural, a las que éste se adecua siempre. Es más bien en este segundo sentido que hablo de leyes de lo verdadero. Claro está que no se trata aquí de lo que acontece, sino de lo que es. Ahora bien, de las leyes de lo verdadero resultan prescripciones para tener algo por verdadero, para pensar, juzgar, inferir. Seguramente

*Título original: "Der Gedanke"; publicado en los *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1, 1918-1919, pp. 58-77. Frege tuvo la intención de publicar este texto junto con otros dos, "Die Verneinung" ["La negación"] y "Gedankengefüge" ["Composición de pensamientos"] en un tratado de lógica filosófica que no alcanzó a ver la luz y cuyo título habría de ser *Logische Untersuchungen*. [N. del t.]

Traducción de Carlos Pereda, publicada en Margarita M. Valdés (comp.), *Pensamiento y lenguaje. Problemas en la atribución de actitudes proposicionales*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, 1996, pp. 23-48, revisada para el presente volumen.

también es posible hablar en ese sentido de leyes del pensamiento. Pero entonces se corre el peligro de mezclar cosas diferentes. Quizás se entiendan las palabras "ley del pensamiento" de manera semejante a "ley natural", aludiendo con ello a los rasgos generales en el acontecer mental del pensamiento. En este sentido una ley del pensamiento sería una ley psicológica. Y así, se podría llegar a creer que la lógica trata del proceso mental del pensamiento y de las leyes psicológicas conforme a las cuales éste se produce. Pero con ello se comprendería mal la tarea de la lógica, pues de esta manera no se le da a la verdad el lugar que le corresponde en la lógica. El error y la superstición tienen sus causas, tanto como el conocimiento correcto. Considerar verdadero lo falso y considerar verdadero lo verdadero, ambas cosas, se realizan de acuerdo con leyes psicológicas. Una derivación a partir de leyes psicológicas y una explicación de un proceso mental que conduce a tener algo por verdadero, nunca pueden reemplazar una prueba de aquello que se tiene por verdadero. ¿Acaso no pueden haber intervenido también las leyes lógicas en ese proceso mental? No quiero negarlo; pero cuando se trata de la verdad, la sola posibilidad no puede bastar. También es posible que algo no lógico haya intervenido y nos haya apartado de la verdad. Sólo después de que hayamos reconocido las leyes de lo verdadero podremos decidir esto; pero entonces, una vez que podamos decidir si está justificado ese tener por verdadero en el que desemboca el proceso mental, podremos prescindir probablemente de la derivación y de la explicación del proceso mental. Para evitar el malentendido y evitar que se borre la frontera entre la psicología y la lógica, a esta última le asigno la tarea de encontrar las leyes de lo verdadero, no las de tomar algo por verdadero o las de pensar. El significado de la palabra "verdad" se revela en las leyes de lo verdadero.

Ahora intentaré bosquejar, a grandes rasgos, aquello que en este contexto llamo verdadero. De esta manera pueden descartarse los usos de la palabra que no vienen al caso. No se la usa aquí en el sentido de "sincero" o "veraz"; tampoco en el sentido que se le da cuando se tratan cuestiones de arte, cuando, por ejemplo, se habla de la verdad en el arte, cuando la verdad se declara meta del arte, cuando se habla de la verdad de una obra

de arte o de una sensibilidad verdadera. Igualmente, la palabra "verdadero" suele anteponerse a otra palabra para indicar que ésta ha de entenderse en su sentido propio, no adulterado. También este uso queda fuera del camino aquí seguido, pues aquí se trata de aquella verdad cuyo conocimiento se le asigna a la ciencia como meta.

Lingüísticamente la palabra "verdadero" parece ser una palabra para una propiedad. De allí que deseemos delimitar más estrictamente el campo en el que la verdad puede predicarse, donde entra en consideración. Se afirma la verdad de imágenes, representaciones, oraciones y pensamientos. Llama la atención que aparezcan aquí cosas visibles y audibles junto con cosas que no pueden ser percibidas por los sentidos. Esto indica que se han producido desplazamientos del significado. Efectivamente. ¿Es una imagen, como simple objeto visible o tangible, propiamente verdadera, en tanto que una piedra o una hoja no lo son? Es evidente que no llamaríamos verdadera a la imagen si no contuviera una intención. La imagen tiene la intención de representar algo. Una representación no es llamada verdadera en sí misma, sino sólo en relación con una intención: la de que corresponda a algo. Según esto, puede suponerse que la verdad consiste en la correspondencia entre una imagen y aquello de lo que es imagen. Una correspondencia es una relación. Pero ello contradice el uso de la palabra "verdadero" que no es una palabra de relación y no contiene indicación alguna de otra cosa con la cual algo haya de corresponder. Si no sé que una imagen se propone representar la catedral de Colonia, tampoco sé con qué debo comparar la imagen para decidir acerca de su verdad. Además, una correspondencia sólo puede ser perfecta cuando los objetos correspondientes coinciden; es decir, cuando no son cosas diferentes. Se podría probar la autenticidad de un billete de banco tratando de superponerlo estereoscópicamente a uno auténtico. Pero sería ridículo intentar superponer estereoscópicamente una moneda de oro a un billete de veinte marcos. Sólo sería posible superponer exactamente una representación y una cosa si la cosa fuera también una representación. Pero entonces, si la primera correspondiera perfectamente con la segunda, ambas coincidirían. Y eso es justamente lo que no se quiere cuando se

define la verdad como la correspondencia de una representación con algo real. Para ello es precisamente esencial que lo real sea diferente de la representación. Pero, entonces, no hay correspondencia perfecta, no hay verdad perfecta. Nada sería verdadero, pues lo que es verdadero a medias, no es verdadero. La verdad no admite un más o menos. ¿O acaso sí? ¿No se podría establecer que hay verdad cuando se da la correspondencia en algún respecto? ¿Pero en cuál? ¿Qué deberíamos hacer para decidir si algo es verdadero? Deberíamos indagar si es verdad, por ejemplo, que una representación y algo real se corresponden en ese respecto establecido. Y con ello estaríamos de nuevo frente a una pregunta similar, y el juego recomenzaría una vez más. De modo que fracasa el intento de explicar la verdad como correspondencia. Y fracasa también cualquier otro intento de definir la verdad. Pues en una definición se proponen determinadas características, y al aplicarla a un caso determinado se plantearía nuevamente la cuestión de si es verdad que están presentes esas características. Y así nos moveríamos constantemente en círculo. Según esto, parecería que el contenido de la palabra "verdadero" es totalmente singular e indefinible.

Cuando se afirma la verdad de una imagen no se quiere afirmar una propiedad que le pertenezca a esa imagen independientemente de otros objetos, sino que se tiene presente otra cosa diferente y se quiere decir que la imagen corresponde a dicha cosa. "Mi representación corresponde a la catedral de Colonia" es una oración, y ahora se trata de la verdad de esa oración. De modo que lo que tal vez abusivamente llamamos la verdad de imágenes y representaciones se reduce a la verdad de oraciones. ¿A qué llamamos oración? A una sucesión de sonidos, pero sólo cuando tiene un sentido, con lo cual no está dicho que toda sucesión de sonidos con sentido sea una oración. Y cuando decimos que una oración es verdadera nos referimos a su sentido. Así, aquello respecto de lo cual se plantea de algún modo la cuestión de la verdad, resulta ser el sentido de la oración. Pero, ¿es acaso el sentido de una oración una representación? Sea como sea, la verdad no consiste en la correspondencia de ese sentido con otra cosa, de lo contrario la pregunta por lo verdadero se repetiría hasta el infinito.

Sin querer dar una definición, llamo pensamiento a aquello respecto de lo cual se plantea la cuestión de la verdad. Por lo tanto, incluyo lo que es falso entre los pensamientos, así como lo que es verdadero.[1] Así, puedo decir: el pensamiento es el sentido de una oración, sin querer afirmar con ello que el sentido de toda oración sea un pensamiento. El pensamiento, en sí imperceptible, se viste con el ropaje sensible de la oración y se nos vuelve más asible. Decimos que la oración expresa un pensamiento.

El pensamiento es algo imperceptible, y todos los objetos perceptibles deben ser excluidos del dominio en el que se plantea la cuestión de la verdad. La verdad no es una propiedad que corresponda a una clase especial de impresiones sensibles. Se diferencia, pues, marcadamente de propiedades como las que designamos con las palabras "rojo", "amargo", "aromático". Pero, ¿no acaso vemos que ha salido el Sol?, y ¿no vemos también con ello que eso es verdad? Que ha salido el Sol no es un objeto que emite rayos que llegan hasta mis ojos, no es un objeto visible como el Sol mismo. Que ha salido el Sol es reconocido como verdadero mediante ciertas impresiones sensibles. Sin embargo, ser verdadero no es una propiedad perceptible por los sentidos. Que un objeto sea magnético también es reconocido por medio de impresiones sensibles, si bien a esta propiedad, como a la verdad, no le corresponde una clase especial de impresiones sensibles. Hasta aquí concuerdan estas propiedades. Sin embargo, las impresiones son necesarias para reconocer que un cuerpo es magnético. Por el contrario, si encuentro verdadero que en este momento no huelo nada, no lo hago por medio de impresiones sensibles.

[1] De modo similar se ha dicho, por ejemplo, "un juicio es algo que es o verdadero o falso". Uso, en efecto, la palabra "pensamiento" aproximadamente en el sentido que tiene "juicio" en los escritos de los lógicos. Espero que, en lo que sigue, se comprenda por qué prefiero "pensamiento". Se ha criticado esta explicación diciendo que en ella estaría implícita una clasificación de los juicios en verdaderos y falsos, lo cual sería la menos importante de entre todas las clasificaciones posibles de los juicios. No puedo considerar como un defecto lógico que junto con la explicación se dé una clasificación. En cuanto a la importancia, no será tan menospreciable si, como decíamos, la palabra "verdadero" señala su dirección a la lógica.

Hay que pensar, sin embargo, que no podemos reconocer en un objeto ninguna propiedad sin que a la vez tengamos por verdadero el pensamiento de que ese objeto posee esa propiedad. De modo que a toda propiedad de un objeto está unida una propiedad de un pensamiento: la de la verdad. Hay que considerar también que la oración "huelo un aroma de violetas" tendrá el mismo sentido que la oración "es verdad que huelo un aroma de violetas". Y no parece habérsele agregado nada a ese pensamiento por el hecho de habérsele añadido la propiedad de verdad. Y sin embargo: ¿no es un gran logro cuando, después de una larga vacilación y de fatigosas búsquedas, el investigador puede decir: "lo que yo suponía es verdadero"? El significado de la palabra verdadero parece ser muy singular. ¿No estaremos, por lo demás, frente a algo que en el sentido ordinario no puede ser llamado propiedad? A pesar de esta duda, me seguiré expresando aquí según el uso lingüístico común como si la verdad fuese una propiedad, hasta encontrar algo más acertado.

A fin de distinguir con mayor precisión lo que llamo pensamiento, distinguiré varias clases de oraciones.[2] A una oración imperativa no se le ha de negar un sentido, pero ese sentido no es tal que surja con respecto a él la cuestión de la verdad. Por eso no llamaré pensamiento al sentido de una oración imperativa. Hay que excluir también las desiderativas y las que expresan una petición. Pueden entrar en consideración las oraciones en las que comunicamos o afirmamos algo. Pero no incluyo las exclamaciones en las que se desahogan sentimientos, ni gemidos, ni suspiros o risas, a no ser que estén destinados a comunicar algo en virtud de alguna convención previa. Pero, ¿qué ocurre con las oraciones interrogativas?* Con una palabra interrogativa emitimos una oración incompleta, la cual sólo adquirirá verdadero sentido con la respuesta que exigimos. Por

[2] La palabra "oración" no la empleo aquí en el sentido de la gramática, que también reconoce oraciones subordinadas. Éstas, tomadas separadamente, no siempre tienen un sentido con respecto al cual se plantee la cuestión de la verdad, mientras que sí lo tiene la oración compleja de la cual forman parte.

* Por "oración interrogativa" traduzco dos términos del original, "*Fragesatz*" y "*Satzfrage*", que Frege usa en este pasaje indistintamente. La diferencia que interesa es la que existe entre estos dos términos y el término "*Wortfrage*" que se traduce como "palabra interrogativa". [N. del t.]

ello, las palabras interrogativas quedan aquí fuera de consideración. Es diferente el caso de las oraciones interrogativas en el que esperamos un "sí" o un "no". La respuesta "sí" dice tanto como una oración afirmativa, pues en ella se propone como verdadero el pensamiento ya contenido en la oración interrogativa. Se puede formular, entonces, una oración interrogativa para cada oración afirmativa. Por esta razón no podemos considerar que una exclamación sea información, ya que no es posible formular la oración interrogativa correspondiente. La oración interrogativa y la oración afirmativa contienen el mismo pensamiento, pero la oración afirmativa contiene algo más: precisamente la afirmación. También la oración interrogativa contiene algo más: una petición. En una oración afirmativa hay que distinguir, entonces, dos cosas: el contenido, que tiene en común con la oración interrogativa, y la afirmación. Aquél es el pensamiento o, por lo menos, contiene el pensamiento. De modo que es posible expresar un pensamiento sin proponerlo como verdadero. Estos dos elementos están tan unidos en el caso de la oración afirmativa, que la distinción resulta difícil de ver. Así, pues, distinguimos:

1) El captar un pensamiento —el pensar,
2) El reconocimiento de la verdad de un pensamiento —el juzgar,[3]
3) La manifestación de ese juicio —el afirmar.

Cuando formulamos una oración interrogativa ya hemos llevado a cabo el primer acto. Un progreso en la ciencia ocurre generalmente de tal manera que, primeramente, se capta un pensamiento tal como se lo podría expresar en una oración interrogativa. Después de ello, una vez realizadas las investi-

[3] Me parece que hasta ahora no se ha diferenciado lo suficiente entre pensamiento y juicio. Tal vez el lenguaje induce a ello. En la oración afirmativa no tenemos ninguna parte especial que corresponda a lo afirmado, sino que el hecho de afirmar reside en la forma afirmativa de la oración. En alemán se tiene la ventaja de que la oración principal y la oración subordinada se diferencian por el orden de sus palabras. Pero, a ese respecto hay que considerar que también una oración subordinada puede tener una afirmación, y que, con frecuencia, ni la principal ni la subordinada por sí solas, sino sólo la articulación de ambas, expresa un pensamiento completo.

gaciones apropiadas, se reconoce que ese pensamiento es verdadero. En la forma de la oración afirmativa expresamos el reconocimiento de la verdad. Para ello no se necesita la palabra "verdadero". Y aun cuando la usemos, la fuerza asertiva no reside en ella, sino en la forma afirmativa de la oración. Cuando ésta pierde su fuerza asertiva, la palabra "verdadero" no puede reintegrársela. Esto último ocurre cuando no hablamos en serio. Así como el trueno en el teatro es sólo un trueno aparente y el combate teatral sólo un combate aparente, así también la afirmación teatral es sólo una afirmación aparente. Es sólo un juego, sólo poesía. El actor, cuando desempeña su papel, no afirma, tampoco miente, aun cuando diga algo de cuya falsedad esté convencido. En la poesía se da el caso de que se expresan pensamientos sin que sean propuestos como verdaderos, a pesar de la forma afirmativa de la oración; aunque el poema puede incitar al oyente a emitir un juicio aprobatorio. Entonces, incluso en el caso de que algo se presente en la forma de una oración afirmativa, hay que preguntarse si realmente contiene una afirmación. Y esa pregunta habrá de contestarse negativamente si falta la seriedad necesaria. No tiene importancia si allí se usa la palabra "verdadero". Así se explica que nada, al parecer, se le agrega al pensamiento al atribuirle la propiedad de verdad.

Una oración afirmativa contiene frecuentemente, además de un pensamiento y una afirmación, un tercer elemento que va más allá de la afirmación. Este elemento actúa, no pocas veces, sobre el sentimiento, sobre el estado de ánimo del oyente, o bien estimula su imaginación. Expresiones como "desgraciadamente", "afortunadamente", sirven para tal propósito. Esos componentes de la oración son muy frecuentes en la poesía, pero no están del todo ausentes en la prosa. En las exposiciones matemáticas, físicas o químicas son más escasas que en las históricas. Las llamadas ciencias del espíritu están más cerca de la poesía, pero por ello mismo son también menos científicas que las ciencias estrictas, que son tanto más estrictas cuanto más austeras; pues la ciencia estricta se dirige a la verdad y sólo a la verdad. Por lo tanto, todos los componentes de la oración que están más allá de la fuerza asertiva de ésta no pertenecen a la exposición científica. Son, sin embargo, a veces difíciles de evitar, aun para quienes ven en ello un peligro. Cuando de lo que se trata es de aproximarse por vía de la insinuación a lo que es inasible para el pensamiento, entonces hallan esos componentes su total justificación. Cuanto más rigurosamente científica sea una exposición menos notoria será la nacionalidad del autor y más fácilmente traducible el texto. Por el contrario, los componentes del lenguaje a que me estoy refiriendo hacen muy difícil la traducción de la poesía, e incluso hacen casi siempre imposible una traducción perfecta. Pues los idiomas se diferencian justo en aquello en lo que en gran parte radica el valor poético.

Que yo use la palabra "caballo" o "corcel" o "rocín" o "jamelgo", no produce ninguna diferencia respecto del pensamiento. La fuerza asertiva no se extiende hasta aquello que hace diferentes estas palabras. Lo que en un poema puede llamarse atmósfera, estado de ánimo, luminosidad, lo que se expresa mediante el tono y el ritmo, no pertenece al pensamiento.

En el lenguaje hay muchos recursos para facilitar la comprensión al oyente; por ejemplo, realzar una parte de la oración por medio de la entonación o del orden de las palabras. Piénsese en palabras como "aún" o "ya". Con la oración "Alfredo aún no ha llegado" se dice propiamente "Alfredo no ha llegado" y se insinúa, además, que se espera su llegada; pero solamente se insinúa. No se puede decir que el sentido de la oración sea falso porque no se espere la llegada de Alfredo. La palabra "pero" se diferencia de "y" en que con ella se insinúa que lo que sigue está en oposición a aquello que hace esperar lo que la precede. Estas indicaciones en el habla no producen ninguna diferencia en el pensamiento. Una oración puede ser transformada de modo que el verbo pase de la voz activa a la pasiva y que el objeto directo se convierta en el sujeto. También se puede hacer de un objeto indirecto un sujeto y reemplazar al mismo tiempo el verbo "dar" por "recibir". Es cierto que tales transformaciones pueden ser relevantes en otros respectos, pero no afectan al pensamiento, no afectan a nada que sea verdadero o falso. Si se reconociera como una cuestión universal el carácter inadmisible de esas transformaciones, toda investigación lógica profunda se vería impedida. Es tan importante desdeñar distinciones que no afectan lo primordial, como hacer distinciones

que atañen a lo esencial. Pero lo que es esencial depende de la finalidad que se tenga. A quien se ocupa de la belleza del lenguaje puede parecerle importante lo que al lógico le es indiferente.

Así, el contenido de una oración frecuentemente sobrepasa el pensamiento expresado en ella. Pero también ocurre con frecuencia lo contrario: que el texto mismo que puede fijarse mediante la escritura o el fonógrafo, no baste para la expresión del pensamiento. El tiempo presente se usa de dos maneras: una, para dar una indicación de tiempo; otra, para suprimir toda limitación temporal cuando la atemporalidad o eternidad son componentes del pensamiento. Piénsese, por ejemplo, en las leyes de la matemática. De cuál de los dos casos se trate, es algo que no se expresa, sino que tiene que ser adivinado. Cuando se quiere dar una indicación de tiempo con el presente, tenemos que saber cuándo fue emitida la oración para poder captar correctamente el pensamiento. En ese caso, el momento en que se hace la emisión es parte de la expresión del pensamiento. Si alguien quiere decir hoy lo mismo que expresó ayer usando la palabra "hoy", reemplazará esta palabra por "ayer". Aunque el pensamiento es el mismo, su expresión lingüística tiene que ser diferente para poder evitar el cambio de sentido que se produciría debido a la diferencia del tiempo en que se emite. Lo mismo se aplica a palabras como "aquí", "allá". En todos estos casos no es el texto, tal como se lo podría conservar por escrito, la expresión completa del pensamiento, sino que para su correcta captación se necesita también del conocimiento de ciertas circunstancias que acompañan a la emisión y que son utilizadas en ella como un medio para la expresión del pensamiento. En el mismo orden de cosas pueden entrar los señalamientos con el dedo, los ademanes, las miradas. Un mismo texto que contenga la palabra "yo" puede expresar, en boca de diferentes personas, diferentes pensamientos; de ellos, unos pueden ser verdaderos y otros falsos.

La figuración de la palabra "yo" en una oración da lugar a nuevas consideraciones.

Considérese, pues, el siguiente caso. El Dr. Gustav Lauben dice: "yo he sido herido". Leo Peter oye esto y, después de algunos días, cuenta: "el Dr. Gustav Lauben ha sido herido".

Ahora bien, ¿expresa esta oración el mismo pensamiento que el Dr. Lauben había pronunciado? Supongamos que Rudolf Lingens estaba presente cuando el Dr. Lauben habló, y ahora oye lo que cuenta Leo Peter. Si el Dr. Lauben y Leo Peter han expresado el mismo pensamiento, entonces Rudolf Lingens –que domina perfectamente la lengua y se acuerda de lo que el Dr. Lauben dijo en su presencia– tiene que reconocer ahora inmediatamente, por el informe de Leo Peter, que está hablando de lo mismo. Pero, cuando se trata de nombres propios, el manejo de la lengua es un asunto delicado. Podría fácilmente ocurrir que sólo unos pocos relacionaran la frase "el Dr. Lauben ha sido herido" con un pensamiento determinado. En ese caso, una comprensión total exige el conocimiento de los vocablos "el Dr. Gustav Lauben". Si tanto Leo Peter como Rudolf Lingens identifican al Dr. Lauben como el médico que vive en una casa que ambos conocen, donde no vive ningún otro médico, entonces, los dos entienden del mismo modo la oración "el Dr. Gustav Lauben ha sido herido", la asocian con el mismo pensamiento. Pero también es posible que Rudolf Lingens no conozca personalmente al Dr. Lauben y no sepa que es justamente el Dr. Lauben quien dijo: "yo he sido herido". En ese caso Rudolf Lingens puede no saber que se trata del mismo asunto. Digo, por lo tanto, respecto de esto: el pensamiento expresado por Leo Peter no es el mismo que el pronunciado por el Dr. Lauben.

Sigamos suponiendo que Herbert Garner sabe que el doctor Lauben nació el 13 de septiembre de 1875 en N.N., y que estos datos no se aplican a nadie más. Sin embargo, no sabe ni dónde vive actualmente el Dr. Lauben, ni ninguna otra cosa más acerca de él. Leo Peter, por su parte, no sabe que el Dr. Gustav Lauben nació el 13 de septiembre de 1875 en N.N. Entonces, en lo que respecta al nombre propio "Dr. Gustav Lauben", Herbert Garner y Leo Peter no hablan el mismo lenguaje, aunque con este nombre se refieren efectivamente a la misma persona, pues no saben que lo hacen. Herbert Garner no asocia, pues, con la oración "el Dr. Lauben ha sido herido" el mismo pensamiento que Leo Peter quiere expresar con ella. Para evitar el inconveniente de que Herbert Garner y Leo Peter no hablen el mismo lenguaje, voy a suponer que Leo Peter emplea el nom-

bre propio?? "Dr. Lauben", en tanto que Herbert Garner usa el nombre propio "Gustav Lauben". Así, es posible que Herbert Garner considere verdadero el sentido de la oración: "el Dr. Lauben ha sido herido" y que, en cambio, confundido por noticias falsas, tenga por falso el sentido de la oración "Gustav Lauben ha sido herido". Según estas suposiciones los pensamientos son, pues, diferentes.

De acuerdo con lo anterior, en un nombre propio importa cómo se presenta lo designado mediante él. Esto puede ocurrir de diferentes maneras, y a cada una de ellas corresponde un sentido especial de la oración que contiene el nombre propio. Los diferentes pensamientos concuerdan, por cierto, en su valor de verdad; es decir, si uno de ellos es verdadero, todos son verdaderos, y si uno de ellos es falso, todos lo son. No obstante, hay que reconocer su diversidad. En rigor, hay que estipular que en cada nombre propio haya una sola manera de presentación de lo designado. A menudo es poco importante que se cumpla o no esta exigencia, pero no siempre.

Ahora bien, cada uno se presenta a sí mismo de una manera particular y originaria, como no se presenta a ningún otro. Por eso, cuando el Dr. Lauben piensa que ha sido herido, posiblemente lo hace sobre la base de esa manera originaria en la que él se presenta a sí mismo. Y el pensamiento así determinado sólo lo puede captar él, el Dr. Lauben. Sin embargo, él puede querer comunicar algo a los demás. Y no puede comunicar un pensamiento que sólo él pueda captar. Por lo tanto, cuando dice: "yo he sido herido", tiene que usar ese "yo" en un sentido que sea susceptible de ser captado también por los demás, por ejemplo, en el sentido de "el que en este momento les habla", con lo cual se sirve de las circunstancias concomitantes de su emisión para la expresión del pensamiento.[4]

[4] No estoy aquí en la afortunada situación de un mineralogista que muestra a sus oyentes un cristal de roca. No puedo ponerles a mis lectores un pensamiento en las manos para que lo observen con todo el detenimiento desde todos sus ángulos. Debo contentarme con ofrecer al lector el pensamiento, en sí imperceptible, envuelto en una forma lingüística perceptible. En esta tarea, el aspecto figurativo del lenguaje crea dificultades. Lo perceptible se inmiscuye constantemente haciendo a la expresión figurativa y, con ello, impropia. De este modo, se origina una lucha con el lenguaje, y me veo obligado a ocuparme más de él, aunque ésa no sea propiamente mi tarea. Espero haber conseguido aclarar a mis lectores lo que quiero llamar pensamiento.

Pero aquí se impone una consideración. ¿Es, en efecto, el mismo pensamiento el que pronuncia primero aquella persona y ahora ésta? El hombre que no ha sido tocado aún por la filosofía conoce inmediatamente cosas que puede ver y tocar, cosas, en suma, que puede percibir con los sentidos, tales como árboles, piedras y casas; y está convencido de que otro hombre puede igualmente ver y tocar el mismo árbol, la misma piedra, que él ve y toca. Es evidente que un pensamiento no pertenece a esta clase de cosas. Pero, a pesar de ello, ¿puede, como un árbol, presentarse a los hombres como el mismo?

Incluso el hombre no filosófico se ve obligado a reconocer un mundo interior diferente del mundo exterior, un mundo de impresiones sensibles, de creaciones de su imaginación, de sensaciones, de sentimientos y estados de ánimo, un mundo de inclinaciones, deseos y decisiones. Para usar una expresión breve, resumiré todo esto —exceptuando las decisiones— con la palabra "representación" [*Vorstellung*].

Ahora bien, ¿pertenecen los pensamientos a este mundo interior? ¿Son representaciones? Es evidente que no son decisiones.

¿En qué se diferencian las representaciones, por un lado, de los objetos del mundo exterior, por el otro?

En primer lugar: Las representaciones no se pueden ver, ni tocar, ni oler, ni gustar, ni oír.

Doy un paseo con un acompañante. Veo un prado verde; tengo una impresión visual de lo verde. La tengo, pero no la veo.

En segundo lugar: las representaciones se tienen. Se tienen sensaciones, sentimientos, estados de ánimo, inclinaciones, deseos. Una representación que alguien tiene pertenece al contenido de su conciencia.

El prado y las ranas en él, el Sol que lo ilumina, están allí, igual si los miro que si no; pero la impresión sensible que yo tengo de lo verde existe sólo a través de mí; yo soy su portador. Nos parece absurdo que un dolor, un estado de ánimo, un deseo anden independientemente por el mundo, sin tener un

portador. Una sensación es imposible sin alguien que la experimente. El mundo interior presupone a alguien de quien él es mundo interior.

En tercer lugar: las representaciones necesitan un portador. Los objetos del mundo exterior son, por el contrario, independientes.

Mi acompañante y yo estamos convencidos de que los dos vemos el mismo prado; pero cada uno de nosotros tiene una particular impresión sensible de lo verde. Diviso una fresa entre las hojas verdes. Mi acompañante no la puede encontrar, es daltónico. La impresión de color que él obtiene de la fresa no se diferencia notablemente de la que obtiene de sus hojas. ¿Mi acompañante ve roja la hoja verde o acaso ve verde la fresa roja? ¿O acaso ve ambas de un color desconocido para mí? Éstas son preguntas sin respuesta o, más bien, preguntas sin sentido. Pues cuando la palabra "rojo" no se propone indicar una propiedad de los objetos, sino caracterizar impresiones sensibles pertenecientes a mi conciencia, entonces, es sólo aplicable en el campo de mi conciencia, ya que es imposible comparar mi impresión sensible con la de otro. Para ello sería necesario unir en una misma conciencia una impresión sensible perteneciente a una conciencia y una impresión sensible perteneciente a otra conciencia. Pero, aun si fuera posible desaparecer una representación de una conciencia y, al mismo tiempo, hacer surgir una representación en otra conciencia, quedaría siempre sin respuesta la pregunta de si se trata de la misma representación. Pertenece de tal modo a la esencia de cada una de mis representaciones el ser contenido de mi conciencia, que toda representación de otro, justamente en cuanto tal, es diferente de la mía. Pero, ¿no sería acaso posible que mis representaciones, todo el contenido de mi conciencia, fuera al mismo tiempo contenido de una conciencia más amplia, de una conciencia divina, por ejemplo? Por cierto que sí, pero sólo si yo mismo fuera parte de la esencia divina. Pero, entonces, ¿serían efectivamente representaciones mías? ¿Sería yo su portador? Esto supera en tal medida los límites del entendimiento humano, que nos está permitido dejar esa posibilidad fuera de consideración. En todo caso, es imposible para nosotros los hombres comparar las representaciones de otro con

las propias. Corto la fresa, la tengo entre mis dedos. Ahora la ve también mi acompañante: la misma fresa. Pero cada uno de nosotros tiene su propia representación. Nadie más tiene mi representación, pero muchos pueden ver la misma cosa. Nadie más tiene mi dolor. Alguien puede compadecerse de mí, pero aun así mi dolor me pertenece siempre a mí y su compasión a él. Él no tiene mi dolor y yo no tengo su sentimiento de compasión.

En cuarto lugar: cada representación tiene un solo portador; dos personas no tienen la misma representación.

Si lo anterior no fuera así, la representación tendría existencia independiente de este hombre e independiente de aquél. ¿Es aquel tilo mi representación? Al usar en esta pregunta la expresión "aquel tilo", en rigor me estoy adelantando a la respuesta, pues con esa expresión quiero señalar algo que veo y que también otros pueden contemplar y tocar. Hay dos posibilidades. Si he logrado mi propósito, si con la expresión "aquel tilo" me refiero a algo, entonces el pensamiento expresado en la oración "aquel tilo es mi representación" tiene, sin duda, que ser negado. Pero si no he alcanzado mi propósito, si pretendo ver sin ver realmente, si, en consecuencia, la referencia de "aquel tilo" es vacía, entonces me he extraviado, sin saberlo y sin quererlo, en la región de la ficción. Así, pues, ni el contenido de la oración "aquel tilo es mi representación", ni el de la oración "aquel tilo no es mi representación", es verdadero, pues en los dos casos hago un enunciado que carece de objeto. Así, uno puede rehusarse a dar respuesta a la pregunta con fundamento en que el contenido de la oración "aquel tilo es mi representación" es ficticio. Tengo, sí, una representación, pero no me refiero a ella con las palabras "aquel tilo". Ahora bien, alguien podría realmente querer referirse con las palabras "aquel tilo" a alguna de sus representaciones; él sería, entonces, portador de aquello a lo que quiso referirse con esas palabras, pero en ese caso no estaría viendo aquel tilo, ni nadie más lo vería ni sería su portador.

Vuelvo ahora a la pregunta: ¿es el pensamiento una representación? Si el pensamiento que expreso en el teorema de Pitágoras puede ser reconocido como verdadero tanto por otros como por mí, no pertenece, entonces, al contenido de mi con-

ciencia; no soy yo, por consiguiente, su portador; sin embargo, puedo reconocerlo como verdadero. Pero si no es el mismo pensamiento el que yo o aquel otro hombre consideramos que es el contenido del teorema de Pitágoras, entonces, en rigor, no se debería decir "el teorema de Pitágoras", sino "mi teorema de Pitágoras" o "su teorema de Pitágoras", y éstos serían diferentes, pues el sentido pertenece necesariamente a la oración. En ese caso, mi pensamiento puede ser contenido de mi conciencia; el de él, de su conciencia. ¿Podría entonces ser verdadero el sentido de mi teorema de Pitágoras y el de él falso? Dije que la palabra "rojo" era aplicable sólo en el ámbito de mi conciencia si no pretendía enunciar una propiedad de las cosas, sino caracterizar algunas de mis impresiones sensibles. Así, palabras como "verdadero" y "falso", tal como yo las entiendo, también podrían ser aplicables sólo en el ámbito de mi conciencia si no designaran algo de lo cual no soy portador, sino que estuvieran destinadas a caracterizar de algún modo el contenido de mi conciencia. Entonces, la verdad estaría confinada al contenido de mi conciencia, y sería dudoso que algo similar ocurriera en la conciencia de los demás.

Si cada pensamiento necesita un portador a cuyos contenidos de conciencia pertenece, entonces el pensamiento sólo pertenece a ese portador, y no hay una ciencia que sea común a muchos, en la que muchos puedan trabajar, sino que tal vez tengo mi ciencia; es decir, un conjunto de pensamientos de los que soy portador, y otro tiene su ciencia. Cada uno se ocupa con los contenidos de su propia conciencia. Una contradicción entre ambas ciencias no es, pues, posible. Y en rigor sería ocioso discutir sobre la verdad; tan ocioso —casi diría, tan ridículo— como que dos personas discutieran sobre si un billete de cien marcos es auténtico, refiriéndose ambas al billete que cada una tiene en su bolsillo y entendiendo la palabra "auténtico" en un sentido particular para cada uno. Si alguien considera que los pensamientos son representaciones, entonces, lo que él reconoce como verdadero es, según su propia opinión, el contenido de su conciencia y, en rigor, no incumbe para nada a los demás. Y si él oyera de mí la opinión de que un pensamiento no es una representación, no podría cuestionarlo, pues, en este caso, tampoco le incumbiría.

Así, pues, el resultado parece ser el siguiente: los pensamientos no son ni objetos del mundo exterior ni representaciones.

Hay que reconocer un tercer dominio. Lo que pertenece a ese dominio tiene en común con las representaciones que no puede ser percibido por los sentidos, y con los objetos, que no necesita de un portador a cuyos contenidos de conciencia pertenezca. Así, por ejemplo, el pensamiento que expresamos en el teorema de Pitágoras es atemporalmente verdadero, es verdadero independientemente de si alguien lo considera verdadero. No necesita de un portador. Es verdadero no sólo a partir de que fue descubierto; así como un planeta, que aun antes de que alguien lo haya visto, ya estaba interactuando con otros planetas.[5]

Pero me parece oír una curiosa objeción. He admitido varias veces que la misma cosa que yo veo puede ser contemplada también por otro. Pero, ¿qué tal si todo fuera sólo un sueño? Si yo soñara solamente mi paseo con mi acompañante, si yo sólo soñara que mi acompañante ve, como yo, el prado verde, si todo eso no fuera más que un espectáculo montado en el escenario de mi conciencia, entonces sería dudoso que hubiese cosas del mundo exterior. Quizás el reino de las cosas está vacío y no veo cosas, tampoco seres humanos, sino tal vez sólo tengo representaciones cuyo portador soy yo mismo. Una representación que, así como mi cansancio, no puede existir independientemente de mí, no puede ser una persona, no puede contemplar conmigo el mismo prado, no puede ver la fresa que yo sostengo en mi mano. Es del todo imposible creer que sólo tenga mi mundo interior, en lugar de todo el mundo circundante en el que creo moverme y actuar. Y, sin embargo, es la consecuencia inevitable de la propuesta de que sólo lo que es mi representación puede ser objeto de mi conciencia. ¿Qué se seguiría de esta propuesta si fuera verdadera? ¿Habría otros seres humanos? Eso sería, sí, posible, pero yo no sabría nada de ellos: pues un ser humano no puede ser una representación mía y, por consiguiente —si nuestra propuesta es verdadera—,

[5] Se ve un objeto, se tiene una representación, se capta o se piensa un pensamiento. Cuando se capta o se piensa un pensamiento no se lo crea, se entra en relación con él, que ya existía antes, de una cierta manera; tal relación es diferente de la de ver un objeto o tener una representación.

tampoco podría ser objeto de mi consideración. Y, así, pierden fundamento todas aquellas consideraciones en las que admití que algo pudiera ser objeto para otro, tanto como para mí, pues aun si esto ocurriera, yo no lo sabría. Para mí sería imposible distinguir aquello de lo que soy portador, de aquello de lo que no soy portador. Si juzgara que algo no es una representación mía, lo haría objeto de mi pensamiento, y con ello de mi representación. Según esta interpretación, ¿hay un prado verde? Quizás, pero no sería visible para mí; pues si un prado no es mi representación, no puede –de acuerdo con nuestra propuesta– ser objeto de mi contemplación. Pero si el prado es una representación mía, entonces es invisible, pues las representaciones no son visibles. Puedo tener, por cierto, la representación de un prado verde, pero entonces no es verde, pues no hay representaciones verdes. ¿Hay, según esto, una bala de cien kilogramos de peso? Tal vez, pero yo no podría saber nada de ella. Si una bala no es mi representación, no puede, según nuestra propuesta, ser objeto de mi consideración, de mi pensamiento. Pero si una bala fuera mi representación, no tendría peso. Puedo tener la representación de una bala pesada. Ésta contendría, entonces, como una parte, la representación del peso. Esta parte, sin embargo, no es una propiedad de la representación total, de la misma manera como Alemania no es una propiedad de Europa. Así, la consecuencia es que:

O bien es falsa la propuesta de que sólo lo que es mi representación puede ser objeto de mi consideración, o bien todo mi saber y mi conocer se limitan al campo de mis representaciones, al escenario de mi conciencia. En este caso yo tendría solamente un mundo interior y nada sabría de los otros seres humanos.

Es notable cómo en el curso de estas reflexiones los opuestos se transforman los unos en los otros. Considérese, por ejemplo, el caso de un fisiólogo de los sentidos. Como conviene a un investigador de las ciencias naturales, él está muy lejos de considerar que las cosas de que está convencido que ve y que toca sean sus propias representaciones. Por el contrario, cree tener en las impresiones sensibles las más seguras pruebas de que existen cosas totalmente independientes de su sentir, representar y pensar y que no necesitan de su conciencia. Tampoco reconoce las fibras nerviosas y células ganglionares como contenidos de su conciencia, más bien se inclina a considerar que su conciencia depende justamente de las fibras nerviosas y células ganglionares. Él observa que los rayos de luz al refractarse en el ojo entran en contacto con las terminaciones nerviosas ópticas y allí dan lugar a un cambio, a una excitación. Una parte de ésta es conducida a través de fibras nerviosas hasta las células ganglionares. A ello se suman, seguramente, otros procesos en el sistema nervioso y surgen las sensaciones de color; y éstas se unen, tal vez, para formar aquello que llamamos la representación de un árbol. Entre el árbol y mi representación se interponen procesos físicos, químicos y fisiológicos. Pero, según parece, con mi conciencia se relacionan inmediatamente sólo los procesos en mi propio sistema nervioso, y cada observador del árbol tiene sus propios procesos en su propio sistema nervioso. Ahora bien, los rayos de luz, antes de haber penetrado en mi ojo, pueden haber sido reflejados por un espejo y, así, haberse proyectado como si hubieran salido de un lugar detrás del espejo. Los efectos sobre los nervios ópticos y todo lo que sigue, ocurrirá como ocurrirá si los rayos de luz hubieran salido de un árbol detrás del espejo y se hubieran propagado sin obstáculo hasta llegar al ojo. Y, así, se producirá al final una representación de un árbol sin que haya tal árbol. También por refracción de la luz puede surgir, con la mediación del ojo y del sistema nervioso, una representación que no corresponda absolutamente a nada. Más aún, la excitación del nervio óptico ni siquiera necesita de luz para producirse. Si en nuestra cercanía cae un rayo, creemos ver llamas, aun cuando no podamos ver el rayo mismo. En tal caso, el nervio óptico es tal vez excitado por algo así como corrientes eléctricas que se producen en nuestro cuerpo a consecuencia del rayo. Si el nervio óptico es excitado por este medio de la misma manera como lo sería por los rayos de luz que parten de las llamas, entonces creemos ver llamas. Depende, pues, sólo de la excitación de los nervios ópticos, sin importar de qué modo se realice esa excitación.

Podemos dar un paso más adelante. En rigor esta excitación del nervio óptico no se da de manera inmediata, sólo es una suposición. Creemos que una cosa independiente de nosotros

excita un nervio y produce mediante ello una impresión sensible, pero, en realidad, sólo experimentamos de ese proceso el último paso que impacta nuestra conciencia. Esa impresión sensible, esa sensación que atribuimos a la excitación de un nervio, ¿no podría acaso tener también otras causas, ya que la misma excitación del nervio puede también ocurrir de manera diferente? Si llamamos representación a lo que ocurre en nuestra conciencia, en rigor experimentamos sólo representaciones, pero no sus causas. Y si el investigador quiere apartar todo lo que es mera conjetura, no le quedan sino representaciones, todo se le reduce a representaciones, inclusive los rayos de luz, las fibras nerviosas y las células ganglionares de los que él había partido. Y, así, termina destruyendo los fundamentos de su propia construcción. ¿Es todo representación? ¿Acaso todo necesita un portador, sin el cual no tiene existencia? Me he considerado a mí mismo portador de mis representaciones, pero, ¿acaso no soy yo mismo una representación? Es como si yaciera en un sofá, como si viera las puntas de un par de botas lustradas, la parte anterior de unos pantalones, un chaleco, unos botones, parte de una chaqueta, especialmente las mangas, dos manos, pelos de una barba, trozos borrosos de una nariz. ¿Acaso soy yo mismo esa unión de impresiones visuales, ese conjunto de representaciones? Me parece ver allí también una silla. Es una representación. En rigor yo mismo no difiero mucho de ella, pues, ¿no soy yo también una unión de impresiones sensibles, una representación? Pero, ¿dónde está entonces el portador de estas representaciones? ¿Cómo he llegado a escoger una de esas representaciones y a proponerla como portadora de las demás? ¿Por qué ha de ser ésa la representación que he dado en llamar "yo"? ¿No podría igualmente elegir para ello aquella representación que me siento tentado a llamar "silla"? Y en todo caso, ¿para qué, pues, un portador de las representaciones? Un portador sería siempre esencialmente distinto de las representaciones de que es portador, sería algo independiente, que no necesita de ningún portador extraño a él. Si todo es representación, entonces no hay ningún portador de las representaciones. Y, de este modo, nuevamente tenemos la impresión de que los opuestos se confunden. Si no hay un portador de las representaciones, tampoco hay representaciones, pues éstas necesitan de un portador sin el cual no pueden existir. No habiendo soberano, tampoco habrá súbditos. La dependencia que me había inclinado a concederle a la sensación respecto del que la siente, desaparece al no haber ya ningún portador. Lo que he llamado representaciones son, entonces, objetos independientes. Carezco de todo fundamento para adjudicarle un lugar excepcional al objeto que llamé "yo".

¿Pero es posible eso? ¿Puede haber una experiencia sin alguien que la experimente? ¿Qué sería este gran espectáculo sin un espectador? ¿Puede existir un dolor sin alguien que lo tenga? El ser sentido es condición necesaria del dolor y, a su vez, es condición del ser sentido alguien que sienta. Pero, entonces, hay algo que no es representación mía y que sí puede ser objeto de mi consideración, de mi pensamiento, y yo soy esa cosa. ¿O acaso puedo ser parte del contenido de mi conciencia, mientras que otra parte es, por ejemplo, una representación de la Luna? ¿Ocurre acaso esto cuando juzgo que *yo* contemplo *la Luna*? Entonces esa primera parte tendría una conciencia, y una parte del contenido de esta conciencia sería una vez más yo. Y así sucesivamente. Pero es impensable que esté encasillado en mí mismo hasta el infinito, pues entonces no habría sólo un yo, sino infinitos. Yo no soy mi propia representación, y si afirmo algo acerca de mí –por ejemplo, que en este momento no siento ningún dolor–, entonces mi juicio concierne a algo que no es contenido de mi conciencia, que no es mi representación, a saber: a mí mismo. De modo que, aquello de lo cual yo enuncio algo, no es necesariamente representación mía. Sin embargo, podría objetarse: si pienso en este momento que yo no tengo ningún dolor, ¿acaso no corresponde a la palabra "yo" algo en el contenido de mi conciencia? ¿Y no es eso una representación? Es muy posible. Cierta representación puede estar relacionada en mi conciencia con la representación de la palabra "yo". Pero ella es, entonces, una representación junto a las otras representaciones, y yo soy su portador como lo soy de las otras representaciones. Tengo una representación de mí mismo, pero yo no soy esa representación. Hay que distinguir rigurosamente aquello que es contenido de mi conciencia, mi representación, de aquello que es objeto de mi pensamiento. Así, pues, es falsa la propuesta de que sólo puede ser objeto

de mi consideración, de mi pensamiento, lo que pertenece al contenido de mi conciencia.

Ahora, el camino está libre para que yo pueda reconocer a otro como portador independiente de representaciones. Tengo una representación de él, pero no la confundo con él mismo. Y cuando enuncio algo acerca de mi hermano, no enuncio nada acerca de la representación que tengo de él.

El enfermo que tiene un dolor es portador de ese dolor, pero el médico que lo atiende, que reflexiona acerca de las causas de ese dolor, no es portador de ese dolor. No pretende mitigar el dolor del enfermo anestesiándose a sí mismo. Una representación en la conciencia del médico puede, por cierto, corresponder al dolor del enfermo, pero ésta no es el dolor ni lo que el médico quiere calmar. Si el médico hace venir a otro médico, entonces hay que distinguir: primero, el dolor del cual el enfermo es portador; segundo, la representación de ese dolor que tiene el primer médico, y tercero, la representación de ese dolor que tiene el segundo médico. Esta última pertenece, claro está, al contenido de la conciencia del segundo médico, pero no es el objeto de su reflexión; quizás sí es un medio auxiliar para la reflexión, como podría serlo también, por ejemplo, un dibujo. Ambos médicos tienen como objeto común el dolor del enfermo, del que no son portadores. Aquí se puede ver que no sólo una cosa, sino también una representación, puede ser objeto común del pensamiento de personas que no tienen esa representación.

De esta manera, pienso, el problema se vuelve inteligible. Si el hombre no pudiera pensar ni tomar como objeto de su pensamiento algo de lo que él no fuera portador, tendría tal vez un mundo interior, no un mundo exterior. Pero, ¿no se basará esto en un error? Estoy convencido de que a la representación que yo asocio con las palabras "mi hermano" corresponde algo que no es mi representación y acerca de lo cual puedo enunciar algo. ¿Pero con esto no me estaré equivocando? Tales errores ocurren con frecuencia. Caemos entonces, contra nuestra intención, en la ficción. ¡En efecto! Al dar el paso con el que conquisto para mí un mundo exterior, me expongo al peligro del error. Y aquí doy una nueva diferencia de mi mundo interior respecto del mundo exterior. No puedo poner en duda que tengo una impresión visual de verde; en cambio, no es tan seguro que vea una hoja de tilo. Así, en contra de opiniones muy difundidas, encontramos seguridad en el mundo interior, mientras que en nuestras excursiones al mundo exterior nunca nos abandona del todo la duda. No obstante, aquí también en muchos casos la verosimilitud es apenas distinguible de la certeza, de modo que podemos aventurarnos a juzgar los objetos del mundo exterior. Y debemos tomar ese riesgo, aun contando con el peligro del error, si no queremos exponernos a peligros aún mayores.

Como resultado de las últimas consideraciones concluyo lo siguiente: no todo lo que puede ser objeto de mi conocimiento es representación. Yo mismo, portador de representaciones, no soy una representación. No hay ahora ningún obstáculo para reconocer a los demás como portadores de representaciones al igual que yo mismo lo soy. Y, una vez que se ha dado la posibilidad, la verosimilitud es muy grande, tan grande que, a mi entender, no se distingue ya de la certeza. ¿Habría, de lo contrario, una ciencia de la historia? ¿No perecería, de lo contrario, toda teoría del deber, todo derecho? ¿Qué quedaría de la religión? También las ciencias naturales podrían ser valoradas sólo como ficción, como similares a la astrología y a la alquimia. De modo que las reflexiones que he llevado a cabo bajo el supuesto de que hay otros hombres, además de mí, que pueden hacer a las mismas cosas que yo objetos de su consideración, de su pensamiento, en lo esencial se mantienen vigentes.

No todo es representación. Así es que yo puedo reconocer como independiente de mí también el pensamiento que otros, al igual que yo, pueden captar. Puedo reconocer una ciencia en la que muchos pueden estar ocupados investigando. No somos portadores de los pensamientos como lo somos de nuestras representaciones. No tenemos un pensamiento de la misma manera como tenemos una impresión sensible; pero tampoco vemos un pensamiento, como sí vemos una estrella. Por eso aquí sería aconsejable elegir una expresión especial, y para ello se nos ofrece la palabra "captar".[6] A la captación de un pensamiento le corresponde una capacidad mental especial:

[6] La expresión "captar" es tan figurativa como "contenido de conciencia". La esencia del lenguaje, justamente, no lo podría permitir de otra manera.

el poder de pensar. Al pensar no producimos los pensamientos, sino que los captamos. Pues lo que he llamado pensamiento está en estrecha relación con la verdad. Lo que yo reconozco como verdadero, juzgo que es verdadero independientemente de mi reconocimiento de su verdad e independientemente también de si pienso o no en ello. Que un pensamiento sea verdadero no tiene nada que ver con que sea pensado. "¡Hechos! ¡Hechos! ¡Hechos!", exclama el investigador de la naturaleza cuando quiere insistir en la necesidad de un fundamento seguro para la ciencia. ¿Qué es un hecho? Un hecho es un pensamiento que es verdadero. Pero el investigador de la naturaleza no va a admitir como fundamento seguro de la ciencia algo que depende de los cambiantes estados de conciencia de los hombres. La tarea de la ciencia no consiste en crear, sino en descubrir pensamientos verdaderos. El astrónomo puede aplicar una verdad matemática cuando investiga acontecimientos que sucedieron hace ya tiempo, y que tuvieron lugar cuando aún nadie había reconocido, al menos en la Tierra, esa verdad. Y lo puede hacer porque la verdad de un pensamiento es atemporal. De modo que aquella verdad no pudo haberse originado sólo con su descubrimiento.

No todo es representación. Pues, de lo contrario, la psicología contendría en sí todas las ciencias o sería, por lo menos, juez supremo sobre todas las ciencias. Pues, si no, la psicología dominaría incluso a la lógica y la matemática. Y nada constituiría un mayor desconocimiento de la matemática que el subordinarla a la psicología. Ni la lógica ni la matemática tienen como misión estudiar las mentes, ni el contenido de conciencia del que el hombre individual es portador: Más bien, quizás, se podría establecer que su misión es el estudio de la mente; de *la* mente, no de las mentes.

La captación de un pensamiento presupone a alguien que lo capta, que piensa. Él es, pues, el portador del pensar, no del pensamiento. Aunque el pensamiento no pertenece al contenido de la conciencia de quien lo piensa, tiene que haber

Lo que tengo en mi mano puede ser considerado su contenido; pero es el contenido de la mano de una manera completamente distinta y mucho más extraña a ella que los huesos, los músculos de los que se compone y sus tensiones.

algo en ella, sin embargo, que apunte al pensamiento. Pero esto no debe ser confundido con el pensamiento mismo. Así también, Algol es diferente de la representación que alguien tiene de Algol.

El pensamiento no pertenece, como la representación, a mi mundo interior, tampoco al mundo exterior, al mundo de los objetos perceptibles por los sentidos. Esta conclusión, por más que surja con evidencia a partir de lo expuesto, tal vez no haya de ser aceptada sin resistencia. Habrá muchos, pienso, a quienes les parezca imposible adquirir información sobre algo que no pertenece a su mundo interior si no es mediante la percepción sensible. De hecho ésta es frecuentemente considerada la fuente más segura de conocimiento, incluso la única, de todo aquello que no pertenece al mundo interior. Pero, ¿con qué derecho? La impresión sensible, que es parte del mundo interior, es ciertamente componente esencial de la percepción sensible. Dos hombres, empero, no tienen la misma impresión sensible, aunque las de ambos puedan ser semejantes. Las impresiones sensibles solas no nos revelan el mundo exterior. Quizás exista un ser que sólo tenga impresiones sensibles sin ver o tocar cosas. El tener impresiones visuales no significa aún ver cosas. ¿Cómo es que veo el árbol allí donde lo veo? Evidentemente eso depende de las impresiones visuales que tengo y de la índole particular de las que se producen por el hecho de que yo veo con dos ojos. En cada una de las dos retinas surge, físicamente hablando, una imagen particular. Alguien más ve el árbol en el mismo lugar. También él tiene dos imágenes retinianas, pero que difieren de las mías. Debemos admitir que esas imágenes retinianas determinan nuestras impresiones. Según esto, no sólo no tenemos las mismas impresiones visuales, sino que éstas difieren notablemente unas de otras. Y, sin embargo, nos movemos en el mismo mundo exterior. Ocurre, pues, que tener impresiones visuales es necesario para ver cosas, pero no es suficiente. Lo que se requiere además de eso no es algo de naturaleza sensible. Y es eso justamente lo que nos revela el mundo exterior, pues sin ello quedaría cada uno encerrado en su mundo interior. Puesto que lo decisivo es algo no sensible, ese algo no sensible podría, incluso sin la concurrencia de impresiones sensibles, conducirnos fuera de nuestro mun-

do interior y permitirnos captar pensamientos. Uno debería distinguir, además de su mundo interior, el mundo exterior propiamente dicho, el de las cosas perceptibles por los sentidos, y el dominio de lo que no es perceptible por los sentidos. Para reconocer ambos dominios necesitamos algo de carácter no sensible, pero para la percepción sensible de las cosas necesitaríamos además impresiones sensibles, y éstas pertenecen totalmente al mundo interior. Así, aquello en que se sustenta la diferencia entre darse una cosa y darse un pensamiento, es algo que no es atribuible a ninguno de aquellos dos dominios, sino al mundo interior. De modo que no puedo considerar esa diferencia tan grande que por ella llegue a ser imposible la presentación de un pensamiento que no pertenezca al mundo interior.

Un pensamiento, ciertamente, no es algo a lo que habitualmente se llame actual.* El mundo de lo actual es un mundo en el que esto actúa sobre aquello, lo cambia y a su vez experimenta una reacción en virtud de la cual él mismo es cambiado. Y todo esto acontece en el tiempo. Lo que es atemporal y no se puede cambiar difícilmente podremos reconocerlo como actual. Ahora bien, ¿es el pensamiento cambiable o es atemporal? El que expresamos en el teorema de Pitágoras es, por cierto, atemporal, eterno, no cambiable. Pero, ¿no hay también pensamientos que hoy son verdaderos, pero después de medio año falsos? Por ejemplo, el pensamiento de que aquel árbol tiene follaje verde, ¿no es acaso falso después de medio año? No, porque no es el mismo pensamiento. Las solas palabras "este árbol es verde" no bastan para expresar el pensamiento, pues el tiempo de la emisión le pertenece también. Sin la determinación temporal que se da a través de ellas no tendríamos un pensamiento completo, es decir, no tendríamos tal pensamiento en absoluto. Sólo una oración que contenga una determinación temporal y que sea en todo respecto completa, expresa un pensamiento. Pero éste, si es verdadero, no lo es hoy o mañana, es atemporalmente verdadero. El tiempo presente en "es verdadero" no se refiere al momento en que es dicho, sino que es, si se me permite la expresión, un tiempo de la atemporalidad. Si usamos la mera forma de la oración afirmativa evitando la palabra "verdadero", hay, pues, que distinguir dos cosas: la expresión del pensamiento y la afirmación. La determinación temporal, contenida de algún modo en la oración, pertenece sólo a la expresión del pensamiento; mientras que la verdad, cuyo reconocimiento radica en la forma de la oración afirmativa, es atemporal. Es cierto que las mismas palabras, debido a la mutabilidad del lenguaje con el tiempo, pueden adquirir otro sentido, expresar otro pensamiento; pero entonces la mutación concierne a lo lingüístico.

*Para la palabra alemana "*wirklich*" se prefiere en este caso la española "actual" más que, por ejemplo, "real", para mantenernos así más cerca del texto original. Éste reúne intencionalmente en este pasaje términos derivados de la raíz *wirk-* (*wirklich*) "actual"; *wirkt*, "actúa" y *Gegenwirkung*, "reacción", que traduce con bastante fidelidad la raíz latina *act-*, *acc-*. [N. del t.].

Pero, ¿qué valor podría tener para nosotros lo eternamente inmutable, lo que no ejerce una acción sobre nosotros ni experimenta, a su vez, reacción? Algo totalmente, y en todo aspecto, no actuante sería también no actual [no real] y no existiría para nosotros. Incluso lo atemporal debe estar de algún modo vinculado con la temporalidad si es que ha de ser algo para nosotros. ¿Qué sería para mí un pensamiento que jamás fuese captado por mí? Pero, al captar un pensamiento entro en relación con él y él conmigo. Es posible que el mismo pensamiento que hoy es pensado por mí, ayer no haya sido pensado por mí. Con esto quedaría eliminada, pues, la estricta atemporalidad del pensamiento. Pero se puede uno sentir inclinado a distinguir entre propiedades esenciales e inesenciales, y a reconocer algo como atemporal si las mutaciones que sufre sólo afectan sus propiedades inesenciales. Se llamará inesencial a una propiedad de un pensamiento si consiste en que ese pensamiento sea captado por algún sujeto pensante o si se deriva de tal hecho.

¿Cómo actúa un pensamiento? Siendo captado y tenido por verdadero. Es un proceso en el mundo interior del que piensa que puede tener consecuencias posteriores en ese mundo interior, las cuales, al extenderse al terreno de la voluntad, se hacen notorias también en el mundo exterior. Así, por ejemplo, si capto el pensamiento que expresamos en el teorema de Pitágoras, las consecuencias pueden ser: que lo reconozca como verdadero y, luego, que lo aplique al tomar una decisión que dé lugar a la aceleración de masas. Es así como nuestras

acciones vienen preparadas por el pensar y el juzgar. Y es así como un pensamiento puede tener influencia mediata sobre el movimiento de masas. La acción de un ser humano sobre otro está casi siempre posibilitada por el pensamiento. La gente comunica pensamientos. ¿Cómo ocurre eso? Una persona produce cambios en el mundo exterior que, al ser percibidos por los demás, los pone en la situación de captar un pensamiento y considerarlo verdadero. Los grandes acontecimientos de la historia del mundo ¿pudieron haberse realizado de otra manera que por la comunicación de pensamientos? Y, sin embargo, tendemos a considerar a los pensamientos como no actuales, porque parecen inactivos en los procesos; cuando, en verdad, pensar, juzgar, expresar, comprender, todo hacer, es cosa de los seres humanos. ¡Cuán diferente parece la actualidad de un martillo, comparado con la de un pensamiento! ¡Cuán diferente es el proceso de pasar a otro un martillo del de comunicar un pensamiento! El martillo pasa de estar en poder de uno al de otro, es asido, experimenta una presión, con ello su densidad, su contextura, se altera parcialmente, cambia de lugar. Con el pensamiento, en cambio, no ocurre nada de esto. Al ser comunicado, el pensamiento no abandona los dominios de quien lo comunica, pues, en rigor, el hombre no tiene ningún poder sobre él. Un pensamiento, al ser captado, al principio sólo provoca cambios en el mundo interior del que lo capta, pero en su núcleo esencial permanece inalterado, pues los cambios que sufre sólo afectan a las propiedades inesenciales. Falta aquí lo que siempre reconocemos en el acontecer natural: la acción recíproca. Los pensamientos no son enteramente inactuales, pero su actualidad es de otra índole completamente diferente de la de las cosas. Y su actuar se produce por algo que hace el que piensa; sin esto serían inactivos —al menos hasta donde nos es posible ver. Y, sin embargo, el que piensa no los crea, sino que debe tomarlos tal como son. Pueden ser verdaderos sin ser captados por alguien que piense, y no son del todo inactuales ni siquiera entonces, al menos si pueden ser puestos y, así, ser captados en acción.

PARTE III

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

CONTENIDOS:

INTRODUCCIÓN A LA PARTE III: FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

por Agustín Rayo

Es difícil imaginar un proyecto filosófico más importante que el de Frege, y más difícil todavía imaginar uno cuyo fracaso haya sido más desastroso.

El proyecto que tengo en mente es un proyecto logicista. Frege quería defender la tesis de que las verdades matemáticas pueden reducirse a verdades lógicas (y que las falsedades matemáticas pueden reducirse a falsedades lógicas). El proyecto fracasó porque el sistema de Frege contenía una contradicción.

Me gustaría hacer tres cosas en esta introducción: (1) describir el proyecto de Frege con un poco más de detalle; (2) describir la contradicción; y (3) explicar por qué me parece que el trabajo de Frege mantiene su importancia a pesar de la contradicción.

No soy un historiador, y no pretendo hacer hermenéutica fregeana. Mi objetivo es discutir las lecciones filosóficas del trabajo de Frege desde un punto de vista contemporáneo.

1. *El proyecto*

Cuando escribió su obra magna, *Las leyes fundamentales de la aritmética* (vol. 1, 1893; vol. 2, 1903), Frege era un logicista. Creía que el vocabulario de la aritmética básica podía definirse de manera tal que toda verdad aritmética fuera consecuencia lógica de un sistema de axiomas puramente lógicos (y que toda falsedad aritmética implicara lógicamente una contradicción).

El tipo de sistema lógico que Frege tenía en mente no es exactamente lo que hoy consideraríamos lógica. En *Las leyes fundamentales de la aritmética*, Frege estaba trabajando con un sistema equivalente al resultado de extender una *lógica de segundo orden* con una *teoría de extensiones*.

Voy a explicar brevemente en qué consiste una lógica de segundo orden, y en qué consiste una teoría de extensiones.

1.1. La lógica de segundo orden

Sin lugar a dudas, el avance más importante en materia de lógica desde Aristóteles es el descubrimiento de la lógica de primer y segundo orden. (¿Y quién fue el descubridor? ¡Frege! Véase la introducción a la parte I de este volumen.)

Los lenguajes de *primer* orden son bien conocidos entre filósofos. Contienen nombres propios (como "Susana") y predicados (como "Verde(...)"). Estas expresiones pueden combinarse para obtener fórmulas como la siguiente:

Verde (Susana)
[léase: "Susana es verde"]

Los lenguajes de primer orden también contienen *variables de primer orden* $(x, y, z, \ldots)$, que ocupan la misma posición sintáctica que los nombres propios. Por ejemplo, en la fórmula "Verde (Susana)", podemos reemplazar el nombre "Susana" con la variable "x" y obtener la fórmula:

Verde (x)
[léase: "eso es verde"]

Las variables de primer orden pueden "ligarse" utilizando cuantificadores. Por ejemplo, podemos ligar la variable "x" en la fórmula "Verde(x)" con el cuantificador existencial "$\exists$", y obtener:

$\exists x$ (Verde (x))
[léase: "existe algo tal que eso es verde"]

Un lenguaje de *segundo orden* es el resultado de extender un lenguaje de primer orden con *variables de segundo orden* $(F, G, H, \ldots)$.

A diferencia de las variables de primer orden, que ocupan la posición sintáctica de un nombre propio, las variables de segundo orden ocupan la posición sintáctica de un predicado. Por ejemplo, en la fórmula "Verde (Susana)", podemos reemplazar el predicado "Verde" con la variable "F" y obtener:

F(Susana)
[léase: "Susana es así"]

Antes vimos que es posible ligar una variable de primer orden con un cuantificador. También es posible ligar una variable de segundo orden con un cuantificador. Por ejemplo, podemos ligar la variable "F" en la fórmula "F(Susana)" con el cuantificador existencial "$\exists$", y obtener:

$\exists F(F$(Susana))
[léase: "las cosas pueden ser de modo tal que Susana es así"]

Los lenguajes de segundo orden son mucho más expresivos que los de primer orden. Frege descubrió, por ejemplo, que en un lenguaje de segundo orden es posible definir la noción de *ancestro* a partir de la noción de *padre*:

$$\text{Ancestro}(x, y) \leftrightarrow -\exists F - ((F(y) \,\&\, \forall z \forall w ((F(z) \,\&\, \text{Padre}(w, z)) \rightarrow F(w))) \rightarrow F(x))$$

[léase: no es el caso que las cosas pueden ser de modo tal que no es el caso que siempre que se cumpla la condición de que: (1) y es así y (2) si z es así y w es padre de z, entonces w es así, se cumple también la condición de que x es así.]

Frege también descubrió que en un lenguaje de segundo orden es posible expresar el concepto de una *biyección* entre las Fs y las Gs.

Una *lógica*, en el sentido que nos interesa aquí, es un sistema para determinar cuáles de los enunciados de un lenguaje dado cuentan como verdades lógicas, y cuáles cuentan como falsedades lógicas.

Cuando Frege introdujo los lenguajes de primer y segundo orden en su *Conceptografía* (Frege 1879), también introdujo una lógica. Más específicamente, introdujo un sistema de axiomas y reglas de inferencia con la idea de que un enunciado contara como verdad lógica siempre y cuando pudiera derivarse a partir de los axiomas utilizando las reglas de inferencia.

Las lógicas de primer y segundo orden que hoy consideramos estándar son descendientes directos de la lógica que introdujo Frege en su *Conceptografía*.

1.2. La teoría de extensiones

Cuando Frege escribió *Las leyes fundamentales de la aritmética* (1893), agregó un nuevo axioma a la lógica de la *Conceptografía*, un axioma que hoy en día no se consideraría parte de la lógica.

El nuevo axioma gobierna el comportamiento de lo que Frege llamaba "extensiones", y lo que aquí llamaré simplemente "conjuntos".

Para hablar de conjuntos, introduzcamos los corchetes "{" y "}", y utilicemos

$$\{z : \varphi(z)\}$$

para referir al conjunto cuyos elementos son precisamente aquellos objetos z que satisfacen la fórmula $\varphi(z)$. (Así, por ejemplo, $\{z : \text{Verde}(z)\}$ es el conjunto de todas y sólo las cosas verdes.)

Utilizando esta notación, el axioma adicional de Frege puede expresarse como sigue:

> LEY FUNDAMENTAL V
> $\{z : F(z)\} = \{z : G(z)\} \leftrightarrow \forall x (F(x) \leftrightarrow G(x))$

En otras palabras:

> El conjunto de las *F*s es idéntico al conjunto de las *G*s si y sólo si las *F*s son exactamente las *G*s.

(De esto se sigue, por ejemplo, que dado que no es el caso que los volcanes son exactamente las salamandras, el conjunto de volcanes no es idéntico al conjunto de salamandras.)

A primera vista, por lo menos, la Ley Fundamental V parece una manera muy sensata de axiomatizar el comportamiento de los conjuntos. ¿Qué podría ser más natural que la idea de que los conjuntos son idénticos precisamente cuando tienen los mismos elementos?

Más adelante veremos las razones por las que la Ley Fundamental V es problemática. Por ahora, sin embargo, me gustaría considerar una pregunta preliminar. Los filósofos contemporáneos clasificarían a la Ley Fundamental V como un principio matemático en lugar de un principio lógico. ¿Por qué pensar —como pensaba Frege— que la Ley Fundamental V es un principio *lógico*?

La clave del asunto está en la doctrina fregeana de la posibilidad de *reestructurar* el contenido de una oración.[*] Consideremos, por ejemplo, las oraciones siguientes:

> La línea *a* es paralela a la línea *b*.
> La dirección de la línea *a* es idéntica a la dirección de la línea *b*.

Frege creía que a pesar de las diferencias sintácticas entre esas oraciones, no hay ninguna diferencia en su *contenido*; es decir, no hay ninguna diferencia en lo que se requeriría del mundo para que fueran verdaderas. Son oraciones que tienen el mismo contenido, pero "estructurado" de manera diferente.

De modo similar, uno podría pensar que las oraciones siguientes tienen el mismo contenido, pero estructurado de manera diferente:

> Las *F*s son exactamente las *G*s.
> El conjunto de las *F*s es idéntico al conjunto de las *G*s.

Si uno viera las cosas de esta manera, uno podría pensar que la Ley Fundamental V es, en cierto sentido, tautológica: lo que aparece a la izquierda del condicional no es más que una manera diferente de expresar lo que aparece a la derecha del condicional. Es en este sentido que uno podría pensar en la Ley Fundamental V como un principio lógico.

1.3. Conclusión de la primera sección

Estoy ahora en posición de articular de modo más preciso el proyecto logicista de Frege. En *Las leyes fundamentales de la aritmética*, Frege quería definir el vocabulario matemático de manera tal que pudiera demostrarse el siguiente resultado:

(1) Toda verdad aritmética es un teorema de la lógica de segundo orden más la Ley Fundamental V.
(2) Toda falsedad aritmética implica una contradicción en una lógica de segundo orden más la Ley Fundamental V.

[*] Véanse "Sobre concepto y objeto", y *Los fundamentos de la aritmética*, § 64, pp. 277-292 y 533-535, respectivamente, en este mismo volumen.

2 . *La contradicción*

En 1902, Bertrand Russell le escribió a Frege informándole que había descubierto una contradicción en el sistema de *Las leyes fundamentales de la aritmética.* (Más específicamente, lo que Russell descubrió es que la lógica de segundo orden más la Ley Fundamental V implica una contradicción. Hoy día tenemos buenas razones para pensar que la lógica de segundo orden es consistente, así que solemos pensar que el problema recae enteramente en la Ley Fundamental V.)

Para derivar la contradicción, basta con hacer dos observaciones. La primera es que en una lógica de segundo orden la Ley Fundamental V implica lo siguiente para cualquier fórmula $\varphi(z)$:[1]

$$\exists x\,(x = \{z : \varphi(z)\})$$

Es decir: existe el conjunto de las φs, sean cuales sean las φs.

La segunda observación es que si esto es cierto, entonces debería existir el conjunto de los objetos que no son miembros de sí mismos:

$$\exists x\,(x = \{z : z \notin z\})$$

Llamemos a este conjunto "R", en honor a Russell, y preguntémonos si es el caso que $R \in R$.

Sea cual sea la respuesta a esta pregunta obtendremos una contradicción.

- Supongamos, primero, que la respuesta es "sí"; es decir, supongamos que $R \in R$. Dado que $R = \{z : z \notin z\}$, esto significa que $R \in \{z : z \notin z\}$ y, por tanto, que $R \notin R$. ¡Contradicción!
- Supongamos, ahora, que la respuesta es "no"; es decir, supongamos que $R \notin R$. Dado que $R = \{z : z \notin z\}$, esto significa que $R \notin \{z : z \notin z\}$ y, por tanto, que $R \in R$. ¡Contradicción!

[1] Aquí hay una prueba que utiliza una axiomatización estándar de la lógica de segundo orden, como la que aparece en Shapiro 1991.

(1) $\{z : \varphi(z)\} = \{z : \varphi(z)\} \leftrightarrow \forall x\,(\varphi(z) \leftrightarrow \varphi(z))$ [de la Ley Fundamental V, utilizando generalización universal e instanciación universal].
(2) $\forall x\,(\varphi(z) \leftrightarrow \varphi(z))$ [teorema de la lógica de segundo orden].
(3) $\{z : \varphi(z)\} = \{z : \varphi(z)\}$ [consecuencia de (1) y (2)].
(4) $\exists x\,(x = \{z : \varphi(z)\})$ [de (3), utilizando generalización existencial].

Estrictamente hablando, Frege alcanzó su objetivo: dado que cualquier cosa se sigue de una contradicción, toda verdad aritmética es un teorema de la lógica de segundo orden más la Ley Fundamental V, y toda falsedad aritmética implica una contradicción en una lógica de segundo orden más la Ley Fundamental V. En vista de la contradicción, sin embargo, el resultado deja de ser interesante porque es trivialmente verdadero.

3 . *Importancia del proyecto*

Como había mencionado antes, creo que el proyecto de Frege mantiene mucha de su importancia a pesar de la contradicción.

La razón es que muchas de las pruebas que aparecen en *Las leyes fundamentales de la aritmética* no dependen de la Ley Fundamental V. Esto incluye, en particular, pruebas de las proposiciones que hoy consideramos axiomas estándar de la aritmética. Para demostrar estas proposiciones en un sistema de segundo orden, basta con utilizar el principio siguiente, en lugar de la Ley Fundamental V:[2]

PRINCIPIO DE HUME

$$\#z\,[F(z)] = \#z\,[G(z)] \leftrightarrow \text{Biyección}\,(F, G)$$

(donde "Biyección (F, G)" abrevia una fórmula de segundo orden que expresa biyección entre las Fs y las Gs).

La proposición de que el Principio de Hume implica a los axiomas estándar de la aritmética en una lógica de segundo orden se conoce hoy día como el Teorema de Frege. Este teorema es un resultado fundamental en la filosofía de las matemáticas porque establece una conexión importante entre la aritmética básica y la lógica de segundo orden.[3]

[2] El hecho de que los axiomas estándar de la aritmética pueden ser demostrados en un sistema de segundo orden más el Principio de Hume fue observado por primera vez en Parsons 1965, y demostrado en Wright 1983. La observación de que las pruebas de Frege hacen un uso no esencial de la Ley Fundamental V es de Heck 1993.

[3] Para más detalles, véase Boolos 1990.

Una razón adicional por la que el Teorema de Frege tiene importancia es que constituye la piedra de toque del movimiento filosófico que suele conocerse como neofregeanismo.[4]

El neofregeanismo tiene su origen en la idea de que, a pesar de la inconsistencia de la Ley Fundamental V, es posible rescatar una versión de la doctrina fregeana de la reestructuración de los contenidos que consideramos en la sección 1.2. En particular, las oraciones siguientes tienen el mismo contenido, estructurado de manera diferente:

> Hay una biyección entre las *F*s y las *G*s.
> El número de las *F*s es idéntico al número de las *G*s.

De esto se sigue que el Principio de Hume es, en cierto sentido, tautológico: lo que aparece a la izquierda del condicional no es más que una manera diferente de expresar lo que aparece a la derecha del condicional. Hay, por tanto, un cierto sentido en el que el Principio de Hume podría ser considerado tautológico, y –en vista del Teorema de Frege– un cierto sentido en el que la aritmética misma podría ser considerada tautológica.

En décadas recientes ha habido una intensa discusión en torno a la pregunta de si el neofregeanismo es filosóficamente viable,[5] y esto ha dado lugar a toda clase de variaciones de la propuesta original.[6]

Hemos visto algunas de las razones por las que el proyecto logicista de Frege retiene su importancia a pesar del colapso de la Ley Fundamental V. Antes de concluir esta sección, sin embargo, me gustaría mencionar una manera indirecta en la que *Las leyes fundamentales de la aritmética* ha iluminado la discusión contemporánea en filosofía de las matemáticas.

Antes del descubrimiento de Russell, hubiera sido difícil imaginar un principio más natural para axiomatizar la teoría de conjuntos que la Ley Fundamental V. En vista de la contradicción, sin embargo, nos hemos visto obligados a pensar en

[4] El texto seminal del neofregeanismo es Wright 1983.
[5] Hay una descripción más detallada de esta discusión en MacBride 2003 y Tennant 2014.
[6] Véase, en particular, la colección de ensayos en Hale y Wright 2001. Mi propia versión del neofregeanismo está desarrollada en Rayo 2013.

nuevas maneras de pensar en la teoría de conjuntos. El proyecto de desarrollar una concepción consistente de la noción de conjunto ha resultado ser extraordinariamente difícil, pero también extraordinariamente fructífero.[7]

4. *Conclusión*

Es difícil exagerar la importancia del logicismo de Frege como contribución a la filosofía de las matemáticas. El proyecto de *Las leyes fundamentales de la aritmética* iluminó la conexión entre la aritmética y la lógica de segundo orden. También dio lugar a las propuestas neofregeanas, que son parte importante de la discusión contemporánea en filosofía de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Boolos, G., 1990, "The Standard of Equality of Numbers", en G. Boolos (comp.), *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 261–277.

——, 1971, "The Iterative Conception of Set", *Journal of Philosophy*, vol. 68, no. 8, pp. 215–231.

Burgess, J.P., 2005, *Fixing Frege*, Princeton University Press, Princeton.

Frege, Gottlob, 1903, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 2, Hermann Pohle, Jena. [*Las leyes fundamentales de la aritmética*, vol. II]

——, 1893, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. l, Hermann Pohle, Jena. [*Las leyes fundamentales de la aritmética*, vol. I]

——, 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle. [Versión en castellano: *Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, construido a semejanza del lenguaje aritmético, para el pensamiento puro*, incluida en esta antología.]

Hale, B. y C. Wright, *The Reason's Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Clarendon, Oxford, 2001.

Heck, R., 1993, "The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 58, pp. 579–601.

[7] Dos esfuerzos por desarrollar una concepción consistente de la teoría de conjuntos son Boolos 1971, y Burgess 2005.

MacBride, F., 2003, "Speaking with Shadows: A Study of Neo-Fregeanism", *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 54, pp. 103–163.

Parsons, C., "Frege's Theory of Number", en M. Black (comp.), *Philosophy in America*, Cornell University Press, Ithaca, 1965, pp. 180–203.

Rayo, A., 2013, *The Construction of Logical Space*, Oxford University Press, Oxford.

Shapiro, S., 1991, *Foundations without Foundationalism*, Oxford University Press, Oxford.

Tennant, Neil, "Logicism and Neologicism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (edición de otoño del 2014), ed. Edward N. Zalta, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/logicism/>.

Wright, C., 1983, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen.

LOS FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA*

UNA INVESTIGACIÓN LÓGICO-MATEMÁTICA SOBRE EL CONCEPTO DE NÚMERO

* Título original: *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung ueber den Begriff der Zahl*, publicado en Breslau por Wilhelm Koebner, 1884. Traducción de Hugo Padilla, revisada para el presente volumen.

INTRODUCCIÓN*

A la pregunta qué es el número uno o qué significa el símbolo 1, generalmente se recibe la respuesta: pues, una cosa. Y cuando se hace notar que la oración

"el número uno es una cosa"

no constituye definición alguna, porque de un lado aparece el artículo definido y del otro el indefinido, o que sólo quiere decir que el número uno pertenece a la clase de las cosas, aunque no dice qué cosa sea, entonces tal vez se nos invitará a elegir alguna cosa —lo que queramos— a lo que deseemos llamar uno. Sin embargo, si cada quien tuviera el derecho de entender por este nombre lo que se le antojara, la oración misma acerca del uno significaría cosas diferentes para diferentes personas; tales oraciones carecerían de contenido común. Quizás algunos rechazarían la pregunta argumentando que tampoco se puede indicar el significado de la letra *a*, que se usa en la aritmética; y si se dice: *a* significa un número, se podría encontrar aquí la misma falla que se encuentra en la definición: uno es una cosa. Rechazar la pregunta en el caso de la *a* está totalmente justificado: *a* no significa ningún número determinado, específico, sino que sirve para expresar la generalidad de las pro-

* En *Los fundamentos de la aritmética*, Frege utiliza una sola palabra, *Satz*, para denominar, a veces, meras estructuras sintácticas, en cuyo caso se traduce la palabra alemana por "oración", y a veces para denominar lo que él llama "contenidos juzgables". En este segundo caso, se traduce la palabra "Satz" por "proposición". En ocasiones, la distinción no es del todo clara y se optó por mantener esta segunda traducción. John Austin, en su versión inglesa de esta obra, traduce en todos los casos "Satz" por la palabra "proposition". [N de la c.]

posiciones generales. Si en $a + a - a = a$, sustituimos a por un número cualquiera, pero siempre el mismo, obtendremos en todos los casos una igualdad verdadera. En este sentido se ha de usar la letra a. Pero con el uno la situación es esencialmente distinta. En la igualdad $1 + 1 = 2$, ¿podemos sustituir 1, en ambos lugares por el mismo objeto, digamos, la Luna? Más bien parece que debemos sustituir el primer uno por algo distinto de lo del segundo. ¿A qué se debe que justamente aquí tenga que suceder lo que en otro caso constituiría un error? La aritmética no puede arreglárselas sólo con la letra a, sino que tiene que usar, además, otras letras, b, c, etc., para expresar en forma general relaciones entre diferentes números. Así, podría pensarse que el símbolo 1 tampoco bastaría por sí mismo si se usase de manera similar para conferir generalidad a las proposiciones. Pero ¿acaso el número uno no parece un objeto determinado con propiedades específicas, por ejemplo, la de permanecer sin cambio al multiplicarse por sí mismo? En este sentido no se pueden indicar ningunas propiedades de a, puesto que cualquier cosa que se diga de a es común a todos los números, mientras que $1^1 = 1$ no afirma nada de la Luna, ni del Sol, ni del Sahara, ni del Pico de Tenerife; pues, ¿cuál podría ser el sentido de tal afirmación?

Es más, la mayoría de los matemáticos no tendría respuesta satisfactoria que ofrecer a tales preguntas. ¿No es una desgracia para la ciencia carecer de claridad acerca de uno de sus primeros objetos, aparentemente tan simple? Así, parece haber poca esperanza de que podamos decir lo que es el número. Si un concepto que está en la base de una gran ciencia presenta dificultades, resulta tarea del todo imprescindible investigarlo más rigurosamente y superar estas dificultades, sobre todo porque podría resultar difícil aclarar totalmente los números negativos, fraccionarios o complejos, mientras nuestra intelección de los fundamentos de la estructura completa de la aritmética sea imperfecta.

Sin duda mucha gente considerará que esto no vale la pena. Suponen que este concepto ya está suficientemente tratado en los libros elementales y, con ello, resuelto de una vez por todas. ¿Quién podría creer que hubiera aún algo que aprender sobre una cosa tan sencilla? Se sostiene que el concepto de número

entero positivo está tan libre de dificultad que puede ser manejado por los niños tanto exhaustiva como científicamente, y que todos ellos saben todo lo que tienen que saber de él, sin requerir mayores reflexiones y sin conocimiento de lo que otros hayan pensado acerca de él. Así, hay ausencia completa del primer prerrequisito del aprendizaje: el saber que no se sabe. El resultado es que uno se contenta aún ahora con una concepción burda, aunque ya Herbart[1] haya proporcionado una más correcta y erudita. Es triste y descorazonador ver que de este modo un conocimiento ya conquistado se vea constantemente amenazado de perderse, que más de un trabajo haya sido hecho en vano, porque nos imaginamos que somos tan ricos que no necesitamos apropiarnos de sus frutos. Veo perfectamente que este trabajo está también expuesto a ese riesgo. Esa burda concepción me sale al paso cuando se describe el cálculo agregativo como pensamiento mecánico.[2] Dudo de que exista un pensamiento así. Se podría llegar a aplicar a una imaginación agregativa; pero eso carece de toda importancia para el cálculo. El pensamiento esencialmente es el mismo en todos lados: no hay diferentes clases de leyes del pensamiento dependiendo de los objetos. Las diferencias estriban en la mayor o menor pureza del pensamiento, y la mayor o menor dependencia de influencias psicológicas y de ayudas externas al pensamiento, tales como el lenguaje, los numerales, etc., y acaso aún en la mayor o menor finura de la estructura de los conceptos involucrados; pero es precisamente en este respecto en el que la matemática aspira a no ser superada por ninguna ciencia, ni siquiera por la filosofía.

En el presente trabajo se podrá ver que incluso una inferencia que de manera patente es propia de la matemática, como la que va de n a $n + 1$, se basa en las leyes lógicas generales y no requiere leyes especiales del pensamiento agregativo. Sin duda se puede operar con numerales mecánicamente, justo como se puede hablar a la manera de un perico; pero eso difícilmente podría ser llamado pensamiento. Sólo después

[1] *Sämmtliche Werke* [*Obras completas*], ed. Hartenstein, t. X, parte 1, § 252, n. 2: "Dos no significa dos cosas, sino duplicación", etcétera.

[2] K. Fischer, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, 2a. ed., § 94.

de que la notación matemática alcanza pleno desarrollo por medio de un pensamiento auténtico, es posible que, como se dice, ella piense por nosotros. Esto no prueba que los números se formen de una manera especialmente mecánica, como los arenales se forman de las partículas de cuarzo. Por propio interés, según creo, los matemáticos deberían oponerse a cualquier concepción de este tipo que propicia el descrédito de uno de los objetos capitales de su ciencia y con ello propicia su propio descrédito. No obstante, también en los trabajos de los matemáticos encontramos expresiones totalmente similares. Tenemos que reconocer, por el contrario, que hay en el concepto de número una estructura mucho más fina que en la mayoría de los conceptos de las restantes ciencias, aunque éste sea uno de los conceptos aritméticos más simples.

Para disipar la ilusión de que no existe propiamente dificultad alguna respecto de los números enteros positivos, sino que reina una concordancia universal en ellos, me ha parecido adecuado discutir algunas de las opiniones de filósofos y matemáticos sobre las cuestiones que estamos considerando. Se verá que hay poco acuerdo, al grado de que algunas expresiones resultarán contradictorias. Unos dicen, por ejemplo: "las unidades son iguales unas a otras"; otros sostienen que son diferentes, y cada bando tiene razones para sus afirmaciones que no se pueden rechazar sin más. Mi objetivo es despertar el deseo de una investigación más rigurosa. A la vez, el esclarecimiento previo de los puntos de vista expresados por otros preparará el suelo para mi propia concepción, y con ello espero convencer anticipadamente que ningún otro camino conduce a la meta, y que mi opinión no es una más entre muchas igualmente sostenibles; y así, espero decidir la cuestión de modo definitivo, al menos en lo esencial.

Ciertamente, el resultado será más filosófico de lo que a muchos matemáticos les parecerá adecuado; pero una investigación fundamental del concepto de número tiene que resultar siempre algo filosófica. Esta tarea es común a la matemática y a la filosofía.

Si el trabajo cooperativo entre estas dos ciencias, a pesar de las múltiples embestidas de ambos lados, no resulta tan provechoso como es de desear, y como sería también posible, es porque me parece que en la filosofía prevalecen los tratamientos psicológicos, los cuales han invadido aun a la propia lógica. Hacia esos tratamientos, la matemática no tiene ninguna simpatía; y por ello se explica fácilmente la repugnancia que muchos matemáticos sienten por los tratamientos filosóficos. Por ejemplo, cuando Stricker[3] llama a las representaciones de los números fenómenos motores, dependientes de sensaciones musculares, el matemático no puede reconocer en ello a sus números y no sabe cómo enfrentarse a tal proposición. Una aritmética fundada en las sensaciones musculares sería ciertamente sensacional, pero tan vaga como sus fundamentos. No; la aritmética no tiene absolutamente nada que ver con las sensaciones. Tampoco con las imágenes mentales que confusamente surgen de impresiones sensoriales anteriores. Lo inestable e indeterminado de todos estos fenómenos entra en fuerte contraste con la determinación y solidez de los conceptos y objetos matemáticos. Puede que sea de alguna utilidad investigar las representaciones y los cambios que ocurren en el curso del pensar matemático; pero la psicología no debe imaginar que puede contribuir con algo a la fundamentación de la aritmética. Para el matemático en cuanto tal, esas imágenes mentales, su surgimiento y cambio, son indiferentes. Stricker mismo dice que con la palabra "cien" no se representa nada más que el símbolo 100. Otros pueden representarse la letra C o quizás alguna otra cosa; ¿no resulta de aquí que las imágenes mentales son totalmente indiferentes e incidentales para lo que nos concierne y para la esencia del problema, tan incidentales como el pizarrón negro y la tiza, y que no merecen en absoluto llamarse representaciones del número cien? No se suponga que la esencia de nuestro problema esté en tales representaciones. No debe tomarse la descripción del surgimiento de una representación por su definición, ni el señalamiento de las condiciones anímicas y corporales por medio de las que somos conscientes de una proposición por su prueba, ni debe confundirse el haber pensado una proposición con su verdad. Por esto, parece que debe recordarse que una proposición no deja de ser verdadera cuando dejo de pen-

[3] *Studien über Association der Vorstellungen*, Viena, 1883.

sar en ella, de la misma manera que el Sol no deja de existir cuando cierro los ojos. En caso contrario, llegaríamos a pensar que en la prueba del teorema de Pitágoras se encuentra necesariamente el contenido fosfórico de nuestro cerebro, y los astrónomos titubearían en sacar cualquier conclusión acerca del pasado lejano por temor a que alguien les objetara: "tú multiplicaste $2 \times 2 = 4$; haciendo caso omiso de que la representación numérica tiene un desarrollo, tiene una historia. ¿Cómo puedes saber que en ese pasado ya existía esa proposición? ¿Las criaturas de entonces no podrían haber sostenido que $2 \times 2 = 5$, y después, por medio de la selección natural, en la lucha por la existencia, haber llegado a la proposición $2 \times 2 = 4$, la que, por su parte, tal vez está condenada, por lo mismo, a convertirse en la proposición $2 \times 2 = 3$?" *Est modus in rebus, sunt certi denique fines!* El modo histórico de tratamiento, que busca investigar el ser de las cosas y conocer su esencia a partir del ser, ciertamente tiene una gran legitimidad; pero también tiene sus limitaciones. Si en el continuo fluir de las cosas no se mantuviera nada fijo, eterno, desaparecería toda posibilidad de conocer algo del mundo y todo caería en confusión. Se piensa, según parece, que los conceptos surgen en la mente individual como las hojas en el árbol, y creemos poder conocer su esencia al estudiar su origen y se busca esclarecerlos psicológicamente a partir de la naturaleza de la mente humana. Pero esta manera de ver las cosas hace todo subjetivo y, si la seguimos hasta el fin, aniquila la verdad. Lo que llamamos historia de los conceptos es más bien una historia de nuestro conocimiento de los conceptos o de los significados de las palabras. Sólo a través de un gran trabajo intelectual, que puede durar siglos, se logrará llegar, al fin, a conocer un concepto en su pureza, a despojarlo de envolturas extrañas que lo ocultaban a los ojos del espíritu. Qué hemos de decir entonces, cuando alguien en lugar de continuar este trabajo ahí donde aún no parece terminado, para nada lo atiende y se vuelve a la habitación de los niños o se reinstala en las más viejas etapas concebibles del desarrollo de la humanidad, y ahí, como John Stuart Mill, descubre algo parecido a una aritmética de galletitas o una aritmética de guijarros. Sólo faltaría que se atribuyera al olor de la galleta una especial significación para el concepto de número. Esto constituye exactamente lo contrario de un proceder racional y, en todo caso, está tan alejado del uno matemático como puede ser posible. Que no asombre, pues, que los matemáticos no quieran saber nada de esto. En lugar de encontrar una pureza particular de los conceptos donde uno supone estar próximo a su origen, se ve todo confuso e indiferenciado, como a través de la neblina. Es como si alguien que quisiera conocer América tratara de ponerse en el lugar de Colón en el momento de haber captado de un vistazo dudoso sus supuestas Indias. Por supuesto que tal comparación no prueba nada; pero, según espero, aclara mi postura. Bien puede ser que la historia del descubrimiento sea útil como preparación para investigaciones posteriores; pero no puede tomar su lugar.

En lo que concierne a los matemáticos, pudo haber sido innecesario un ataque a tales concepciones; pero mi tratamiento tenía el propósito de destacar lo más posible la disputa para los filósofos, de modo que yo mismo me vi compelido a entrar un poco en la psicología, si bien sólo para repeler su invasión de la matemática.

Por lo demás, también en los libros de texto de matemáticas, aparecen giros psicologistas. Cuando se siente la necesidad de dar una definición, sin poder hacerlo, al menos se intenta describir el modo como se llega al objeto o al concepto en cuestión. Estos casos son fácilmente reconocibles en virtud de que en el desarrollo posterior ya no se retorna a tales tipos de aclaraciones. Tal modo de introducirse a los problemas es legítimo desde el punto de vista didáctico; sólo que se le debe distinguir siempre y cuidadosamente de una definición. Encontramos en E. Schröder[4] un divertido ejemplo de que también los matemáticos pueden confundir los fundamentos de la prueba con las condiciones internas o externas de la conducta al llevar a cabo la prueba, ya que, bajo el rubro de "Axioma Especial", ofrece lo siguiente:

> El principio que hemos pensado, bien puede llamarse Axioma de la Adherencia de los Símbolos. Nos garantiza que en todos nues-

[4] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* [*Curso de artimética y álgebra*]. [Leipzig, 1873.]

tros desarrollos y deducciones los símbolos permanecen constantes en nuestra memoria –y aún más en el papel–, etcétera.

La matemática no debe pedir ninguna ayuda a la psicología, como tampoco desconocer su estrecha conexión con la lógica. Concuerdo con el punto de vista de aquellos que sostienen que una separación de las dos es irrealizable. Se tiene que conceder que una investigación sobre la contundencia de una prueba, o sobre la justificación de una definición, tiene que ser una cuestión de lógica. Tales cuestiones, sin embargo, son inseparables de la matemática, porque sólo al resolverlas se alcanza la necesaria certeza.

Ciertamente, también en esta dirección voy más allá de lo usual. La mayoría de los matemáticos, en relación con investigaciones de este tipo, se sentiría contenta con haber satisfecho sus necesidades inmediatas. Cuando se ofrece una definición apropiada para ser usada en demostraciones, cuando en ninguna parte da lugar a contradicciones, cuando por medio de ella se reconocen conexiones entre cosas aparentemente alejadas entre sí, cuando con ello se obtiene un orden y una legalidad más altos, entonces se suele sostener que la definición es suficientemente segura y poco se pregunta por su justificación lógica. En todo caso, este proceder tiene la ventaja de que hace difícil errar por completo en relación con la meta. Pienso también que las definiciones deben acreditarse por lo fructíferas que sean, por la posibilidad de realizar pruebas con ellas. Pero es digno de atender el que siga siendo una ilusión el rigor de la prueba, aun cuando no falte ningún eslabón en la cadena de nuestras deducciones, si las definiciones sólo se justifican posteriormente en razón de que uno no se tropiece con ninguna contradicción. Mediante estos métodos sólo se consigue, en el fondo, una certeza empírica y se debe tener plena conciencia de que, al final, puede encontrarse una contradicción que derrumbe todo el edificio construido. Por esta razón creí un deber ir un paso más allá, en cuanto a los fundamentos lógicos generales de nuestra ciencia, de lo que tal vez la mayoría de los matemáticos hubiera considerado necesario.

En la presente investigación me he sujetado a los siguientes principios fundamentales:

hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;

no se debe preguntar por el significado de una palabra aislada, sino sólo en el contexto de una oración;

hay que mantener siempre a la vista la diferencia entre concepto y objeto.

Para lograr lo primero, he usado siempre la palabra "representación" [*Vorstellung*] en sentido psicológico y he distinguido las representaciones de los conceptos y de los objetos. Si uno no observa el segundo principio, se verá casi obligado a tomar como significado de las palabras imágenes mentales o actos de la mente individual y, con ello, cometerá una falta contra el primer principio también. En cuanto al tercer punto, es sólo una ilusión creer que un concepto puede transformarse en un objeto sin alterarlo. De aquí se sigue que es insostenible la ampliamente difundida teoría formal de las fracciones, de los números negativos, etc. Sólo puedo señalar en este trabajo en qué sentido pienso mejorarla. En todos estos casos, así como en el de los números enteros positivos, de lo que se trata es de fijar el sentido de una igualdad.

Creo que mis resultados, al menos en lo principal, encontrarán la aceptación de los matemáticos que quieran tomarse el trabajo de considerar mis razones. Me parece que éstas flotan en el ambiente, y quizás en lo particular cada una de ellas ya haya sido expresada, al menos aproximadamente; pero tal y como se presentan aquí, conectadas entre sí, puedan aún ser algo novedoso. Muchas veces me ha asombrado que las concepciones que en algunos puntos son tan cercanas a la mía, en otros se aparten tan bruscamente de ella.

La acogida por parte de los filósofos variará, dependiendo de su posición; la peor, seguramente, será la de aquellos empiristas que sólo admiten la inducción como proceso original de inferencia –y ni siquiera como un proceso real de inferencia, sino como un hábito–. Aunque tal vez, motivados por mi exposición, unos y otros puedan reexaminar los fundamentos de su teoría del conocimiento. A quienes puedan tener mis definiciones por no naturales, quiero recordarles que la cuestión no

estriba en si son o no naturales, sino en si llegan al meollo del asunto y si están lógicamente libres de objeción.

Me permito esperar que también los filósofos que lleven a cabo un examen libre de prejuicios encuentren algo útil en este escrito.

CONTENIDO TEMÁTICO

Intentos de superar la dificultad

Solución de la dificultad

IV. EL CONCEPTO DE NÚMERO

Cada número individual es un objeto independiente

Para obtener el concepto de número, se tiene que fijar el sentido de una igualdad numérica

Complemento y prueba de nuestra definición

Números infinitos

V. CONCLUSIÓN

Otros números

§ 1. Después de que la matemática se hubo alejado por un largo tiempo del tipo de rigor euclidiano, retorna ahora a él y pretende sobrepasarlo. En la aritmética, a consecuencia de haberse originado en la India muchos de sus métodos y conceptos, fue usual pensar con menos rigor que en la geometría, desarrollada principalmente por los griegos. El descubrimiento del análisis superior sólo confirmó esta tendencia; pues se contrapusieron considerables y casi insuperables dificultades a un tratamiento riguroso de estos temas, dificultades cuya solución parece deparar poca recompensa a los esfuerzos empeñados. Sin embargo, los desarrollos posteriores han enseñado, cada vez más claramente, que en la matemática la mera convicción moral, apoyada en múltiples y exitosas aplicaciones, no es suficiente. Casos tenidos antes por evidentes en sí mismos, requieren ahora una prueba. Una y otra vez, los límites de la validez de una proposición se han establecido de esta manera por primera vez. Los conceptos de función, continuidad, límite e infinito han mostrado la necesidad de una determinación más precisa. Los números negativos e irracionales, admitidos desde hace mucho tiempo en la ciencia, han tenido que someterse a un examen más minucioso en cuanto a sus credenciales.

En todas partes aparece el afán de probar más rigurosamente, de trazar estrictamente los límites de validez y, para lograrlo, de captar con precisión los conceptos.

§ 2. Este camino, en su curso posterior, debe conducir al concepto de número y a las proposiciones más simples que valen para los números enteros positivos, que constituyen el fundamento de toda la aritmética. Sin duda, las fórmulas numéricas como $7 + 5 = 12$ y las leyes como la de la asociatividad de

la adición, en virtud de las innumerables aplicaciones que de ellas se hace cotidianamente, dan la impresión de estar tan confirmadas, que puede parecer casi ridículo querer ponerlas en duda al exigir una prueba de ellas. Pero está en la naturaleza de la matemática siempre preferir una prueba, si ésta es posible, a cualquier confirmación inductiva. Euclides ofreció pruebas de muchas cosas que cualquiera le hubiera concedido. Cuando se dejó de estar satisfecho incluso con el rigor euclidiano, se llegó a las investigaciones desatadas por el axioma de las paralelas.

De esta suerte, el movimiento dirigido a conseguir el mayor rigor pronto sobrepasó con mucho el requerimiento original, y éste mismo ha crecido continuamente en extensión y fuerza.

La prueba no sólo se propone poner a salvo de dudas la verdad de una proposición, sino que también pretende propiciar la comprensión de la dependencia de unas verdades con respecto a otras. Después de que uno ha quedado convencido, tras vanos intentos de moverlo, de lo inamovible de un peñasco, aún se puede preguntar qué es lo que le presta apoyo tan seguro. Cuanto más se prosiguen estas investigaciones, a tantas menos verdades primitivas se retrotrae todo; y esta simplificación ya es en sí misma una meta que vale la pena perseguir. Quizás también se justifique la esperanza de que al examinar casos simples pudiéramos sacar a la luz lo que los hombres han hecho de manera instintiva y pudiéramos extraer de tales procedimientos lo que es universalmente válido en ellos y acaso llegar a métodos generales para la formación de conceptos y para establecer principios igualmente aplicables a casos complicados.

§ 3. Motivos filosóficos me han determinado también a tales investigaciones. Las preguntas por la naturaleza *a priori* o *a posteriori*, sintética o analítica, de las verdades aritméticas esperan aquí su respuesta. Así, aunque también estos mismos conceptos pueden pertenecer a la filosofía, creo que no podrá alcanzarse ninguna decisión sin la ayuda de la matemática; aunque, sin duda, esto depende del sentido que se les dé a tales preguntas.

No es raro que primero se obtenga el contenido de una proposición, y sólo después se ofrezca una prueba rigurosa de ella que siga caminos más difíciles, prueba mediante la cual frecuentemente se aprende a conocer con mayor exactitud las condiciones que delimitan la validez de la proposición original. Así, en general, la pregunta acerca de cómo llegamos al contenido de un juicio debe distinguirse de otra acerca de la justificación de nuestra aseveración.

Estas distinciones entre *a priori* y *a posteriori*, entre sintético y analítico, atañen, según creo,[5] no al contenido del juicio, sino a la justificación para emitirlo. Ahí donde falta esa justificación falta también la posibilidad de trazar cualquier distinción. Un error *a priori* es, por tanto, un absurdo tan completo como un concepto azul. Cuando se dice que una proposición es analítica o *a posteriori*, en mi sentido, no se juzga sobre las condiciones psicológicas, fisiológicas y físicas que pudieran haber hecho posible la formación del contenido de la proposición en nuestra conciencia; tampoco sobre cómo alguna otra persona, tal vez erróneamente, haya llegado a tenerla por verdadera; más bien, se juzga el fundamento último sobre el que descansa la justificación para tenerla por verdadera.

Por ello, la pregunta debe apartarse del campo de la psicología y asignarla al de la matemática, si se trata de una verdad matemática. El problema es el de encontrar su prueba y seguirla hasta las verdades primitivas. Si en este camino sólo se encuentran definiciones y leyes generales de la lógica, entonces se trata de una verdad analítica, teniendo en mente que debemos de tener en cuenta todas las proposiciones sobre las que descansa la admisibilidad de cualquiera de las definiciones. Pero si es imposible ofrecer la prueba sin utilizar verdades que no sean de naturaleza lógica general, sino que pertenezcan a un campo especial del conocimiento, entonces es una proposición sintética. Para que una verdad sea *a posteriori*, se exigirá que su prueba no pueda producirse sin apelar a hechos, esto es, a verdades que no se puedan probar y que no sean generales, sino que contengan aseveraciones acerca de objetos particulares. Si, por el contrario, la prueba se puede llevar a cabo exclusivamen-

[5] Naturalmente, con ello no quiero asignar un nuevo sentido a estos términos, sino sólo precisar el sentido que autores anteriores, Kant en especial, les dieron.

te a partir de leyes generales, que por su parte ni necesitan ni admiten prueba, entonces la verdad es *a priori*.[6]

§ 4. Partiendo de estas preguntas filosóficas llegamos al mismo requerimiento que ha surgido independientemente en el campo de la matemática misma: que las leyes fundamentales de la aritmética deben ser probadas, si ello fuera posible, con el mayor rigor; así, sólo cuando se haya eliminado todo hueco en la cadena deductiva, podrá decirse con seguridad de qué verdades primitivas depende la prueba; sólo cuando esto se conozca, se podrán contestar las preguntas originales.

Si intentamos cumplir este requerimiento, muy pronto llegaremos a proposiciones que no pueden ser probadas mientras no se consiga descomponer los conceptos que ocurren en ellas en conceptos más simples, o no se consiga reducirlos a algo más general. Ahora, aquí, antes que nada, tenemos que definir el número o reconocerlo como indefinible. Ésta es precisamente la tarea del presente libro.[7] Del resultado de esta tarea dependerá la decisión sobre la naturaleza de las leyes aritméticas.

Antes de atacar estas cuestiones quiero adelantar algo que puede darnos un indicio para su resolución. Si resulta que basados en otros puntos de vista creemos que las proposiciones fundamentales de la aritmética son analíticas, ello hablaría en favor de que pudieran ser probadas y hablaría en favor de la definibilidad del concepto de número; en tanto que cualesquiera razones para creer que esas mismas verdades son *a posteriori* hablarían a favor de lo contrario. Por tanto, estos puntos de vista rivales deberán someterse, por lo pronto, a una elucidación previa.

[6] Si se reconoce en absoluto la existencia de verdades generales, entonces también se debe admitir que hay tales leyes primitivas, ya que nada se sigue de meras situaciones fácticas, a menos que sea sobre la base de una ley. La inducción misma descansa sobre la proposición general de que el procedimiento inductivo podría establecer la verdad o, al menos, la probabilidad de una ley. Para quien niegue esto, la inducción no es otra cosa que un fenómeno psicológico, una manera como los hombres llegan a creer en la verdad de una proposición sin dar ninguna justificación de ella.

[7] Por tanto, en lo que sigue, si no se indica otra cosa, no se hablará de otros números sino de los enteros positivos, que responden a la pregunta "¿cuántos [o cuántas]?"

I. OPINIONES DE ALGUNOS AUTORES SOBRE LA NATURALEZA DE LAS PROPOSICIONES ARITMÉTICAS

¿PUEDEN SER PROBADAS LAS FÓRMULAS NUMÉRICAS?

§ 5. Tenemos que distinguir las fórmulas numéricas que tratan de números determinados, como $2 + 3 = 5$, de las leyes generales que valen para todos los números enteros.

Las primeras han sido tenidas por algunos filósofos[8] como no susceptibles de ser probadas y como inmediatamente claras a manera de axiomas. Kant[9] las declara no susceptibles de prueba y sintéticas, pero se abstiene de llamarlas axiomas porque no son generales y porque su número es infinito. Hankel[10] llama justificadamente incongruente y paradójica a esta concepción de verdades primitivas infinitas e incapaces de ser probadas. Esta concepción se contrapone con el hecho de que la razón tendría que poder abarcar de una sola mirada los fundamentos primeros. Por otra parte, ¿es inmediatamente evidente que

$$135\,664 + 37\,863 = 173\,527\ ?$$

¡No! Y precisamente esto es aducido por Kant en favor de la naturaleza sintética de estas proposiciones. Sin embargo, más bien habla en contra de que no puedan ser probadas; pues, ¿cómo podrían ser examinadas, si no es por medio de una prueba, ya que no son inmediatamente evidentes? Kant acudió en demanda de ayuda a la intuición de los dedos o de puntos, con lo cual corrió el riesgo de hacer aparecer a estas proposiciones, en contra de su propia opinión, como empíricas;

[8] Hobbes, Locke, Newton. Véase, J. Baumann, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik* [*Teorías del tiempo, el espacio y la matemática*] (Berlín, 1868, vol. I) pp. 241 y 242; 365 ss., 475 y 476. [Hobbes, *Examinatio et Emendatio Mathematicae Hodiernae*, Ámsterdam, 1668, Diall. I-III, en esp. 1, p. 19 y III, pp. 62-63; Locke, *Ensayo*, libro IV, en esp. cap. IV, § 6 y cap. VII, §§6 y 10; Newton, *Arithmetica Universalis*, vol. I, cap. I-III, en esp. III, n. 24.]

[9] Véase *Crítica de la razón pura* [A 164 B 205], traducción de Pedro Ribas, Taurus, Madrid, 2014.

[10] *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Functionen* [*Lecciones sobre los números complejos y sus funciones*], p. 53.

pues, en todo caso, la intuición de 37 863 dedos no es una intuición pura. La expresión "intuición" tampoco parece correcta, ya que 10 dedos acomodados de diferentes maneras pueden dar origen a distintas intuiciones. ¿Tenemos, en absoluto, una intuición de 135 664 dedos o puntos? Si la tuviéramos y tuviéramos otra de 37 863 dedos y una tercera de 173 527, entonces tendríamos evidencia de la corrección de nuestra fórmula, al menos mientras se tratara de dedos, aun cuando no fuera posible probarla; pero esto no es el caso.

Es evidente que Kant sólo tuvo en mente números pequeños. Así, las fórmulas con números grandes admitirían ser probadas, mientras que las de números pequeños serían inmediatamente evidentes por medio de la intuición. Pero es problemático establecer una distinción fundamental entre números pequeños y grandes, especialmente porque entre ellos no podría trazarse un límite preciso. Si las fórmulas numéricas, digamos de 10 en adelante, tuvieran que ser probadas, se podría preguntar con derecho: ¿por qué no de 5 en adelante, de 2 en adelante, de 1 en adelante?

§ 6. Otros filósofos y matemáticos han sostenido, también, que las fórmulas numéricas son susceptibles de ser probadas. Leibniz dice:[11]

> No es una verdad inmediata que 2 y 2 sean 4; presupone que 4 significa 3 y 1. Ciertamente esto se puede probar de la siguiente manera:
>
> Definiciones: 1) 2 es 1 y 1
> 2) 3 es 2 y 1
> 3) 4 es 3 y 1
>
> Axioma: si lo igual se sustituye por lo igual en el mismo sitio, la igualdad subsiste.
>
> Prueba: $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
> Def. 1 Def. 2 Def. 3
>
> Por lo tanto, según el Axioma: $2 + 2 = 4$.

[11] *Nouveaux Essais* [*Nuevos ensayos*], IV, § 10, ed. Erdmann, p. 363.

Esta prueba parece estar enteramente construida a partir de las definiciones y el axioma citados. También el axioma podría ser transformado en una definición, como lo hizo el propio Leibniz en otro lugar.[12] Parece que no se requiere saber nada más del 1, 2, 3 y 4 que lo que está contenido en las definiciones. Sin embargo, si miramos con mayor precisión, podemos descubrir una laguna en la prueba, que no se ve debido a la omisión de los paréntesis. Esto es, estrictamente hablando, debimos haber escrito:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

Aquí falta la siguiente proposición

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

que es un caso especial de

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Si asumimos esta ley, es fácil ver que toda fórmula de adición puede ser probada de esta manera: esto significa que todo número se define en términos de su predecesor. De hecho, no veo cómo nos podría ser dado adecuadamente, digamos, el número 437 986, si no es a la manera leibniziana. Aun sin tener ninguna representación de él, lo captamos por este medio. Mediante tales definiciones, reducimos el conjunto infinito de los números al número uno y al incremento en uno, y cada una de las infinitas fórmulas numéricas puede ser probada a partir de algunas proposiciones generales.

Ésta es también la opinión de H. Grassmann y H. Hankel. El primero obtiene la ley

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

por medio de una definición que dice:[13]

[12] "Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis", ed. Erdmann, p. 94.

[13] *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten* [*Curso de matemáticas para escuelas de segunda enseñanza*], parte I, *Arithmetik* [*Aritmética*], Stettin, 1860, p. 4.

Si a y b son miembros arbitrarios de la serie básica, entonces, por la suma de $a + b$ ha de entenderse aquel miembro de la serie básica para el cual es válida la fórmula

$$a + (b + e) = a + b + e.$$

Aquí, e ha de significar la unidad positiva. Esta definición puede criticarse de una doble manera. Por lo pronto, la suma se define en términos de ella misma. Si no se sabe lo que ha de significar $a + b$, entonces tampoco se entenderá la expresión $a + (b + e)$. Pero esta crítica quizás puede evadirse si decimos (en contra de lo asentado en el texto) que no es la suma lo que se pretende definir, sino la adición. Así, se podría objetar siempre que $a + b$ es un signo vacío en caso de que no sea un miembro, o varios, de la serie básica del tipo exigido. Que esto no tiene lugar es algo que Grassmann simplemente presupone sin probarlo, de modo que su rigor es sólo aparente.

§ 7. Se podría pensar que las fórmulas numéricas resultan sintéticas o analíticas, *a posteriori* o *a priori*, según sean las leyes generales sobre las que se apoye su prueba. A esto se opone la opinión de John Stuart Mill. Ciertamente, parece pretender fundar a la ciencia, como Leibniz, en definiciones,[14] puesto que define los números individuales a la manera de éste; pero su prejuicio de que todo saber es empírico pronto sesga su pensar correcto. Nos enseña, efectivamente,[15] que las definiciones no lo son en sentido lógico, que no sólo aseguran el significado de una expresión, sino que a la vez afirman una situación empírica observada. Pero, ¿cuál puede ser, en el mundo entero, la situación empírica observada, o como también dice Mill, la situación física que se afirma en la definición del número 777 864? De la enorme riqueza de situaciones físicas que se abren ante nosotros, Mill nos nombra sólo una, la afirmada en la definición del número 3. Consiste, según él, en que existen colecciones de objetos, los cuales, al tiempo que producen la impresión °₀° en los sentidos, ésta puede ser separada en dos partes de la siguiente manera: °° °. Es para alegrarse que nada

[14] J.S. Mill, *System of Logic: Ratiocinative and Inductive* [*Sistema de la lógica demostrativa e inductiva*], libro III, cap. XXIV, § 5.
[15] *Op. cit.*, libro II, cap. VI, § 2.

en el mundo se encuentre cosido y remachado; si así fuera, no podríamos llevar a cabo esta separación, ¡y 2 + 1 no serían 3! Es una lástima que tampoco Mill haya señalado la situación física que hubiese de servir como base para los números 0 y 1.

Mill continúa: "dada esta proposición, llamamos 3 a todas aquellas colecciones". De aquí se desprende que propiamente no es correcto hablar de tres campanadas cuando el reloj suena las tres, o llamar dulces, ácidas, amargas a tres sensaciones gustativas; y menos se puede consentir la expresión "tres maneras de resolver una ecuación", puesto que nunca se tiene de ella una impresión sensible semejante a la de °₀°.

Ahora bien, Mill dice: "Los cálculos no se siguen de la definición misma, sino del hecho observado." Pero, ¿a qué hecho apeló Leibniz en la prueba dada anteriormente de la proposición 2 + 2 = 4? Mill omite señalar la laguna en la prueba, aunque él mismo ofrece una prueba,[16] enteramente correspondiente a la leibniziana, de la proposición 5 + 2 = 7. Realmente hay una laguna consistente en la omisión de los paréntesis, pero Mill, como Leibniz, la pasa de largo.

Si realmente la definición de todo número individual afirmara una situación física especial, nunca podríamos admirar bastante a un hombre que calcula, basado en sus conocimientos físicos, con números de nueve cifras. Sin embargo, tal vez la opinión de Mill no quiera llegar tan lejos como para afirmar que todos estos hechos deben ser observados varias veces, sino que cree que sería suficiente haber derivado por medio de la inducción una ley general en la cual todos estuvieran incluidos. Pero, inténtese expresar esta ley y se encontrará que es imposible. No basta decir: hay grandes colecciones de cosas que pueden ser separadas; pues con ello no se dice que existan colecciones tan grandes y del tipo apropiado como la que requiere, digamos, la definición del número 1 000 000, y tampoco el modo de dividirlo se ofrece de una manera más estricta. La concepción de Mill conduce necesariamente a la exigencia de que, para todo número, debe observarse especialmente una situación fáctica, pues en una ley general se hubiera perdido lo que es peculiar del número 1 000 000, que necesariamente

[16] *Op. cit.*, libro III, cap. XXIV, § 5.

pertenece a su definición. De hecho, según Mill, no podríamos poner 1 000 000 = 999 999 + 1, a menos que se hubiera observado este modo preciso de separar una colección de cosas, que resultaría diferente del de cualquier otro número.

§ 8. Mill parece sostener que no se podrían llevar a cabo las definiciones 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, etc., antes de que fueran observadas las situaciones fácticas a que refieren. De hecho, no se puede definir el 3 como (2 + 1) si no se da sentido alguno al (2 + 1). Sin embargo, la pregunta es si es necesario observar esa colección y su descomposición. Si así fuera, el número 0 constituiría un enigma; pues nadie hasta ahora ha visto o tocado 0 guijarros. Mill debería definir el 0 como algo carente de sentido, como un mero giro del lenguaje; los cálculos con 0 resultarían un mero juego de símbolos vacíos, y sería formidable que algo racional pudiera resultar de ello. No obstante, si estos cálculos tienen un significado serio, entonces tampoco el símbolo 0 mismo puede carecer enteramente de sentido. Y se muestra la posibilidad de que 2 + 1, de la misma manera que 0, pudiera tener algún sentido, aun cuando la situación fáctica mencionada por Mill no haya sido observada. De hecho, ¿quién afirmaría que el hecho contenido, según Mill, en la definición de un número de 18 cifras haya sido realmente observado, y quién negaría que el símbolo para tal número, a pesar de ello, tiene un sentido?

Tal vez se piensa que los hechos físicos serían utilizados sólo para los números pequeños, digamos hasta 10, mientras que los restantes podrían construirse a partir de éstos. Pero si se puede construir el 11 del 10 y del 1, simplemente mediante definición, sin haber visto la colección correspondiente, entonces no existe razón alguna por la cual no se pueda componer tampoco el 2 de 1 y 1. Si los cálculos con el número 11 no se siguen del único hecho característico para este número, ¿cómo es que los cálculos con el 2 tengan que depender de la observación de una colección particular y separada de su propia manera peculiar?

Tal vez se pregunte cómo puede existir la aritmética, si por medio de los sentidos no podemos distinguir nada o cuando mucho tres cosas. En relación con nuestro conocimiento de las proposiciones aritméticas y de su aplicación, tal situación sería rara; pero, ¿afectaría su verdad? Si se llama empírica a una proposición en virtud de que tenemos que haber realizado observaciones para llegar a ser conscientes de su contenido, entonces no se usa la palabra "empírica" en el sentido en que ésta se opone a "*a priori*". Se expresa una afirmación psicológica que sólo concierne al contenido de la proposición; no se toca la cuestión de su verdad. En este sentido todos los cuentos de Münchhausen resultan también empíricos; pues ciertamente se tuvieron que haber hecho múltiples observaciones para poderlos inventar.

¿SON LAS LEYES DE LA ARITMÉTICA VERDADES INDUCTIVAS?

§ 9. Las anteriores consideraciones hacen probable que las fórmulas numéricas puedan ser derivadas de las definiciones de los números individuales por medio de algunas leyes generales, y que estas definiciones ni afirmen hechos observados ni los presupongan para su legitimidad. Lo que toca hacer ahora es conocer la naturaleza de tales leyes.

Para la prueba antes mencionada de la fórmula 5 + 2 = 7, Mill[17] intenta aprovecharse del principio "todo lo que está compuesto de partes, está compuesto de partes de esas partes". Sostiene que es una expresión más característica del conocido principio que en otros sitios tiene la forma: "las sumas de iguales son iguales". La llama una verdad inductiva y una ley natural del más alto orden. Es típico de la inexactitud de su exposición que en absoluto invoque esta proposición en el punto de la prueba en el que, según su propia opinión, sería indispensable; sin embargo, parece que su verdad inductiva pretendiera remplazar el axioma leibniziano: "si los iguales se sustituyen por iguales en los mismos sitios, la igualdad permanece". Pero para poder llamar leyes naturales a las verdades aritméticas, Mill introduce un sentido que ellas no tienen. Sostiene, por ejemplo,[18] que la igualdad 1 = 1 podría ser falsa, en virtud

[17] *Op. cit.*, libro III, cap. XXIV, § 5.
[18] *Op. cit.*, libro II, cap. VI, § 3.

de que una libra de peso no siempre pesa exactamente lo mismo que otra. Pero la proposición 1 = 1 en manera alguna pretende afirmar eso.

Mill entiende el símbolo + de tal manera que por medio de él se expresen las relaciones entre las partes de un cuerpo físico, o de un montón, y el todo; pero éste no es el sentido de ese símbolo. 5 + 2 = 7 no significa que si en 5 partes de líquido se vierten 2 partes de líquido se obtendrán 7 partes de líquido, sino que ésta es una aplicación de aquella proposición, que sólo vale si no acontece ningún cambio del volumen a consecuencia de, digamos, una reacción química. Mill confunde siempre las aplicaciones que pueden hacerse de una proposición aritmética, las cuales son frecuentemente de índole física y tienen como presupuesto hechos observados, con la proposición matemática pura misma. El símbolo de suma ciertamente puede parecer corresponder, en muchas aplicaciones, al proceso de amontonar, pero ése no es su significado; porque en otras aplicaciones podría no tratarse de montones, agregados, de las relaciones de un cuerpo físico respecto de sus partes, por ejemplo, cuando el cálculo se refiere a sucesos. Ciertamente, aquí también se puede hablar de partes; pero, entonces, la palabra se usa no en un sentido físico o geométrico, sino en su sentido lógico, como cuando hablamos de los tiranicidios como partes del asesinato en general. Aquí hay subordinación lógica. Y así, en general la adición tampoco corresponde a una relación física. En consecuencia, las leyes generales de la adición tampoco pueden ser leyes naturales.

§ 10. Sin embargo, tal vez podrían ser, no obstante, verdades inductivas. ¿Cómo podría pensarse esto? ¿De qué hechos se debería partir para elevarse hasta lo general? Éstos sólo podrían ser las fórmulas numéricas. Pero con ello seguramente perderíamos la ventaja que hemos ganado por medio de las definiciones de los números individuales, y tendríamos que buscar otros modos de fundamentar las fórmulas numéricas. Si superamos estas dificultades, cosa que no es nada fácil, consideraremos inadecuadas las bases para la inducción, puesto que aquí faltaría la uniformidad, que en otros casos prestaría una gran

seguridad a este procedimiento. Ya Leibniz reconoció esto,[19] pues a la afirmación de su Philalethes:

> Los diferentes modos de los números no pueden tener ninguna otra diferencia, sino la de ser más o menos; por tanto, son modos simples, como los del espacio,

contestó:

> Esto se puede decir del tiempo y de la línea recta, pero ciertamente no de las figuras y menos aún de los números, los cuales no sólo difieren en magnitud, sino que también son desemejantes. Un número par puede ser dividido en dos partes iguales, lo cual no puede ser el caso para un número non; 3 y 6 son números triangulares, 4 y 9 son números cuadrados, 8 es un cubo, etc.; y esto acontece mucho más con los números que con las figuras; ya que dos figuras distintas pueden ser perfectamente similares entre sí, pero nunca dos números.

Ciertamente nos hemos habituado a considerar a los números, en muchos contextos, como de la misma clase; pero esto acontece sólo porque conocemos un conjunto de proposiciones generales que valen para todos los números. Sin embargo, tenemos que partir aquí del punto de que ninguna de éstas ha sido establecida. De hecho, sería difícil encontrar un ejemplo de inferencia inductiva correspondiente al presente caso. Por otra parte, frecuentemente admitimos la proposición de que cualquier lugar en el espacio y cualquier momento en el tiempo en sí y por sí es tan bueno como cualquier otro. Un resultado será igualmente bueno en otro lugar y en otro tiempo si las condiciones son las mismas. Pero en el caso de los números esto no se aplica porque los números no están en el espacio ni en el tiempo. Las posiciones en las series numéricas no tienen el mismo valor que los lugares en el espacio.

Los números se relacionan de una manera totalmente distinta a como lo hacen, digamos, los individuos de una especie animal, en que por naturaleza tienen un orden de precedencia determinado, en donde cada uno está constituido de una

[19] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 39. Erdmann, p. 243.

manera propia y tiene sus peculiaridades, lo cual se hace especialmente notorio en los casos del 0, el 1 y el 2. Por otra parte, si por medio de la inducción se fundamenta una proposición referente a una especie, habitualmente tenemos ya toda una serie de propiedades comunes por medio de la definición del concepto de la especie. Pero, con los números, se sostiene que es difícil encontrar aunque sea una sola propiedad de la que no se tuviera que demostrar primero que es común.

Fácilmente se podría comparar nuestro caso con el siguiente. Se ha notado que en un barreno la temperatura aumenta regularmente de acuerdo con la profundidad; y supóngase que el barreno ha topado hasta ahora con muy distintos estratos rocosos. Es obvio que no podemos simplemente, a partir de las observaciones que se hayan hecho sólo sobre este barreno, inferir nada en absoluto acerca de los estratos más profundos, y sería prematuro responder la pregunta de si la regularidad de la distribución de la temperatura se mantendrá en adelante. Hay un concepto "lo que se encontrará al seguir barrenando", bajo el cual ciertamente cae tanto lo ya observado como lo que se encuentra a mayor profundidad; pero poco nos puede servir esto aquí. Igualmente será de poca ayuda saber, en el caso de los números, que estos caen todos bajo el concepto de "cualquier cosa que se obtenga incrementando continuamente en uno". Se puede encontrar una diferencia entre ambos casos, consistente en que los estratos rocosos simplemente se descubren, en tanto que los números se crean y se determinan en sus naturalezas totales mediante el proceso de incrementar continuamente en uno. Esto sólo puede significar que todas sus propiedades pueden deducirse a la manera en que un número, por ejemplo, el número 8, se genera por medio del incremento en uno. Con ello se admite, en el fondo, que las propiedades de los números se siguen de sus definiciones, y surge la posibilidad de que se pudieran probar las leyes generales de los números a partir del procedimiento de generación que es común a todos ellos, mientras que las propiedades especiales de los números individuales se seguirían del modo especial en que se forman por medio del incremento continuo en uno. De la misma manera, también se puede deducir, en relación con los estratos geológicos, todo lo determinado sólo por la profundidad en que se encuentren, incluyendo sus relaciones posicionales, sin que se tenga necesidad de la inducción; lo que no esté determinado de esta manera, tampoco puede enseñarlo la inducción.

Se puede suponer que el procedimiento de la inducción misma sólo se justifica por medio de proposiciones generales de la aritmética, a menos que se le entienda como un mero proceso de habituación, en cuyo caso carece de todo poder para conducirnos a la verdad. Mientras que el procedimiento científico, que sigue patrones objetivos, a veces establece una alta probabilidad con base en una sola confirmación, mientras que a veces juzga inválidos a cientos de casos particulares, el procedimiento de habituación se determinará por el número y la fuerza de las impresiones y de las circunstancias subjetivas, las cuales no tienen ningún derecho para influir en nuestro juicio. La inducción se debe apoyar en la teoría de la probabilidad, puesto que jamás puede producir una proposición que sea algo más que probable. Sin embargo, no se comprende cómo podría desarrollarse esta teoría sin presuponer las leyes aritméticas.

§ 11. En contraposición, Leibniz[20] piensa que las verdades necesarias, tales como las que se encuentran en la aritmética, requieren principios cuya prueba no depende de ejemplos ni del testimonio de los sentidos, aunque a nadie que careciera de sentidos se le hubiera ocurrido pensar en ellos. "La totalidad de la aritmética es innata y está en nosotros de un modo virtual." Lo que significa la expresión "innato" lo explica en otra parte:[21]

> no es cierto que todo lo que aprendemos no sea innato; las verdades de los números están en nosotros, aunque sin embargo tenemos que aprenderlas, ya sea que se las extraiga de su fuente, ya sea que se las aprenda de manera demostrativa (lo cual muestra que son innatas)...

[20] Baumann, *op. cit.*, t. II, pp. 13–14. Erdmann, pp. 208–209.
[21] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 38. Erdmann, p. 212.

¿SON SINTÉTICAS A PRIORI O ANALÍTICAS LAS LEYES DE LA ARITMÉTICA?

§ 12. Si traemos a colación la contraposición entre lo analítico y lo sintético, se producen cuatro combinaciones, de las cuales una, sin embargo, puede ser eliminada, a saber:

analítico *a posteriori*.

Si junto con Mill se ha tomado partido por lo *a posteriori*, ya no hay más que elegir; así que sólo quedan dos posibilidades:

sintético *a priori*

y

analítico,

que tendrán que ser examinadas por nosotros. Kant se decide por la primera. En este caso no queda sino invocar a la intuición pura como último fundamento de nuestro conocimiento, aunque resulta difícil decir si aquí la intuición es espacial o temporal o decir de qué otra clase pueda ser; Baumann[22] concuerda con Kant, aunque por razones diferentes. También en Lipschitz[23] las proposiciones que afirman la independencia del número respecto del método de contar, y que también afirman la conmutatividad y la asociatividad de los sumandos, se derivan de la intuición interna. Hankel[24] basa la teoría de los números reales en tres proposiciones fundamentales, a las que atribuye el carácter de nociones comunes (*notiones communes*):

> a través de la exposición se hacen en evidentes; valen para las magnitudes en todos los campos según la intuición pura de magnitud y pueden, sin perder su carácter, ser transformadas en definiciones, simplemente se dice: por adición de magnitudes se entiende una operación que satisface esas proposiciones.

En la última afirmación hay una cierta oscuridad. Tal vez se pueda construir la definición; pero ésta no puede constituir un

[22] *Op. cit.*, t. II, p. 669.
[23] *Lehrbuch der Analysis* [*Curso de análisis*], vol. I, p. 1. [Bonn, 1877].
[24] *Theorie der complexen Zahlensysteme* [*Teoría de sistemas numéricos complejos*], pp. 54-55.

sustituto de aquellas proposiciones fundamentales, pues al tratar de aplicarlas surgirá siempre la pregunta: ¿son magnitudes los números, y es esto lo que comúnmente llamamos adición de números, adición en el sentido de esta definición? Y para contestarla deberíamos conocer ya aquellas proposiciones acerca de los números. Más aún, la expresión "intuición pura de magnitud" inquieta. Si consideramos todo lo que ha sido llamado magnitud: números, longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, curvas, masas, velocidades, fuerzas, luminosidades, corrientes eléctricas, etc., podemos llegar a entender cómo se puede subordinar todo esto bajo un concepto de magnitud; pero la expresión "intuición de magnitud", y peor aún, "intuición pura de magnitud", no puede admitirse como adecuada. Yo no puedo, incluso, aceptar una intuición de 100 000, mucho menos de un número en general, y menos aún, de magnitud en general. Con demasiada facilidad se invoca a la intuición interna cuando no se puede encontrar ningún otro fundamento. Pero, en este caso, no se debería perder de vista por completo el sentido de la palabra "intuición".

Kant la define en la *Lógica* así (ed. Hartenstein, VIII, p. 88):

> La intuición es una representación individual (*representatio singularis*), el concepto es una representación general (*representatio per notas communes*) o una representación reflexiva (*representatio discursiva*).

Aquí no se menciona ninguna referencia a la sensibilidad, de la que sí hablará en la estética trascendental, y sin la cual la intuición no podría servir como principio de conocimiento para los juicios sintéticos *a priori*. En la *Crítica de la razón pura* (A19/B33) se dice:

> Por medio de la sensibilidad nos llegan a ser dados los objetos y sólo ella nos aporta intuiciones.

Según esto, el sentido de la palabra "intuición" en la *Lógica* es mucho más amplio que en la estética trascendental. En el sentido que se le da en la *Lógica*, tal vez se podría llamar una intuición a 100 000; puesto que no es ningún concepto general.

Pero tomada en este sentido la intuición no puede servir de fundamento de las leyes de la aritmética.

§ 13. Sobre todo, sería bueno no sobreestimar la afinidad que la aritmética tiene con la geometría. En contra de ello ya he aducido una cita leibniziana. Un punto geométrico considerado en sí no se distingue de ningún otro; lo mismo vale para líneas y planos. Sólo los distinguimos cuando varios puntos, o líneas o planos, son aprehendidos en una sola intuición. Por tanto en la geometría resulta explicable que las proposiciones generales hayan de derivarse de la intuición; los puntos, las líneas o los planos que intuimos no son propiamente particulares y, por tanto, que puedan valer como representantes de toda su clase. Otra cosa sucede con los números: cada uno tiene su peculiaridad. En qué medida un número particular puede representar a todos los demás, y dónde entra en juego su carácter especial, es algo que no puede decirse de antemano.

§ 14. Si comparamos las diversas clases de verdades respecto de los dominios que gobiernan, esa comparación habla también en contra de la supuesta naturaleza empírica y sintética de las leyes aritméticas.

Las proposiciones empíricas valen para la realidad física o psicológica, las verdades geométricas gobiernan el campo de todo lo que es espacialmente intuible, ya sea que pertenezca a la realidad o que sea un producto de la imaginación. Las más extravagantes fantasías de la fiebre, las más audaces invenciones de la leyenda y de los poetas, en donde los animales hablan, las estrellas se detienen permanentemente, las piedras se convierten en hombres y los hombres en árboles, en donde se surge de los pantanos tirando de los propios cabellos, todo esto, en la medida en que siga siendo intuible, sigue estando sujeto a los axiomas de la geometría. Sólo el pensamiento conceptual puede liberarse de esta limitación cuando admite, digamos, un espacio de cuatro dimensiones o una curvatura positiva. Tales consideraciones no son, en manera alguna, inútiles; pero abandonan totalmente la base de la intuición. Si hacemos uso de ésta aquí como una ayuda, entonces la intuición siempre lo será de un espacio euclidiano, el único espacio de cuyas figuras podemos tener una intuición. Pero entonces no se la toma tal como es, sino como símbolo de algo más; por ejemplo, se denomina recto o plano a lo que se intuye realmente como curvo. En el pensamiento conceptual siempre se puede suponer lo contrario de éste o de aquel axioma geométrico sin que se caiga en contradicciones cuando se sacan conclusiones deductivas de esos supuestos, aunque estén en pugna con nuestra intuición. Esta posibilidad muestra que los axiomas geométricos son independientes unos de otros y de las leyes primitivas de la lógica, y consecuentemente son sintéticos. ¿Se puede decir lo mismo de las proposiciones fundamentales de la ciencia de los números? ¿No caería todo en una confusión si se pretendiera negar una de estas proposiciones? ¿Sería, incluso, posible pensar? ¿No yace el fundamento de la aritmética a mayor profundidad que el de cualquier conocimiento empírico, a mayor profundidad que el de la misma geometría? Las verdades aritméticas gobiernan todo lo que es numerable. Éste es el dominio más comprehensivo, puesto que a él pertenece no sólo lo real, no sólo lo intuible, sino todo lo pensable. Entonces, ¿las leyes de los números no deberían estar íntimamente conectadas con las del pensamiento?

§ 15. Las afirmaciones leibnizianas sólo pueden significar que las leyes de los números son analíticas como era de esperarse, ya que para él lo *a priori* coincide con lo analítico. Así, dice[25] que el álgebra adquiere sus ventajas de un arte muy superior, a saber, la verdadera lógica. En otro lugar,[26] compara las verdades necesarias y las contingentes con las magnitudes conmensurables e inconmensurables, y sostiene, en relación con las verdades necesarias, que es posible una prueba o una reducción a igualdades. Sin embargo, estas declaraciones pierden algo de peso en virtud de la inclinación de Leibniz a considerar todas las verdades como susceptibles de prueba:[27] "toda verdad tiene una prueba *a priori* derivada del concepto de los términos; sin embargo, no siempre está en nuestro poder realizar este análisis". La comparación con la conmensurabilidad e

[25] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 56. (ed. Erdmann, p. 424).
[26] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 57. Erdmann, p. 83.
[27] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 57. Pertz, t. II, p. 55.

inconmensurabilidad erige, por supuesto, una barrera infranqueable, al menos para nosotros, entre las verdades contingentes y las necesarias.

W. Stanley Jevons se pronuncia muy decididamente en favor de la naturaleza analítica de las leyes de los números:[28] "Sostengo que el número no es sino una distinción lógica y el álgebra es una lógica altamente desarrollada."

§ 16. Pero también este punto de vista tiene sus dificultades. ¿El prominente árbol de la ciencia de los números, ramificado y continuamente creciente, tiene sus raíces en meras igualdades? ¿Y cómo pueden las formas vacías de la lógica llenarse de ese contenido?

Mill escribe:

> La tesis de que podemos descubrir hechos, detectar los procesos ocultos de la naturaleza por medio de una hábil manipulación del lenguaje, es tan contraria al sentido común que cualquier persona que la crea debe haberse adentrado en la filosofía.[29]

Esto es cierto si durante la hábil manipulación no se piensa en nada. Mill se vuelve aquí en contra de un formalismo que nadie defendería. Cualquiera que use palabras o símbolos matemáticos exige que ellos signifiquen algo, y nadie esperará que surja algo pleno de sentido de meros símbolos vacíos. Sin embargo, es posible que un matemático lleve a cabo cálculos muy grandes sin entender con sus símbolos nada sensorialmente perceptible, nada intuible. No obstante, esos símbolos no carecen de sentido; distinguimos entre el símbolo y su contenido, aunque tal vez ese contenido sólo pueda captarse por medio de los símbolos. Nos percatamos de que otros símbolos podrían haberse puesto para representar las mismas cosas. Basta saber cómo manejar lógicamente el contenido que se hace sensible en los símbolos, y si se desea aplicar nuestro cálculo a la física basta saber cómo efectuar la transición a los fenómenos. Sin embargo, es un error ver en tales aplicaciones el sentido propio de las proposiciones. En cualquier aplicación se pierde

[28] *The Principles of Science* [*Los principios de la ciencia*], Londres, 1879, p. 156.
[29] *Op. cit.* L. II, cap. VI, § 2.

gran parte de su generalidad, y se introduce algo especial, que en otras aplicaciones es remplazado por algo distinto.

§ 17. Por más que se menosprecie la deducción, no se puede negar que las leyes establecidas por medio de la inducción son insuficientes. De ellas se tienen que derivar nuevas proposiciones que no están contenidas en ninguna de aquellas en particular. El que estas proposiciones en cierto modo se encuentren ya contenidas en el conjunto total, no nos libera del trabajo de extraerlas y establecerlas por sí mismas. Con ello se abre la siguiente posibilidad. En lugar de meter directamente un hecho en una cadena deductiva, dejando lo fáctico como está, se puede admitir su contenido en calidad de condición. Así, al sustituir en una cadena de razonamientos todo hecho por una condición, se obtendrá la conclusión de modo que se la haga depender de una serie de condiciones. Esta verdad sería establecida sólo por el pensamiento o, para decirlo con Mill, por medio de una hábil manipulación del lenguaje. No es imposible que las leyes numéricas sean de esta especie. Serían, pues, juicios analíticos; aunque no sería necesario que se las descubriera sólo por medio del pensamiento; pues aquí no entra en consideración el modo de descubrirlas, sino el tipo de fundamentos de la demostración; o, en palabras de Leibniz: "no se trata aquí de la historia de nuestros descubrimientos, que es distinta en los distintos hombres, sino de la conexión y el orden natural de las verdades, que es siempre el mismo".[30] La observación, pues, tendría que decidir finalmente si se satisfacen las condiciones contenidas en las leyes así fundadas. De esta manera, al final se llegaría al mismo lugar que se hubiera alcanzado si se hubiera conectado la serie de deducciones con los hechos observados. Pero el tipo de proceder aquí señalado es de preferirse en muchos casos, ya que conduce a una proposición general que no tiene por qué ser aplicable sólo a los hechos que inmediatamente estén en consideración. Las verdades de la aritmética estarían entonces relacionadas con las de la lógica de manera semejante a como los teoremas de la geometría se relacionan con los axiomas. Cada una

[30] *Nouveaux Essais* [*Nuevos ensayos*], IV, § 9. Ed. Erdmann, p. 360.

contendría, concentrada dentro de ella misma, una serie completa de deducciones para usos futuros, y su utilidad consistiría en que ya no habría necesidad de hacer las deducciones una por una, sino que se podría expresar de golpe el resultado de la serie completa.[31] En vista del poderoso desarrollo de las teorías aritméticas y sus múltiples aplicaciones, ciertamente ya no se podría sostener el tan difundido menosprecio por los juicios analíticos y la leyenda de la esterilidad de la lógica pura.

Ésta no es la primera vez que se enuncia este punto de vista; si se pudiera elaborar en detalle, de tal suerte que no quedara la más pequeña duda, sería, me parece a mí, un logro no del todo carente de importancia.

II. OPINIONES DE ALGUNOS AUTORES SOBRE EL CONCEPTO DE NÚMERO

§ 18. Al volvernos ahora hacia los objetos propios de la aritmética, distinguimos los números individuales, 3, 4, etc., del concepto general de número cardinal [*Anzahl*]. Ya hemos decidido ahora que los números individuales se derivan mejor de la manera como lo hicieron Leibniz, Mill, H. Grassmann y otros, a partir del uno y del incremento en uno; no obstante, estas explicaciones son aún incompletas en virtud de que el uno y el incremento en uno aún no están dilucidados. Hemos visto que se requieren proposiciones generales para derivar las fórmulas numéricas de estas definiciones. Tales leyes, precisamente, a causa de su generalidad, no pueden seguirse de las definiciones de los números individuales, sino del concepto general de número. Ahora someteremos esto a un examen más estricto. Al hacerlo, es de esperar que tengamos que examinar el uno y el incremento en uno y, con ello, esperamos completar las definiciones de los números individuales.

[31] Es sorprendente que también Mill (*op. cit.*, libro II; cap. IV, § 4) parezca expresar este punto de vista. Su sano sentido rompe, de tiempo en tiempo, su prejuicio por lo empírico. Pero este último vuelve a poner todo en estado de caos al hacer que confunda las aplicaciones físicas de la aritmética con ésta misma. Mill no parece saber que un juicio hipotético también puede ser verdadero, aun cuando su condición no lo sea.

§ 19. Aquí, quisiera volverme ahora contra el intento de concebir al número geométricamente como razón entre longitudes o superficies. Obviamente, se creyó facilitar las múltiples aplicaciones de la aritmética a la geometría, al colocar los rudimentos de ambas en íntima relación.

Newton[32] propuso entender el número no tanto como un conjunto de unidades, sino como la relación abstracta entre cualquier magnitud y otra de la misma clase que es tomada como unidad. Puede concederse el que con ello se llega a una descripción adecuada del número en sentido amplio, que incluye también a los números fraccionarios y a los irracionales; pero presupone los conceptos de magnitud y de relaciones entre magnitudes. Parece, pues, que aún hace falta la definición del número en el sentido estricto, del número cardinal; pues Euclides[33] hace uso del concepto de equimultiplicidad para definir la igualdad de dos proporciones entre longitudes; y los equimúltiplos conducen nuevamente a una igualdad numérica. Pero puede ser que la igualdad de proporciones entre longitudes sea definible independientemente del concepto de número. Sin embargo, aún se tendría la incertidumbre de la relación en que estaría el número así definido geométricamente con el número de la vida cotidiana. Este último resultaría totalmente separado de la ciencia. Y, no obstante, se puede exigir de la aritmética que nos ofrezca puntos de inicio para toda aplicación de los números, aun cuando la aplicación no sea asunto de ella. Incluso en los cálculos cotidianos tenemos que poder apoyarnos en la ciencia de la aritmética para suministrar la base de los procedimientos usados. Más aún, surge la pregunta de si la aritmética misma puede arreglárselas con el concepto geométrico de número cuando se piensa en números tales como las raíces de una ecuación o los números primos menores que un número dado, o en cosas semejantes. En cambio, el número que da respuesta a la pregunta ¿cuántos? puede determinar también cuántas unidades están contenidas en una longitud. Las operaciones con números negativos, fraccionarios e irracionales pueden ser reducidas a operaciones con números naturales. Newton tal vez quiso enten-

[32] Baumann, *op. cit.*, t. I, p. 475. [*Arithmetica Universalis*, vol. I, cap. II, 3.]
[33] [*Elementos*, libro V, def. v.]

der por magnitudes, al definir el número como una relación entre magnitudes, no sólo magnitudes geométricas sino también conjuntos. En ese caso, sin embargo, su definición sería inútil para nuestros propósitos, ya que la expresión "relación entre un conjunto y la unidad de ese conjunto" no nos dice más que la expresión "número por el que un conjunto se determina".

§ 20. La primera pregunta, entonces, sería si el número es definible. Hankel[34] declara que no lo es: "Lo que significa pensar o poner un objeto, una vez, dos veces, tres veces... no puede ser definido debido a la simplicidad por principio del concepto de poner." Pero aquí se trata no tanto del poner, sino del una vez, dos veces, tres veces. Si esto pudiera definirse, la indefinibilidad del poner nos preocuparía poco. Leibniz se inclina a considerar el número, aproximadamente al menos, como una idea adecuada, esto es, como una idea tal que es tan clara que todo lo que en ella sucede es claro a su vez.

Si nos inclinamos en general a sostener que el número es indefinible, esto se debe más a los intentos fallidos de definirlo, que al haber encontrado en la cosa misma fundamentos para sostener lo contrario.

¿ES EL NÚMERO UNA PROPIEDAD DE LAS COSAS EXTERNAS?

§ 21. Procuremos, al menos, asignar al número su lugar entre nuestros conceptos. La mayor parte de las veces, los números aparecen en el lenguaje en forma adjetival y en construcción atributiva, de manera semejante a las palabras duro, pesado, rojo, que significan propiedades de las cosas externas. Pero pronto nos toparemos con la pregunta de si tenemos que concebir los números individuales también como propiedades o si, de acuerdo con ello, el concepto de número puede ser colocado, digamos, junto al de color.

[34] *Theorie der complexen Zahlensysteme* [*Teoría de sistemas numéricos complejos*], p. l.

Ésta parece ser la opinión de Cantor,[35] cuando llama a la matemática una ciencia empírica puesto que tiene su inicio en consideraciones de objetos del mundo externo. Según él los números se originan sólo por abstracción de los objetos.

E. Schröder[36] considera al número como un modelo de la realidad y derivado de ella mediante un proceso en que las unidades reales se representan mediante unos. A esto lo llama abstraer el número. Según este método, las unidades se representarían sólo en lo que concierne a su frecuencia, prescindiendo de todas las otras determinaciones de las cosas, tales como el color o la forma. Aquí, frecuencia sólo es otra expresión para número. Schröder coloca, así, la frecuencia o número al mismo nivel que el color y la forma, y los considera como una propiedad de las cosas.

§ 22. Baumann[37] rechaza la concepción de que los números son conceptos abstraídos de las cosas externas: "Ya que las cosas externas no se presentan como unidades rigurosas; se nos presentan en grupos acotados o en puntos sensibles, pero nosotros tenemos la libertad de volver a considerarlos como multiplicidades." De hecho, mientras que no puedo cambiar en lo más mínimo, por medio de meros pensamientos, el color de una cosa o su dureza, puedo pensar *La Ilíada* como un poema, como 24 cantos, o como un gran número de versos. ¿No decimos, en sentidos totalmente diferentes, que un árbol tiene 1 000 hojas y luego que tiene hojas verdes? Atribuimos el color verde a cada una de las hojas, pero no el número 1 000. Podemos agrupar todas las hojas del árbol bajo el nombre de fronda. Ésta también es verde, pero no es 1 000. ¿A qué pertenece, pues, realmente la propiedad 1 000? Casi parece que ni a las hojas individuales ni a la totalidad. ¿Es posible que no pertenezca realmente a las cosas del mundo externo? Si entrego a alguien una piedra con las palabras: determine el peso de esto,

[35] *Grundzüge einer Elementarmathematik* [*Fundamentos de una matemática elemental*], § 4, p. 2. De manera semejante, Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis* [*Curso de análisis*], Bonn, 1877, p. 1.

[36] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* [*Curso de aritmética y álgebra*], Leipzig, 1873, pp. 6, 10, 11.

[37] *Op. cit.*, t. II, p. 669.

le doy el objeto entero de su investigación. Pero cuando le doy un montón de cartas con las palabras: determine el número de esto, él no sabrá si quiero saber el número de cartas o de juegos de baraja completa, o incluso de naipes que haya que descartar. De acuerdo con esto, al darle el montón no le he dado completo el objeto de su investigación; debo añadir una palabra: cartas, juego de baraja o naipes de descarte. Tampoco podemos decir, en este caso, que los distintos números existen en la cosa unos a lado de otros, como decimos de los distintos colores. Puedo apuntar con el dedo a distintas superficies individuales coloreadas sin decir una palabra, pero no puedo de la misma manera apuntar a los números individuales. Si con el mismo derecho puedo llamar a un objeto verde y rojo, esto significa que el objeto no es el portador específico de lo verde. Del mismo modo, un objeto al cual con el mismo derecho yo puedo atribuir diferentes números, tampoco es el portador real de un número.

Una distinción esencial entre color y número consiste en que el color azul de una superficie es independiente de cualquier elección que hagamos. Es una capacidad de reflejar rayos de luz de cierta longitud de onda y de absorber más o menos otros, y nuestro pensamiento no puede cambiar esto en lo más mínimo. En contraposición, no se puede decir que al montón de cartas corresponda en sí el número 1 o el 100 o algún otro, sino, a lo más, en relación con nuestro libre modo de pensarlo, y aun así tampoco podemos adjudicarle el número simplemente como un predicado. Lo que elegimos llamar baraja completa es obviamente una decisión arbitraria y el montón de cartas no sabe nada de ello. Pero cuando examinamos el montón desde este punto de vista, tal vez descubramos que lo podemos llamar dos barajas completas. Alguien que no supiera a qué se llama baraja completa, probablemente descubriría cualquier otro número en el montón antes que el dos.

§ 23. A la pregunta de a qué corresponde el número como propiedad, Mill contestó así:[38]

[38] *Op. cit.*, libro III, cap. XXIV, § 5.

> El nombre de un número connota, por supuesto, una propiedad que pertenece a un agregado de cosas, al que llamamos por el nombre; y esta propiedad es la manera característica en que el agregado está constituido o puede ser separado en partes.

Aquí, por lo pronto, hay un error en el artículo definido de la expresión "la manera característica", ya que existen muchas maneras distintas en que un agregado puede ser separado, y no se puede decir que sólo una sea característica. Un haz de paja puede, por ejemplo, ser separado de tal suerte que cada paja se corte a la mitad, o de tal suerte que cada paja quede separada una de otra, o de tal suerte que se formen dos haces. ¿Un montón de cien granos de arena está compuesto del mismo modo que un haz de cien pajas? Y, sin embargo, tenemos el mismo número. El numeral "uno" en la expresión "una paja" no expresa, sin embargo, cómo esta paja está compuesta de células o de moléculas. Aún mayor dificultad presenta el número 0. ¿Necesitan en absoluto las pajas formar un haz para que puedan ser contadas? ¿Tienen que reunirse los ciegos de Alemania en una asamblea, específicamente, para que la expresión "el número de ciegos de Alemania" tenga sentido? ¿Mil granos de trigo, una vez que han sido esparcidos por el segador, dejan de ser mil granos de trigo? ¿Existen propiamente agregados de pruebas de un teorema o agregados de sucesos? Y, no obstante, éstos también se pueden contar. Por tanto, es indiferente el que los sucesos sean coetáneos o el que estén separados por miles de años.

§ 24. Hemos llegado a otra razón para rehusarnos a clasificar el número al lado del color y de la solidez: su aplicabilidad es mucho más amplia.

Mill[39] piensa que la verdad de que aquello que está compuesto de partes está compuesto de partes de esas partes, es válida para todos los fenómenos naturales, ya que todos pueden ser contados. Pero, ¿no hay acaso nada más que esto que pueda ser contado? Locke[40] dice: "el número se aplica a los hombres,

[39] *Op. cit.*, libro III, cap. XXIV, § 5.
[40] Baumann, *op. cit.*, t. I, p. 409. [*Ensayo*, libro II, cap. XVI, § 1.]

a los ángeles, a los actos, a los pensamientos, a todo lo que existe o puede ser imaginado". Leibniz[41] rechaza la opinión de los escolásticos acerca de que el número no es aplicable a las cosas incorpóreas y llama al número una suerte de figura incorpórea que resulta de la unión de cualesquiera cosas; por ejemplo, de Dios, un ángel, un hombre y un movimiento, los cuales juntos son cuatro. Por ello, piensa que el número es algo totalmente general y que pertenece a la metafísica. En otro pasaje[42] dice: "No puede pesarse lo que no tiene fuerza y potencia; lo que no tiene partes no puede ser medido; pero nada hay que no admita ser numerado. Así, el número es, por así decirlo, la figura metafísica."

De hecho, sería asombroso que una propiedad abstraída de las cosas externas se pudiera trasladar sin ningún cambio de sentido a sucesos, a ideas y a conceptos. Sería como si se quisiera hablar de sucesos licuables, de ideas azules, de conceptos salados o de juicios viscosos.

Sería absurdo que lo que es sensible según su propia naturaleza ocurriera en lo no sensible. Cuando vemos una superficie azul, tenemos una impresión peculiar que corresponde a la palabra "azul"; y la volvemos a reconocer cuando miramos otra superficie azul. Si queremos suponer que, de la misma manera, cuando miramos un triángulo hay algo sensible que corresponde a la palabra "tres", tendríamos que encontrar eso mismo también en tres conceptos; de modo que algo no sensible tendría en sí algo sensible. Ciertamente, se puede conceder que a la palabra "triangular" le corresponde algún tipo de impresión sensible, pero entonces se tiene que tomar esta palabra como un todo. El tres que hay en aquella impresión sensible no lo vemos directamente; más bien, vemos algo que puede ser tomado por una de nuestras actividades intelectuales y que conduzcan a un juicio en el que ocurre el número 3. ¿Cómo nos percatamos, digamos, del número de figuras silogísticas propuestas por Aristóteles? ¿Quizás con los ojos? A lo más, vemos ciertos símbolos de estas figuras silogísticas, no a las figuras mismas. ¿Cómo podemos ver su número, si ellas mismas permanecen

[41] Baumann, *op. cit.*, t II, p. 2, 3. [Erdmann, p. 8.]
[42] Baumann, *op. cit.*, t II, p. 56. [Erdmann, p.,162.]

invisibles? Pero tal vez se pueda alegar que basta ver los símbolos; su número es igual al número de figuras. Pero ¿cómo sabemos esto? Para ello se debe haber determinado ya el número de figuras por otra vía. ¿O es la proposición "el número de figuras silogísticas es cuatro" sólo otra manera de poner la proposición "el número de símbolos de las figuras silogísticas es cuatro"? ¡No! Parece que de los símbolos no se ha dicho nada; nadie quiere saber algo de los símbolos, como no sea una propiedad que a la vez exprese otra de lo simbolizado. Además, la misma cosa, sin cometer falacia lógica alguna, puede ser simbolizada mediante diferentes símbolos, ni siquiera necesita coincidir el número de símbolos con el número de lo simbolizado.

§ 25. Mientras que para Mill el número es algo físico, para Locke y Leibniz el número sólo existe en la idea [*in der Idee*]. De hecho, como dice Mill,[43] físicamente son diferentes dos manzanas de tres manzanas, dos caballos de un caballo; por ello, constituyen un fenómeno visible y tangiblemente diferente.[44] Pero ¿se infiere de ello que la dosidad o la tresidad sean algo físico? *Un* par de botas puede ser el mismo fenómeno visible y tangible que *dos* botas. Tenemos aquí una diferencia de número a la que no corresponde ninguna diferencia física; pues *dos* y *un* par de ninguna manera son lo mismo, como curiosamente parece haberlo creído Mill. Finalmente, ¿cómo es posible distinguir físicamente dos conceptos de tres conceptos?

Así, dice Berkeley:[45]

> se debe considerar que el número... no es nada fijo y establecido que exista realmente en las cosas mismas. Es por completo una creatura de la mente que considera una idea en sí misma o una combinación de ideas a las que da un nombre y así las hace pasar por una unidad. De acuerdo a como la mente combine variadamente sus ideas, la unidad varía; y como varíe la unidad, lo hará también el número, que no es otra cosa que una colección

[43] *Op. cit.*, libro III, cap. XXIV, § 5.
[44] Estrictamente hablando, tenemos que añadir: siempre y cuando sean un fenómeno. Pero si alguien tiene un caballo en Alemania y uno en América (y ningún otro), entonces posee dos caballos. Sin embargo, éstos no forman un fenómeno, sino que sólo cada caballo por sí podría ser llamado tal cosa.
[45] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 428. [*New Theory of Vision*, § 109.]

de unidades. Llamamos a una ventana una, a una chimenea una, y, sin embargo, una casa en la que hay muchas ventanas y muchas chimeneas tiene igual derecho a ser llamada una, y con muchas casas se hace una ciudad.

¿ES EL NÚMERO ALGO SUBJETIVO?

§ 26. Esta línea de pensamiento puede conducirnos fácilmente a considerar al número como algo subjetivo. Parece que la manera en que se origina el número podría proporcionarnos la clave de su naturaleza esencial. Se trataría, así, de una investigación psicológica. En este sentido dice Lipschitz:[46]

"Quien desee obtener una visión de conjunto de ciertas cosas empezará con una cosa particular y luego añadirá cosas nuevas a la primera." Esto parece convenir mucho mejor, digamos, a cómo obtenemos la intuición de una constelación que a la construcción de números. La intención de obtener una visión de conjunto no es esencial, ya que difícilmente se podría sostener que se entendería mejor un rebaño cuando se sabe de cuántas cabezas se compone.

Una descripción del proceso interno que precede a la realización de un juicio de número, aun cuando pudiera ser más justa, jamás podría sustituir una genuina determinación del concepto. Jamás podría ser aducida como prueba de una proposición aritmética; por medio de ella no adquirimos conocimiento de ninguna propiedad de los números. Pues el número es tan escasamente un objeto de la psicología o un producto de los procesos psíquicos, como podría serlo, por ejemplo, el Mar del Norte. La objetividad del Mar del Norte no se afecta porque dependa de nuestro arbitrio escoger qué parte de toda la extensión marina de la Tierra seleccionamos y delimitamos para llamarla el "Mar del Norte". Esto no es razón para pretender investigar este mar con métodos psicológicos. De la misma manera, el número es también algo objetivo. Si se dice que "el Mar del Norte tiene 10 000 millas cuadradas de extensión", esto no alude ni con "Mar del Norte" ni con "10 000" a un estado o un proceso interno, sino que se afirma algo totalmente objetivo, independiente de nuestras ideas y cosas por el estilo.

[46] *Op. cit.*, p. 1. Supongo que Lipschitz se refiere a un proceso interno.

Si en otra ocasión, por caso, queremos trazar de distinta manera los límites del Mar del Norte o entender algo distinto por "10 000", esto no haría falso el mismo contenido que antes era verdadero, sino que en lugar de un contenido verdadero quizás se deslizara uno falso, con lo cual la verdad del primero no se anularía en modo alguno.

El botánico quiere decir algo tan fáctico cuando da el número de pétalos de una flor como cuando indica su color. Tanto lo uno como lo otro depende poco de nuestro arbitrio. Existe una cierta semejanza, pues, entre el número y el color; pero ésta no consiste en que ambos sean perceptibles a través de los sentidos en las cosas externas, sino en que ambos son objetivos.

Yo distingo lo objetivo de lo tangible, de lo espacial, de lo real. El eje de la Tierra, el centro de masa del sistema solar, son objetivos, pero no los llamaría reales a la manera en que lo es la Tierra misma. Frecuentemente se dice que el ecuador es una línea *imaginaria*; pero resultaría falso llamarla una línea *ficticia*; no surge del pensamiento, no es el resultado de un proceso anímico, sino que sólo es reconocida o aprehendida por medio del pensamiento. Si el ser reconocida fuese equivalente a ser creada, no podríamos predicar nada positivo de ella correspondiente a un tiempo anterior a su pretendida creación.

El espacio, según Kant, pertenece al fenómeno. Sería posible que para otros seres racionales se presentara de una manera totalmente distinta a como lo hace para nosotros. En verdad, ni siquiera podemos saber si se aparece del mismo modo en unos hombres y en otros, pues no podemos poner las intuiciones espaciales de unos junto a las de los otros para poder compararlas. Pero, no obstante, hay algo objetivo contenido en esto; todo mundo reconoce los mismos axiomas geométricos, aunque sea sólo a través de la acción, y tiene que hacerlo para encontrar cómo moverse en el mundo. Lo objetivo en esto es lo que está sujeto a leyes, lo que es concebible y juzgable, lo que se deja expresar en palabras. Lo puramente intuitivo no es comunicable. Para aclarar esto, tomemos dos seres racionales para los cuales sólo sean intuibles las propiedades y las relaciones proyectivas: el estar tres puntos en una línea, cuatro puntos en un plano, etc.; esto haría aparecer como plano para uno lo que el otro intuiría como punto, y viceversa. Lo que para uno

es la línea que une dos puntos, para el otro sería la línea de intersección de dos planos; y así sucesivamente con una intuición siempre análoga a la otra. Podrían entenderse perfectamente uno y otro y jamás se percatarían de la diferencia de sus intuiciones, pues en la geometría proyectiva toda proposición tiene su contraparte dual; así, el desacuerdo sobre cuestiones de apreciación estética no constituye indicio seguro alguno. Estarían completamente de acuerdo sobre todos los teoremas geométricos; simplemente interpretarían de modo diferente las palabras en sus intuiciones correspondientes. Con la palabra "punto", por ejemplo, uno conectaría una intuición y el otro, otra. A pesar de esto se puede decir que esta palabra significa algo objetivo para ellos; sólo que no se puede entender como su significado nada peculiar a sus intuiciones. Y en este sentido también es objetivo el eje de la Tierra.

Habitualmente con la palabra "blanco" se piensa una cierta sensación, la que naturalmente es por completo subjetiva; pero en el lenguaje ordinario también, me parece, con frecuencia se hace patente un sentido objetivo. Cuando a la nieve se la llama blanca, se quiere expresar una propiedad objetiva que a la luz habitual del día se reconoce en cierta sensación. Si la nieve es iluminada con una luz de color, tiene esto que ser tomado en consideración al juzgar. Tal vez se diría: ahora *parece* roja, pero *es* blanca. Incluso un daltónico puede hablar de rojo y verde, aunque en sus sensaciones no distinga estos colores. Reconoce la diferencia basándose en que otros lo hacen, o tal vez por medio de un experimento físico. De este modo, frecuentemente las palabras para los colores no significan nuestras sensaciones subjetivas, de las que no podemos saber si concuerdan con las de otros –pues patentemente esto de ninguna manera lo garantiza la misma denominación–, sino que señalan una cualidad objetiva. Así, por objetividad entiendo una independencia de nuestro tener sensaciones, de nuestro intuir e imaginar, y de toda construcción de imágenes internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores, pero no una independencia de la razón. Responder a la pregunta de qué cosas son independientes de la razón sería como juzgar sin juzgar, como lavar un abrigo sin tener que mojarlo.

§ 27. Por esa razón, tampoco puedo concordar con Schloemilch,[47] quien llama al número representación del lugar de un objeto en una serie.[48] Pues si el número fuera una representación, entonces la aritmética sería psicología. La aritmética es tan escasamente psicología, como lo es, digamos, la astronomía. Así como ésta no se ocupa de la representación de los planetas, sino que se ocupa de los planetas mismos, de la misma manera el objeto de la aritmética no es representación alguna. Si el dos fuera una representación, sería sólo la mía. La representación de otro sería, en cuanto tal, la representación de otro. De esta manera, tal vez tendríamos muchos millones de doses. Se tendría que decir: mi dos, tu dos, un dos, todos los doses. Si se aceptaran representaciones latentes o inconscientes, se tendrían también doses inconscientes que con posterioridad volverían a ser conscientes. Con la aparición de otros hombres surgirían constantemente nuevos doses, y quién sabe si con el paso de los siglos las cosas no llegaran a cambiar de tal suerte que se arribara a $2 \times 2 = 5$. A pesar de ello, sería dudoso que existiese el número infinito de números que habitualmente suponemos que existen. Tal vez 10^{10} sería sólo un símbolo vacío

[47] *Handbuch der algebraischen Analysis* [*Manual de análisis algebraico*], p. 1.

[48] Frente a esto, también se puede objetar entonces que si aparece el mismo número siempre debería aparecer la misma representación de un lugar, lo cual es patentemente falso. Lo que sigue a continuación no sería verdad en caso de que por representación [*Vorstellung*] quiera entenderse una idea objetiva; pero, ¿qué diferencia habría entonces entre la representación del lugar y el lugar mismo?

La representación en sentido subjetivo es aquello a lo que se refieren las leyes psicológicas de asociación; es de naturaleza sensible, figurativa. La representación en sentido objetivo pertenece a la lógica y, esencialmente, es no sensible, si bien la palabra, que significa una representación objetiva, frecuentemente se acompaña de una idea subjetiva, la cual, sin embargo, no constituye su significado. La representación subjetiva es con frecuencia demostrablemente diferente en diferentes hombres; la objetiva es la misma para todos. Las representaciones objetivas se pueden dividir en objetos y conceptos. Para evitar confusiones, yo sólo usaré "representación" en sentido subjetivo. En virtud de que Kant asoció ambos significados a esta palabra, dio a su teoría un tinte muy subjetivo, idealista, y dificultó el descubrimiento de su verdadero pensamiento. La distinción hecha aquí se justifica por la que hay entre psicología y lógica, siempre que éstas se mantengan rígidamente separadas.

y podría no haber ninguna representación en absoluto en ningún ser que respondiera a ese nombre.

Vemos a qué resultados maravillosos se llega cuando uno se toma en serio el pensamiento de que el número es una representación. Y llegamos a esta conclusión: que el número no es algo espacial y físico, como los montones de piedrecillas y las galletitas de Mill, ni tampoco es algo subjetivo como las representaciones, sino que es algo no sensible y objetivo. El fundamento de la objetividad no puede estar en las impresiones sensoriales que como afecciones de nuestra mente son completamente subjetivas, sino que, por lo que alcanzo a ver, sólo puede estar en la razón.

Sería asombroso que la ciencia más exacta tuviera que apoyarse en la todavía insegura psicología, que anda a tientas.

EL NÚMERO COMO CONJUNTO

§ 28. Algunos autores explican el número cardinal como un conjunto, una multiplicidad o pluralidad. En esto hay el inconveniente de que los números 1 y 0 quedarían excluidos del concepto. Más aún, aquellas expresiones padecen de indeterminación: a veces se acercan más al significado de "montón", "grupo", "agregado" –con lo cual se piensa en un complejo espacial–, a veces tienen un significado casi igual al de "número", sólo que más indeterminado. Un análisis del concepto de número, por tanto, no puede encontrarse en términos de tales definiciones. Thomae[49] requiere para la construcción del número que a diferentes conjuntos de objetos se les den diferentes nombres. Con ello se refiere obviamente a que hay que determinar con mayor precisión tales conjuntos de objetos, para los que la imposición de nombres es sólo el signo externo. La pregunta es qué tipo de determinación es ésa. Es claro que la idea de número no surgiría si se pretendieran introducir para "3 estrellas", "3 dedos", "7 estrellas", nombres en los que no fueran reconocibles elementos comunes. No se trata en absoluto sólo de asignar nombres, sino de que se simbolice por sí mismo lo

[49] *Elementare Theorie der analytischen Functionen* [*Teoría elemental de las funciones analíticas*], p. 1.

que es el número. Para esto es necesario que sea reconocido en su peculiaridad.

Aún es de observar la siguiente diferencia. Unos llaman al número un conjunto de cosas u objetos; otros, como lo hizo Euclides,[50] lo explican como un conjunto de unidades. Esta expresión requiere una discusión especial.

III. OPINIONES SOBRE LA UNIDAD Y EL UNO

¿EXPRESA EL NUMERAL "UNO" UNA PROPIEDAD DE LOS OBJETOS?

§ 29. En las definiciones que Euclides ofrece al principio del Libro VII de los *Elementos*, con la palabra "μονάς" a veces parece referirse a un objeto contable, a veces a una propiedad del mismo, a veces al número uno. En general, se sale del apuro con la traducción "unidad", pero únicamente porque esta palabra oscila entre esos distintos significados.

Schröder dice:[51] "cada una de las cosas que hay que contar será llamada unidad". Pero se puede preguntar en virtud de qué se ponen primero las cosas bajo el concepto de unidad y no simplemente se define: número es un conjunto de cosas, con lo que volveríamos a lo anteriormente expuesto. El denominar a las cosas unidades podría verse como un intento de encontrar una determinación más precisa; ateniéndose a la forma lingüística se considera "uno" como una palabra para una propiedad, y se considera "una ciudad" de la misma manera que "hombre sabio". Así, la unidad sería un objeto al que correspondería la propiedad "uno" y se comportaría respecto a "uno" de manera semejante a como lo hace "un sabio" respecto al adjetivo "sabio". A las razones que se han hecho valer en contra de lo anterior, en contra de que el número sea una propiedad de las cosas, se añaden aquí algunas razones especiales. En primer lugar, sería sorprendente que cada cosa singular tuviera esta propiedad. Resultaría incomprensible por

[50] Libro VII de los *Elementos*, al principio: Μονάς ἐστι, καθ' ἥν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. [Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe es llamada una. Un número es una multitud compuesta de unidades.]
[51] *Op. cit.*, p. 5.

qué se le atribuye expresamente la propiedad a una cosa. Sólo en virtud de la posibilidad de que algo no sea sabio, cobra sentido la afirmación de que Solón es sabio. El contenido de un concepto disminuye cuando aumenta su extensión; si ésta lo abarcara todo, el contenido se debería perder por completo. No es fácil imaginar cómo llegó el lenguaje a producir una palabra para una propiedad que no pudiera servir para determinar a ningún objeto.

Si "un hombre" fuera concebible de manera semejante a "hombre sabio", se debería pensar que "uno" también podría ser usado como predicado, y así como decimos "Solón fue sabio", también podríamos decir "Solón fue uno" o "Solón fue unidad". Si también esta última expresión puede ocurrir, lo cierto es que por sí misma no es entendible. Por ejemplo, puede significar: Solón fue un hombre sabio, si el contexto nos puede proveer "sabio". Sin embargo, parece que "uno" no puede ser un predicado tomado aisladamente.[52] Esto resulta aún más claro en plural. Mientras que "Solón fue sabio" y "Tales fue sabio" pueden combinarse en "Solón y Tales fueron sabios", no se puede decir "Solón y Tales fueron uno". Por consiguiente, no se comprendería esta imposibilidad si "uno" fuera una propiedad tanto de Solón como de Tales, a la manera como "sabio" lo es.

§ 30. A esto se añade el que no se haya podido dar una definición de la propiedad "uno". Cuando Leibniz afirmó:[53] "uno es lo que aprehendemos en un acto del entendimiento", definió "uno" por sí mismo. ¿Y no aprehendemos por un acto del entendimiento también lo múltiple? En el mismo pasaje, Leibniz llegó a admitirlo. Algo semejante dice Baumann:[54] "uno es lo que se concibe como uno"; y aún más:

> lo que ponemos como punto o lo que ya no queremos poner como divisible en partes, lo consideramos como uno; pero cada

[52] Ocurren giros que parecen contradecir esto; pero según una consideración más estricta, se encontrará que un término conceptual tiene que proveerse, o que "uno" no se usa como numeral; que lo que trata de afirmar es el carácter, no de ser único, sino de ser unitario.
[53] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 2. Erdmann, p. 8.
[54] *Op. cit.*, t. II, p. 669.

> uno de la intuición externa, tanto de la pura como de la empírica, podemos considerarlo también como múltiple. Toda representación es una si está aislada frente a otra representación; pero en sí puede nuevamente ser diferenciada en muchas.

Así, se desvanece toda delimitación fáctica del concepto, y se hace depender todo de nuestro punto de vista. Preguntamos nuevamente: ¿qué sentido puede tener atribuir a algún objeto la propiedad "uno", si según el punto de vista que adoptemos todo puede ser uno y también no serlo? ¿cómo puede una ciencia que basa su prestigio en su mayor determinación y exactitud apoyarse en un concepto tan confuso?

§ 31. Si bien Baumann[55] hace descansar el concepto de uno en la intuición interna, sin embargo, se refiere en el mismo pasaje a ciertos criterios para ser uno, a saber, ser indiviso y estar aislado. Si esto fuera correcto, habría que esperar también que los animales pudieran tener una cierta representación de la unidad. ¿Es cierto que un perro al echar una mirada a la Luna puede llegar a tener una representación, aunque indeterminada, de lo que designamos con la palabra "uno"? Difícilmente. No obstante, el perro distingue ciertos objetos individuales: otro perro, su amo, la piedra con la que juega, ciertamente se le aparecen como aislados, existiendo por sí y no divididos, tal como a nosotros nos ocurre. Sin duda notará una diferencia si se tiene que defender contra muchos perros o sólo contra uno, pero esto es lo que Mill llamó diferencia física. En especial, necesitamos saber si el perro tiene conciencia, aunque débil, de lo que hay en común en las dos situaciones que expresamos por medio de la palabra "uno", cuando, por ejemplo, primero es mordido por un gran perro, y luego persigue a un gato. Esto me parece inverosímil. Concluyo, por tanto, que la noción de unidad no es, como cree Locke,[56] sugerida al entendimiento por todo objeto fuera de nosotros y toda idea dentro de nosotros, sino que la reconocemos por medio de las altas facultades mentales que nos distinguen de los animales. Así, pues, tales

[55] *Op. cit.*, t. II, p. 669.
[56] Baumann, *op. cit.*, t. I, p. 409. [*Ensayo sobre el entendimiento humano*, libro II, cap. VII, § 7.]

propiedades de las cosas, como ser indivisas y estar aisladas, que los animales advierten como nosotros, no son lo esencial para nuestro concepto.

§ 32. Aun siendo esto así, se puede sospechar que tienen cierta conexión. Esto lo indica el lenguaje en cuanto deriva "unido" de "uno". En la medida en que los contrastes dentro de una cosa se desvanecen hasta la insignificancia, en comparación con los contrastes entre ella y su medio circundante, y en la medida en que las conexiones internas entre sus elementos tienen más peso que sus conexiones con el medio circundante, tanto más natural se convierte para nosotros considerarla como un objeto distinto. Así, "unido" significa una propiedad que nos incita a tratar algo por sí mismo y a separarlo de lo circundante. De esta manera se explica que en francés "*uni*" llega a significar "liso" o "uniforme". También la palabra "unidad" es usada de manera semejante cuando se habla de unidad política de un país o de la unidad de una obra de arte.[57] Pero, en este sentido, "unidad" pertenece menos a "uno", que a "unido" o a "unitario". Porque cuando se dice que la Tierra tiene una luna, no se quiere señalar con ello que nuestro satélite esté aislado, exista por sí o sea indiviso, sino que se dice esto en contraposición a lo que sucede con Venus, con Marte o con Júpiter. En lo que concierne al estar aislado y ser indiviso, las lunas de Júpiter bien se pueden comparar con la nuestra y, en este sentido, son igualmente unitarias.

§ 33. La indivisión será llevada por algunos autores hasta la indivisibilidad. G. Köpp[58] llama individuo a cualquier cosa perceptible sensible o no sensiblemente, que se piense como no separable y existente por sí, y a los individuos numerables los llama unos, con lo cual, patentemente, "uno" es usado en el sentido de "unidad". Cuando Baumann funda su opinión de que las cosas externas no exhiben unidad estricta alguna en que tenemos la libertad de considerarlas como pluralidades,

[57] Sobre la historia de la palabra "unidad", véase Eucken, *Geschichte der philosophischen Terminologie* [*Historia de la terminología filosófica*], pp. 122 y s., 136, 220.

[58] *Schularithmetik* [*Aritmética escolar*], Eisenach, 1887, pp. 5 y s.

concede también que la no separabilidad es un criterio de la unidad estricta. Al elevar la conexión interna hasta lo incondicionado, patentemente se quiere llegar a un criterio para la unidad que sea independiente de todo punto de vista arbitrario. Este intento fracasa porque prácticamente nada queda que se pueda llamar unidad y que pueda ser numerado. Resulta que inmediatamente entramos en el camino contrario: que no se puede proponer la inseparabilidad misma como criterio, sino el que se piense como inseparable. Con esto volvemos, pues, a la tambaleante manera de ver las cosas. ¿Y se ganará algo pensando a las cosas diferentes de como son? Todo lo contrario; de suposiciones falsas pueden derivarse falsas conclusiones. ¿Para qué sirve la inseparabilidad si no se quiere concluir nada de ella? Si se puede –y hasta se debe– abandonar sin perjuicio algo del rigor de los conceptos, ¿para qué, entonces, el rigor? Pero quizás no debe pensarse sólo en la separabilidad. ¡Como si por medio de un defecto en el pensar pudiera conseguirse algo! Pero hay casos en que no se puede evitar pensar en la separabilidad, como cuando una conclusión está basada en la manera como está compuesta la unidad en cuestión; por ejemplo: si un día tiene 24 horas, ¿cuántas horas tienen 3 días?

¿SON LAS UNIDADES IGUALES UNAS A OTRAS?

§ 34. Así, pues, ha fracasado todo intento de definir la propiedad "uno" y debemos abandonar la idea de que al designar las cosas como unidades ofrecemos una determinación apropiada. Regresemos a nuestra pregunta: ¿por qué se llama a las cosas unidades, si "unidad" sólo es otro nombre para cosa, si todas las cosas son unidades o pueden ser aprehendidas como tales? E. Schröder[59] ofrece como razón de esto la necesaria igualdad atribuible a los objetos que han de contarse. Pero no se ve por qué las palabras "cosa" y "objeto" no podrían indicar igualmente bien esto. Así, se pregunta: ¿por qué ha de atribuirse igualdad a los objetos que van a contarse? ¿Sólo se les atribuye o realmente son iguales? En todo caso, *jamás* dos objetos son completamente iguales. Por otra parte, casi siempre se puede descubrir un aspecto en el que concuerden dos objetos. De

[59] *Op. cit.*, p. 5.

esta manera, otra vez volvemos al punto de vista arbitrario de ver las cosas, a menos que estemos dispuestos a atribuir a las cosas —en contra de la verdad— una igualdad que vaya más allá de la que realmente tienen. De hecho muchos autores llaman a las unidades iguales sin adjetivos. Hobbes dice:[60] "En sentido absoluto, el número en matemáticas presupone unidades iguales entre sí, a partir de las cuales se forma." Hume[61] sostiene que las partes componentes de la cantidad y del número son totalmente del mismo tipo. Thomae[62] llama unidad a un individuo del conjunto y dice: "Las unidades son iguales unas con respecto a otras." De la misma manera, o quizás más correctamente, se podría decir: los individuos del conjunto son diferentes unos con respecto a otros. ¿Qué tiene que ver esta pretendida igualdad con el número? Las propiedades por las que se distinguen las cosas unas de otras cuando consideramos su número carecen de toda importancia. Por esto se las quiere mantener aparte. Pero no resulta así. Cuando, como exige Thomae, se "hace abstracción de las peculiaridades de los individuos de un conjunto de objetos" o "al considerar cosas separadas, se prescinde de las notas por las que estas cosas se distinguen", no subsiste, como cree Lipschitz, "el concepto del número de las cosas consideradas", sino que se obtiene un concepto general bajo el cual caen todas aquellas cosas. Éstas mismas, en el proceso, no pierden ninguna de sus características. Cuando yo, por ejemplo, al considerar un gato blanco y uno negro prescindo de las propiedades por las que se distinguen, presumiblemente obtengo el concepto "gato". Si ahora pongo a ambos bajo este concepto y los llamo eventualmente unidades, el gato blanco sigue siendo blanco y el negro sigue siendo negro. También sucede que si no pienso en sus colores o no me propongo sacar ninguna conclusión de su diferencia en color, los gatos no van a volverse incoloros y siguen siendo tan diferentes como antes lo eran. El concepto "gato" que se obtiene por medio de la abstracción ciertamente ya no contiene las peculiaridades, pero justo por ello es sólo uno.

[60] Baumann, *op. cit.*, t. I, p. 242. [*Op. cit.*, dial. I, p. 16.]
[61] *Op. cit.*, t. II, p. 568. [*Enquiry Concerning Human Understanding*, secc. XII, parte III, § 131.]
[62] *Op. cit.*, p. 1.

§ 35. No se logra hacer iguales cosas diferentes por medio sólo de operaciones conceptuales; pero aun si pudiéramos, ya no se tendrían cosas, sino sólo una cosa; así, como dice Descartes,[63] el número en las cosas —o mejor, la pluralidad— surge de su diversidad. E. Schröder[64] afirma con derecho:

> La exigencia de numerar las cosas sólo puede plantearse de modo racional donde los objetos presentados sean claramente distinguibles unos de otros, por ejemplo, cuando estén separados espacial y temporalmente, y donde aparezcan aislados unos de otros.

De hecho, contar cosas a veces se dificulta por una gran semejanza, por ejemplo, la de las rejas de una verja. En este sentido, con especial penetración se expresa W. Stanley Jevons:[65] "El número no es sino otro nombre para la diversidad. La exacta igualdad es unidad, y con la diferencia surge la pluralidad." Y aún más (p. 157):

> Frecuentemente se ha dicho que las unidades son unidades en razón de ser perfectamente similares unas respecto de otras; pero aunque pueden ser perfectamente similares en algunos aspectos, deben ser diferentes al menos en un punto, de otra manera no admitirían la pluralidad. Si tres monedas fueran tan similares que ocuparan el mismo lugar al mismo tiempo, no serían tres monedas, sino una.

§ 36. Pero resulta que el punto de vista que sostiene la diversidad de las unidades pronto encuentra nuevas dificultades. Jevons define la unidad (*unit*) como "cualquier objeto del pensar que pueda distinguirse de cualquier otro objeto tratado como unidad en el mismo problema". Aquí, la unidad es definida por sí misma, y la aclaración "que pueda distinguirse de cualquier otro objeto" no contiene ninguna determinación más precisa en virtud de que es de suyo comprensible. Ya que llamamos al objeto otro objeto, justo sólo porque lo podemos distinguir de los primeros. Jevons dice después:[66]

[63] Baumann, *op. cit.*, t. I, p. 103. [*Principia philosophiae*, parte I, § 60.]
[64] *Op. cit.*, p. 3.
[65] *The Principles of Science*, p. 156.
[66] *Op. cit.*, p. 162.

Cuando uso el símbolo 5, realmente me refiero a

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

y se da totalmente por supuesto que cada una de estas unidades es distinta de cualquier otra. Si fuera necesario, yo las señalaría así:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.$$

Ciertamente se requiere señalarlas de modo diferente si son distintas; de lo contrario resultaría la más grande confusión. Si simplemente las diversas posiciones en las que aparecen los unos pudieran significar diversidad, debería establecerse esto como regla sin excepción, ya que de lo contrario jamás se sabría si $1 + 1$ significa 2 o 1. De esta suerte, se debería rechazar la igualdad $1 = 1$ y nunca podríamos señalar la misma cosa dos veces. Claramente, lo anterior no es aceptable. Pero si a diferentes cosas se dan diferentes símbolos, difícilmente se comprende por qué se conserva un componente común, y en lugar de:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1''''',$$

simplemente se escribe:

$$a + b + c + d + e.$$

La igualdad se ha abandonado por inservible, y señalar que hay una cierta semejanza de nada sirve. Así, el uno se nos escapa de las manos; nos quedamos con los objetos y todas sus características. Estos símbolos:

$$1', 1'', 1'''$$

son la expresión palpable de nuestra perplejidad: hemos necesitado la igualdad, por tanto, el 1; hemos necesitado la diversidad, por tanto, los índices, los que por desgracia deshacen de nuevo la igualdad.

§ 37. En otros autores nos tropezamos con la misma dificultad. Locke dice:[67]

> Repitiendo... la idea de la unidad y juntándola a otra unidad, es como hacemos una idea colectiva designada por el nombre *dos*. Y quien sea capaz de hacer eso, y proseguir añadiendo una unidad a la última idea colectiva que tenga de cualquier número, y de darle un nombre, podrá contar.

[67] Baumann, *op. cit.*, t. I, pp. 409-411. [*Ensayo sobre el entendimiento humano*, libro II, cap. XVI, § 5.]

Leibniz[68] define al número como 1 y 1 y 1 o como unidades. Hesse dice:[69]

> si uno puede hacerse una representación de la unidad, que en álgebra se expresa con el símbolo 1... puede continuar pensando, con igual derecho, una segunda unidad, y luego otras unidades del mismo tipo. La unión de la segunda con la primera en un todo da el número 2.

En estos pasajes es de atender la relación que se establece entre los significados de las palabras "unidad" y "uno". Leibniz entiende por unidad un concepto bajo el cual caen el uno y el uno y el uno; como también dice: "lo abstracto de uno es la unidad". Locke y Hesse parecen usar unidad y uno con igual significado. En el fondo, esto lo hace también Leibniz, pues a todos los objetos individuales que caen bajo el concepto de unidad los llama uno, designando con esta palabra no a los objetos individuales, sino al concepto bajo el cual todos ellos caen.

§ 38. Para no empeorar la confusión, sería bueno mantener una distinción estrictamente rígida entre uno y unidad. Se dice "el número uno", y con el artículo definido se indica un objeto peculiar, determinado, de la investigación científica. No hay diversos números uno, sino sólo uno. En 1 tenemos un nombre propio que, en cuanto tal, no admite plural de la misma manera que tampoco lo admiten "Federico el Grande" o "el elemento químico oro". No es accidental, y no es un modo inexacto de notación, que se escriba 1, sin adiciones que marquen una diferencia. La igualdad:

$$3 - 2 = 1,$$

Stanley Jevons la reescribiría así:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'.$$

[68] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 3.
[69] *Vier Species* [*Cuatro especies*], p. 2. [Leipzig, 1872.]

Pero, el resultado de:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1'''''),$$

¿cuál sería? En todo caso, no $1'$. De aquí se sigue que, según este modo de entender las cosas, no sólo se darían diversos unos, sino también diversos doses, etc.; pues $1'' + 1'''$ no podría ser sustituido por $1'''' + 1'''''$. Se ve claramente que el número no es una acumulación de cosas. La aritmética se anularía si en lugar del uno, que siempre es el mismo, se quisieran introducir diversas cosas, aunque fuera con símbolos semejantes; que por iguales que fueran no dejarían de ser defectuosos. No se puede suponer que la aspiración más profunda de la aritmética sea una escritura defectuosa. Por tanto, es imposible considerar al 1 como símbolo para cosas distintas, como Islandia, Aldebarán, Solón, etc. Fácilmente se encuentra el sinsentido si se considera el caso de que tenga una ecuación tres raíces, a saber, 2 y 5 y 4. Si por 3 se escribe, siguiendo a Jevons:

$$1' + 1'' + 1'''$$

$1'$, aquí, significaría 2; $1''$, 5; y $1'''$, 4, si por $1'$, $1''$ y $1'''$ serán unidades y, por ende, según Jevons, objetos que se presentan al pensar. Así, ¿no resultaría más inteligible escribir, en lugar de $1' + 1'' + 1'''$:

$$2 + 5 + 4 \quad ?$$

Sólo las palabras para conceptos admiten un plural. Por tanto, si se habla de "unidades", entonces no se puede utilizar esta palabra con igual significado que el nombre propio "uno", sino como una palabra para concepto. Si "unidad" significa "objeto contable", entonces número no se puede definir como unidades. Si por "unidad" se entiende un concepto que acoge bajo de sí al uno y sólo a éste, entonces un plural no tiene sentido alguno, y también, resulta imposible definir al número, con Leibniz, como unidades o como 1 y 1 y 1. Si se usa el "y" como en "Bunsen y Kirchhof", entonces 1 y 1 y 1 no son 3, sino 1, de la misma manera que oro y oro y oro jamás es algo distinto a oro. El símbolo de adición en

$$1 + 1 + 1 = 3$$

tiene que ser entendido, por tanto, como distinto al "y" que usamos cuando simbolizamos una colección, una "idea colectiva".

§ 39. Nos enfrentamos, por tanto, con la siguiente dificultad:

Si queremos dejar que el número surja por resumen de objetos diferentes, entonces obtenemos un agregado en el que están contenidos los objetos precisamente con las propiedades con las que se distinguen, y esto no es el número. Si, por otra parte, queremos construir el número de la otra manera, juntando a los idénticos, entonces el resultado confluye perpetuamente en uno, y jamás alcanzamos una pluralidad.

Si con 1 designamos a cada uno de los objetos que se van a contar, entonces cometemos un error, ya que asignamos el mismo símbolo a cosas diferentes. Si proveemos al 1 con índices diferenciadores, entonces sería inservible para la aritmética.

La palabra "unidad" es apropiada por excelencia para encubrir esta dificultad; y ésta es la razón –si bien inconsciente– por la que la preferimos a las palabras "objeto" y "cosa". Por lo pronto, comenzamos por llamar a las cosas que se van a contar unidades, haciendo caso omiso de su diversidad; así, el montón, la colección, la unión, el agregado, o cualquier cosa que se le quiera llamar, se transforman en el concepto de adición aritmética y la palabra de concepto "unidad" se convierte inadvertidamente en el nombre propio "uno". Con ello se tiene, por tanto, la igualdad. Cuando anexo a la letra *u* una *n*, y luego una *d*,* cualquiera puede ver fácilmente que esto no es el número 3. Pero si pongo *u*, *n* y *d* bajo el concepto "unidad" y en lugar de "*u* y *n* y *d*", digo: "una unidad y una unidad y aún una unidad", o "1 y 1 y 1", entonces fácilmente se acepta que esto nos da el número 3. La dificultad se esconde tan bien en la palabra "unidad", que ciertamente poca gente se percata de ella.

Aquí, Mill podría haber censurado con derecho una manipulación artificiosa del lenguaje; pues esto no es el fenómeno externo de un proceso de pensamiento, sino que sólo tiene la

* En el original en alemán, Frege usa estas tres letras que, conjuntadas, forman la palabra "*und*", que se traduce al castellano por la preposición conjuntiva "y". [N. de la c.]

apariencia. Tenemos realmente aquí la impresión de que a las palabras vacías de pensamiento se les añade una cierta fuerza misteriosa si lo que es diferente se hace igual simplemente al llamarlo unidad.

INTENTOS DE SUPERAR LA DIFICULTAD

§ 40. Consideraremos ahora algunas opiniones que se presentan como intentos para superar esta dificultad, aunque tampoco se hayan producido siempre con clara conciencia de propósito.

La primera propuesta es pedir ayuda a una propiedad del espacio y del tiempo. Un punto espacial considerado en sí mismo es absolutamente indistinguible frente a otro, y lo mismo una recta o un plano, o algunos otros cuerpos congruentes, áreas o segmentos respecto de otros, excepto cuando están juntos como elementos en una intuición total. Aquí parece unirse, así, igualdad con indiscernibilidad. Algo semejante vale respecto al tiempo. Por esto, Hobbes[70] cree que no puede pensarse que la igualdad de las unidades surja de otra cosa que de la división del continuo. Thomae dice:[71]

> supóngase un conjunto de individuos o unidades en el espacio y numéreselos sucesivamente, para lo cual es necesario el tiempo, entonces abstráigase lo que se quiera y aún quedará como nota diferencial de las unidades su posición en el espacio y su sucesión en el tiempo.

El primer reparo contra tal interpretación es que entonces lo numerable se limitará a lo espacial y a lo temporal. Ya Leibniz[72] refutó la opinión de los escolásticos acerca de que el número surge de la mera división del continuo y de que no puede ser aplicado a cosas incorpóreas. Baumann[73] acentúa la independencia entre número y tiempo. El concepto de unidad también sería pensable sin el tiempo. Stanley Jevons dice:[74]

[70] Baumann, *op. cit.*, t. I, p. 242.

[71] *Elementare Theorie der analytischen Functionen* [*Teoría elemental de las funciones analíticas*], p. 1.

[72] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 2.

[73] *Op. cit.*, t. II, p. 668.

[74] *The Principles of Science* [*Los principios de la ciencia*], p. 157.

> Tres monedas son tres monedas, ya sea que las contemos sucesivamente o las consideremos simultáneamente. En muchos casos, ni el espacio ni el tiempo son base para la diferencia, sino que interviene sólo la pura cualidad. Podemos diferenciar, por ejemplo, el peso, la inercia y la dureza del oro como tres cualidades, aunque ninguna de éstas está antes o después de la otra en el espacio o en el tiempo. Todo medio de diferenciación puede ser una fuente de pluralidad.

Yo agrego: si los objetos contados realmente no se siguen unos a otros, sino que solamente son contados unos después de otros, entonces el tiempo no puede ser la base de la diferenciación entre ellos, ya que si podemos contarlos unos después de otros, debemos de tener ya criterios diferenciales. El tiempo es sólo un requerimiento psicológico para contar, pero no tiene nada que ver con el concepto de número. Si se representan objetos inespaciales e intemporales por medio de puntos espaciales o temporales, entonces esto quizás puede ser de utilidad para contar; pero fundamentalmente se presupone con esto la aplicabilidad del concepto de número respecto a lo inespacial e intemporal.

§ 41. Pero ¿logramos realmente combinar la discernibilidad y la igualdad si prescindimos de todo criterio diferencial, fuera del espacial y el temporal? ¡No! No nos hemos acercado ni un paso a la solución. Que los objetos sean muy similares o mucho menos similares no afecta para nada el asunto si a final de cuentas tienen que mantenerse separados unos de otros. No se pueden simbolizar aquí los puntos, las líneas individuales, etc., todo ello con el 1, como tampoco puedo llamarlos, para propósitos de la geometría, a todos ellos A; pues tanto aquí como allá es necesario distinguirlos. Sólo considerados en sí mismos, sin atender a sus relaciones espaciales, los puntos en el espacio son iguales unos a otros. Pero si tengo que aprehenderlos juntos, entonces debo considerarlos según su colocación espacial; de otra manera, irremisiblemente se funden todos en uno. Quizás los puntos presenten en su totalidad una figura semejante a una constelación o de alguna manera se ordenen en una línea recta, tal vez segmentos iguales, con puntos finales que se tocan, formen un único segmento, o tal vez queden separados unos

con respecto a otros. Las configuraciones que surgen pueden ser totalmente diferentes mientras el número de elementos permanece el mismo. Así, también aquí tendríamos diferentes cincos, seises, etc. También los puntos temporales están separados por intervalos de tiempo cortos o largos, iguales o diferentes. Todas éstas son relaciones que nada tienen que ver con el número en sí. En todas ellas se cuela algo particular, lo cual está muy lejos de la generalidad del número. Incluso un momento aislado tiene algo particular que lo distingue, digamos, de un punto espacial, y de lo cual no aparece nada en el concepto de número.

§ 42. Otra manera de salir de la dificultad consiste en invocar, en lugar del orden espacial y temporal, un concepto más generalizado de serie, pero éste tampoco logra su objetivo; pues el lugar en la serie no puede ser base para diferenciar los objetos, porque éstos deben ser ya de algún modo diferentes para poder estar ordenados en una serie. Cualquier ordenación presupone siempre relaciones entre los objetos, sean éstas espaciales, o temporales, o lógicas, de intervalos de tono o de alguna otra clase, que sirve para conducirnos de un objeto a otro, y las cuales están necesariamente unidas a su diferenciación.

Cuando Hankel[75] nos conmina a pensar o poner un objeto 1 vez, 2 veces, 3 veces, parece también ser esto un intento de combinar en las cosas que se van a numerar la discernibilidad y la igualdad. Pero también se ve en seguida que esto no resulta; pues estas representaciones o intuiciones del mismo objeto tienen que ser de algún modo distintas para que no se fundan en una. También creo que uno tiene derecho a pensar en 45 millones de alemanes sin tener que pensar o poner previamente 45 millones de veces un alemán promedio; lo cual podría resultar algo tedioso.

§ 43. Probablemente para evitar las dificultades que surgen con la propuesta de Stanley Jevons, de hacer que cada símbolo 1 signifique uno de los objetos contados, E. Schröder sólo permite

[75] *Theorie der complexen Zahlensysteme* [*Teoría de sistemas numéricos complejos*], p. 1.

hacer una figura del objeto. El resultado es que Schröder sólo define el numeral pero no el número. Él mismo dice:[76]

> Para obtener un símbolo que sea capaz de expresar *cuántas* de tales unidades[77] están presentes, se dirige la atención a la serie deteniéndose *cada vez* en cada una de las unidades y figurándolas mediante una raya: 1 (*un uno*); y se pone a estos unos en un renglón, uno junto a otro, aunque se les enlaza entre sí por medio del símbolo + (más), ya que de otra manera 111, por ejemplo, de acuerdo con la notación numérica usual, se leería como ciento once. De esta manera, se obtiene un símbolo como:
>
> $$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$
>
> cuya composición se puede describir diciendo:
>
> *"un número natural es una suma de unos"*.

Por lo anterior se ve que, para Schröder, el número es un *símbolo*. Lo expresado por medio de este símbolo, esto es, lo que hasta aquí he llamado número, Schröder lo da por conocido con las palabras "cuántas de tales unidades están presentes". Igualmente, por la palabra "uno", él entiende el símbolo 1, no su significado. El símbolo +, únicamente le sirve como medio externo de enlace, sin contenido propio; sólo después define la adición. Más brevemente, bien se podría haber dicho: se escriben, unos junto a otros, tantos símbolos 1, cuantos objetos haya que contar, y se los enlaza por medio del símbolo +. El cero, según esto, se expresaría no escribiendo nada.

§ 44. Para no introducir los rasgos diferenciadores de las cosas en el número, Stanley Jevons dice:[78]

> ahora tendremos poca dificultad para formar una noción clara de la naturaleza de la abstracción numérica. Ésta consiste en abstraer el carácter de la diferencia de la cual surge la pluralidad, reteniendo solamente el hecho. Cuando hablo de *tres hombres*, no necesito especificar inmediatamente las características por las

[76] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* [*Curso de aritmética y álgebra*], pp. 5 y ss.

[77] Objetos por numerar.

[78] *Op. cit.*, p. 158.

que cada uno se puede distinguir de los demás. Éstas tienen que existir si son realmente tres hombres y no uno y el mismo, y al hablar de ellos como varios estoy implicando la existencia de las diferencias requeridas. El número abstracto, así, es *la forma vacía de la diferencia*.

¿Cómo se ha de entender esto? Se puede hacer abstracción de las propiedades diferenciadoras de las cosas, antes de unirlas en un todo; o se puede formar primero un todo y después hacer abstracción de la naturaleza de las propiedades diferenciadoras. Por el primer camino, jamás se llegaría a la diferenciación de las cosas, ni tampoco se retendría el hecho de que existen diferencias; el segundo camino es el que parece proponer Jevons. Pero yo no creo que, de esta manera, pudiéramos obtener el número 10 000, porque no estamos en posición de aprehender al mismo tiempo tantas diferencias y de retenerlas de modo presente; y si tenemos que recorrerlas una por una, entonces jamás se tendría el número completo. Ciertamente contamos en el tiempo; pero con ello no obtenemos el número, sino que sólo determinamos el número de lo que estamos contando. Por lo demás, indicar el modo de abstraer no constituye definición alguna.

¿Qué se debe entender por "la forma vacía de la diferencia"? ¿Quizás una proposición como

"*a* es diferente de *b*",

en la que *a* y *b* permanecen indeterminadas? ¿Esta proposición sería, digamos, el número 2? ¿La proposición

"la Tierra tiene dos polos"

significa lo mismo que

"el polo Norte es diferente del polo Sur"?

Obviamente, no. La segunda proposición podría existir sin la primera, y ésta sin aquélla. Para el número 1 000 tendríamos, entonces,

$$\frac{1000\ .\ 999}{1\ .\ 2},$$

proposiciones que expresan, cada una de ellas, una diferencia.

Lo que dice Jevons no se acomoda de manera especial al 0 y al 1. ¿De qué podría hacerse abstracción para llegar propiamente, por ejemplo, de la Luna al número 1? Ciertamente por abstracción obtenemos ciertos conceptos: satélite de la Tierra, satélite de un planeta, cuerpo celeste sin luz propia, cuerpo celeste, cuerpo, objeto; pero en esta serie no se encontrará al 1, ya que no es concepto alguno bajo el que pudiera caer la Luna. En el caso del 0, ni siquiera tenemos un objeto del cual pudiera salir por abstracción. Y no es una buena objeción decir que 0 y 1 no serían número en el mismo sentido que 2 y 3. El número contesta a la pregunta ¿cuántos? Y cuando se pregunta, por ejemplo, ¿cuántas lunas tiene este planeta?, por igual se puede concebir la respuesta: 0, 1, 2 o 3, sin cambiar el sentido de la pregunta. Ciertamente, el número 0 tiene algo especial e igualmente lo tiene el 1, pero en el fondo esto vale para todo número entero; sólo que entre más grande es el número, esto es menos patente. Es totalmente arbitrario hacer aquí una diferencia de clase. Lo que no convenga para el 0 y el 1, no puede ser esencial al concepto de número.

Finalmente, al suponer este modo de surgimiento del número no se superará la dificultad con que hemos tropezado al considerar la simbolización de 5 mediante

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.$$

Esta notación es buena de acuerdo con lo que dice Jevons acerca de la formación de los números por abstracción: las tildes superiores significan, a saber, que una diferencia está presente sin indicar, no obstante, su clase. Pero la mera existencia de la diferencia es suficiente, como ya vimos, para producir en la teoría de Jevons diferentes unos, doses, treses, lo cual es absolutamente incompatible con la existencia de la aritmética.

SOLUCIÓN DE LA DIFICULTAD

§ 45. Repasemos lo establecido por nosotros hasta ahora, y las preguntas que aún quedan sin contestar.

El número no se abstrae de las cosas a la manera del color, el peso, la dureza; en este sentido, no es una propiedad de las

cosas. Sin embargo, aún queda la cuestión de que decimos algo al hacer oraciones de números.

El número no es algo físico, pero tampoco algo subjetivo, no es representación alguna.

El número no surge por añadir una cosa a otra. Nada cambia tampoco el dar un nuevo nombre a cada añadido.

Las expresiones "multiplicidad", "conjunto", "pluralidad", a causa de su indeterminación, son inapropiadas para la definición del número.

Con relación al uno y a la unidad, aún queda la cuestión de cómo limitar la arbitrariedad de los puntos de vista, la cual amenaza con desdibujar la distinción entre uno y muchos.

Estar aislado, ser indiviso, ser incapaz de separación, no pueden servir como criterios útiles para lo que expresamos con la palabra "uno".

Si a las cosas que han de contarse se las llama unidades, entonces resulta falsa la afirmación incondicionada de que las unidades son iguales. Que son iguales en un cierto aspecto, ciertamente es correcto, pero carece de interés. Incluso, la diversidad de las cosas por contar es necesaria si el número ha de ser mayor que 1.

De esta suerte, parece que a las unidades les debemos adscribir dos propiedades contradictorias: la igualdad y la discernibilidad.

Hay que hacer una distinción entre uno y unidad. La palabra "uno" es, como nombre propio de un objeto de la investigación matemática, incapaz de admitir plural. Igualmente, es un sinsentido pensar que los números surgen poniendo juntos suficientes unos. El símbolo de suma en $1 + 1 = 2$ no puede significar ese poner juntos.

§ 46. Para arrojar luz sobre esta situación, sería bueno considerar el número en conexión con un juicio en el que apareciera su modo originario de aplicación. Si al examinar uno y el mismo fenómeno externo puedo decir con igual verdad: "éste es un grupo de árboles" y "éstos son cinco árboles", o "aquí están cinco compañías" y "aquí están 500 hombres", con ello no se altera ni el individuo ni el todo –el agregado–, sino el nombre que le doy. Pero esto es sólo un indicio de que un concepto ha

sido sustituido por otro. Con esto se sugiere, como respuesta a la primera pregunta del parágrafo anterior, que el contenido de una oración de número es una afirmación sobre un concepto: Quizás esto es más claro con respecto al número 0. Cuando digo: "Venus tiene 0 lunas", entonces no hay ahí luna alguna, o agregado de lunas de las que pueda decirse algo; pero, con ello, al concepto "luna venusina" se le ha atribuido una propiedad, a saber, la de que no cae nada bajo él. Cuando digo: "el carruaje del emperador es tirado por cuatro caballos", adscribo el número cuatro al concepto "caballo que tira el carruaje del emperador".

Se puede objetar, por ejemplo, que un concepto como "habitante de Alemania", aun cuando sus notas permanezcan sin cambio, podría tener una propiedad que cambiara año con año si las oraciones que hablan de su número así lo hicieran. Contra ello se puede hacer valer el que también los objetos pueden cambiar sus propiedades, lo cual no impide seguir reconociéndolos como los mismos. La razón de esto puede ser explicada más precisamente aquí. El concepto "habitante de Alemania" contiene una referencia al tiempo, a saber, como componente variable o, para expresarme matemáticamente, es una función del tiempo. En lugar de "*a* es un habitante de Alemania", se puede decir: "*a* habita en Alemania", y esto se refiere al preciso punto temporal presente. Así, ya en el concepto mismo hay algo cambiante. Por el contrario, al concepto "habitante de Alemania en el año nuevo de 1883, tiempo de Berlín", corresponde, para toda la eternidad, el mismo número.

§ 47. Que una declaración que mencione números exprese algo fáctico independiente de nuestro punto de vista, sólo puede asombrar a quienes tienen al concepto como algo subjetivo semejante a las representaciones. Pero esta concepción es falsa. Si, por ejemplo, subordinamos el concepto de cuerpo bajo el concepto de pesado o el de ballena bajo el de mamífero, afirmamos con ello algo objetivo. Pero si los conceptos fueran subjetivos, también la subordinación de unos bajo otros, como relación entre ellos, sería algo subjetivo a la manera como se relacionan las representaciones. Ciertamente, a primera vista la oración

"Todas las ballenas son mamíferos"

parece tratar de animales, no de conceptos; pero si se pregunta de qué animales se habla, no se puede mostrar ninguno en particular. Suponiendo que se encontrara una ballena delante de uno, nuestra oración nada afirma de ella. No se podría inferir de la proposición que el animal que está delante sea un mamífero sin agregar la proposición de que es una ballena, cosa que nuestra proposición no implica. En general, es imposible hablar de un objeto sin designarlo o nombrarlo. Pero la palabra "ballena" no nombra ningún ser individual. Si se replica que ciertamente no se habla de un objeto individual, determinado, sino de uno indeterminado, entonces creo que "objeto indeterminado" es sólo otra expresión para "concepto" y, sin duda, pobre, en sí misma contradictoria. De todos modos, si nuestra proposición sólo pudiera justificarse por medio de la observación de animales individuales, esto nada probaría respecto a su contenido; para la pregunta ¿de qué trata?, es indiferente el que sea verdadera o no, o qué razones tengamos para sostenerla como verdadera. De esta manera, si el concepto es algo objetivo, entonces una afirmación acerca de él puede contener también algo fáctico.

§ 48. La apariencia surgida de algunos ejemplos anteriores, de que a la misma cosa corresponderían números distintos, se aclara por cuanto que ahí se tomó a los objetos como portadores del número. Tan pronto como instalamos en su derecho al verdadero portador, el concepto, los números se muestran tan mutuamente excluyentes en su propio campo, como los colores en el suyo.

Vemos también ahora por qué se tiende a querer obtener el número por abstracción de las cosas. Lo que con ello se obtiene es el concepto en que se descubre al número. De hecho, frecuentemente la abstracción precede a la formación de un juicio de número. La confusión es análoga a mantener que el concepto de riesgo de fuego se obtiene cuando se construye la estructura de una casa con vigas de madera, pórtico de tablas, techo de paja, cuyas chimeneas tienen agujeros.

El concepto tiene un poder de compilar que supera en mucho al poder unificador de la apercepción sintética. Por medio de esta última no sería posible reunir en un todo a los habitantes de Alemania; pero bien se los puede poner bajo el concepto de "habitante de Alemania" y contarlos.

Ahora se explica la gran aplicabilidad del número. De hecho, resultaría problemático que un mismo predicado se dijese de fenómenos externos e internos, de lo espacial y lo temporal y de lo no espacial y no temporal. Pero esto, simplemente, no ocurre con las oraciones de número como tampoco ocurre en ninguna parte; los números sólo se asignan a los conceptos bajo los cuales se pone lo externo y lo interno, lo espacial y lo temporal, lo no espacial y lo no temporal.

§ 49. En Spinoza[79] encontramos una corroboración para nuestro punto de vista, cuando dice:

> respondo que una cosa sólo respecto a su existencia, pero no a su esencia, puede ser llamada una o única; ya que sólo nos representamos las cosas por medio de números una vez que las hemos puesto bajo un género común. Así, quien tiene en la mano un tálero y un sestercio no concebirá el número dos a menos que cubra ese tálero y ese sestercio con uno y el mismo nombre, por ejemplo, moneda: después puede afirmar que tiene dos monedas, puesto que con el nombre moneda no sólo designa al sestercio, sino también al tálero.

Pero cuando prosigue: "por esto, es claro que una cosa es llamada una o única sólo después de que se haya representado otra cosa que, como se ha dicho, concuerde con aquella", y opina que, en sentido propio, no se podría llamar a Dios uno o único porque no se podría formar ningún concepto abstracto de su esencia, entonces cae en el error de creer que el concepto sólo puede obtenerse directamente por medio de la abstracción de varios objetos. Por el contrario, se puede llegar al concepto a partir de las características y, por tanto, es posible que ninguna cosa caiga bajo él. Si esto no fuese así, jamás se podría negar la existencia y, con ello, la afirmación de la existencia perdería también su contenido.

[79] Baumann, *op. cit.*, t. I, p. 169.

§ 50. E. Schröder[80] subraya que si se pudiera hablar de la frecuencia de una cosa, el nombre de esa cosa siempre sería un *nombre genérico*, un término conceptual general (*notio communis*):

> tan pronto como un objeto es considerado en su totalidad –con todas sus propiedades y relaciones–, él mismo se presentará como único en el mundo y no tendrá nada igual a él. El nombre del objeto toma entonces el carácter de un *nombre propio* (*nomen proprium*) y el objeto mismo no puede ser pensado como algo que ocurra repetidamente. Pero esto no vale sólo respecto a objetos *concretos*, en general vale respecto a cualquier cosa, aunque su representación llegue a tener lugar por medio de *abstracciones*, siempre y cuando esta representación contenga en sí los elementos que basten para hacer una plena determinación de la cosa de que se trate. Esto último (convertirse en objeto de enumeración), es posible primero en cuanto se *abstraiga* o se prescinda en una cosa de algunas relaciones y notas características por las que se distingue de otras cosas; con ello, lo que antes era el nombre de la cosa se torna concepto aplicable a más cosas.

§ 51. Lo que hay de verdad en esta exposición está envuelto con expresiones obtusas y engañadoras, por lo que se impone ofrecer una clarificación y seleccionar lo que en ellas hay de bueno. Para comenzar, es incorrecto llamar nombre de una cosa a un término conceptual general. Esto conduce a la ilusión de que el número es propiedad de una cosa. Un término conceptual general designa justamente un concepto. Sólo con el artículo definido o con un pronombre demostrativo vale como nombre propio de una cosa, pero en ese caso deja de valer como término conceptual. El nombre de una cosa es un nombre propio. Un objeto no aparece repetidamente, sino, por el contrario, más de un objeto cae bajo el mismo concepto. Ya Spinoza señaló que un concepto no sólo se produce por abstracción de las cosas que caen bajo él. Yo añado aquí que un concepto no deja de ser concepto porque bajo él sólo caiga una cosa, la cual se encuentra plenamente determinada por él. A estos conceptos (por ejemplo, satélite de la Tierra), pertenece justamente el

[80] *Op. cit.*, p. 6.

número 1, que es número en el mismo sentido que 2 y 3. En relación con un concepto, la cuestión es siempre si hay alguna cosa, y qué cosa, que caiga bajo él. En relación con un nombre propio tales cuestiones carecen de sentido. Uno no puede dejarse engañar porque el lenguaje emplee un nombre propio, por ejemplo, Luna, como término conceptual, y viceversa; a pesar de ello, sigue existiendo una diferencia. Tan pronto como se usa una palabra con el artículo indefinido, o en plural sin artículo, se ve que es un término conceptual.

§ 52. Una mayor confirmación del punto de vista de que el número se atribuye a los conceptos se encuentra en el uso lingüístico alemán, que permite decir: diez hombre [*zehnmann*], cuatro marco [*vier Mark*], tres tonel [*drei Fass*]. El uso del singular puede indicar aquí que se piensa el concepto, no la cosa. La ventaja de este tipo de expresión resalta especialmente en el caso del número 0. En otros casos, hay que admitir, el lenguaje ciertamente atribuye el número a los objetos, no a los conceptos: se dice "el número de pacas" de la misma manera que "el peso de las pacas". Así, aparentemente se habla de objetos, mientras que en verdad se quiere afirmar algo de un concepto. Este uso lingüístico da pie a confusiones. La expresión "cuatro caballos de raza", da la ilusión de que "cuatro" determina al concepto "caballo de raza", como "de raza" determina al concepto "caballo". Sin embargo, sólo "de raza" es una característica de este tipo; con la palabra "cuatro" predicamos algo de un concepto.

§ 53. Por propiedades que son afirmadas de un concepto, no entiendo naturalmente las características que componen al concepto. Éstas son propiedades de las cosas que caen bajo el concepto, no propiedades del concepto. Así, "rectangular" no es una propiedad del concepto "triángulo rectangular"; pero la proposición de que no hay ningún triángulo rectangular, rectilíneo y equilátero, expresa una propiedad del concepto "triángulo rectangular, rectilíneo y equilátero"; a éste le atribuye el número cero.

En este respecto, la existencia tiene semejanza con el número. En efecto, la afirmación de la existencia no es otra cosa

que la negación del número cero. Porque la existencia es una propiedad del concepto, la prueba ontológica de la existencia de Dios no logra su propósito. Pero de la misma manera que la existencia no es una característica del concepto "Dios", tampoco lo es la unicidad. La unicidad no puede ser usada en la definición de este concepto, como tampoco pueden la solidez de una casa, la amplitud, la habitabilidad, ser usadas al construirla junto con las piedras, el mortero y las vigas. Sin embargo, no se puede concluir en general de esto que si algo es propiedad de un concepto no se pueda deducir del concepto, esto es, de sus características. En ciertas circunstancias esto es posible; como cuando, eventualmente, del tipo de piedra utilizada se puede inferir la durabilidad de una construcción. Sería excesivo afirmar que jamás se puede inferir la unicidad o la existencia a partir de las características de un concepto; lo que es cierto es que esto nunca puede suceder de manera tan directa, como sucede en el caso de asignar una característica de un concepto como propiedad a un objeto que caiga bajo él.

También sería falso afirmar que la existencia y la unicidad jamás podrían ser características de un concepto. Sólo que no son características de los conceptos a los que el lenguaje podría inclinarnos a atribuirlas. Por ejemplo, si bajo un concepto se reúne a todos los conceptos bajo los cuales sólo cae un objeto, entonces la unicidad es característica de ese concepto. Bajo éste caería, por ejemplo, el concepto "luna de la Tierra", pero no el cuerpo celeste que llamamos con este nombre. De esta manera, se puede hacer caer un concepto bajo otro superior o, por así decirlo, bajo un concepto de segundo orden. Pero esta relación no habrá de confundirse con la de subordinación.

§ 54. Ahora será posible definir satisfactoriamente la unidad. E. Schröder dice en la página 7 de su mencionado libro de texto: "Ese nombre genérico o concepto será llamado la denominación del número formado según el método ofrecido, y constituye la esencia de su unidad."

De hecho, ¿no sería más adecuado llamar a un concepto la unidad relativamente al número que le pertenece? En este caso podemos dotar de sentido las afirmaciones sobre la unidad, sobre que está aislada de lo circundante y que es indivisible, pues

el concepto al que se asigna el número de modo determinado en general aísla lo que cae bajo él. El concepto "letras en la palabra número", aísla la *n* de la *u*, a ésta de la *m*, etc. El concepto "sílabas en la palabra número" destaca la palabra como un todo y como indivisible en el sentido de que ninguna de sus partes cae ya bajo el mismo concepto. No todos los conceptos tienen esta cualidad. Por ejemplo, podemos dividir de múltiples maneras algo que caiga bajo el concepto "rojo", sin que las partes dejen de caer bajo el concepto "rojo". A un concepto así no corresponde número alguno finito. La proposición que afirma que las unidades están aisladas y son indivisibles puede expresarse como:

Unidad relativa a un número finito sólo puede serlo un concepto que aísle lo que cae bajo él de manera determinada y que no permita ninguna división arbitraria en partes.

Pero aquí se ve que indivisibilidad tiene un significado especial.

Ahora contestamos fácilmente a la pregunta de cómo se reconcilian la igualdad y la discernibilidad de las unidades. La palabra "unidad" se usa aquí en un doble sentido. Las unidades son idénticas si la palabra tiene el significado anteriormente expuesto. En la proposición: "Júpiter tiene cuatro lunas", la unidad es "luna de Júpiter". Bajo este concepto cae tanto la I como la II, tanto la III como la IV. Por tanto, se puede decir: la unidad a la que pertenece I, es igual a la unidad a la que pertenece II, etc. Ahí tenemos la igualdad. Pero si se afirma la discernibilidad de las unidades, por ella ha de entenderse las cosas numeradas.

IV. EL CONCEPTO DE NÚMERO

CADA NÚMERO INDIVIDUAL ES UN OBJETO INDEPENDIENTE

§ 55. Una vez que sabemos que una oración de número es una predicación acerca de un concepto, podemos intentar completar la definición leibniziana de los números individuales por medio de las definiciones del 0 y del 1.

Resulta tentador definir 0, diciendo: a un concepto le corresponde el número 0 cuando ningún objeto cae bajo él. Pero aquí parece ser que en lugar del 0 ponemos el equivalente "ningún"; por tanto, es de preferir la siguiente formulación: a un concepto le corresponde el número 0 cuando la proposición de que *a* no cae bajo ese concepto es verdadera universalmente, sea lo que fuere *a*.

De manera similar se podría decir: el número 1 corresponde a un concepto *F* si la proposición de que *a* no cae bajo *F* no es verdadera universalmente, sea lo que fuere *a*, y si de las proposiciones "*a* cae bajo *F*" y "*b* cae bajo *F*" se sigue universalmente que *a* y *b* son lo mismo.

Aún queda por definir en general el paso de un número al que le sigue. Intentemos la siguiente formulación: el número $(n + 1)$ le corresponde al concepto *F* si hay un objeto *a* que cae bajo *F*, y es tal que el número *n* corresponde al concepto "cae bajo *F*, pero no *a*".

§ 56. Estas definiciones, según los resultados alcanzados hasta aquí, se ofrecen tan espontáneamente que se impone una explicación de por qué no pueden satisfacernos.

Primeramente, la última definición suscita reparos; pues, tomado estrictamente, el sentido de la expresión "el número *n* corresponde al concepto *G*" nos es tan desconocido como el de la expresión "el número $(n + l)$ corresponde al concepto *F*". Ciertamente por medio de ésta y de la penúltima definiciones podemos decir lo que significa

"El número 1 + 1 corresponde al concepto *F*",

y luego, usando esto, indicar el sentido de la expresión:

"El número 1 + 1 + 1 corresponde al concepto *F*",

etc.; pero por medio de nuestras definiciones, jamás podríamos decir –para poner un ejemplo burdo– si a un concepto corresponde el número Julio César, o si este conocido conquistador de las Galias es un número o no lo es. Aún más, tampoco podríamos probar con ayuda de las definiciones sugeridas que si el número *a* corresponde al concepto *F* y el número *b* corresponde al mismo concepto, entonces tiene que ser el caso que

$a = b$. La expresión "el número que corresponde al concepto *F*" no se justificaría y, por tanto, sería imposible probar una igualdad numérica, ya que no seríamos capaces de captar un número determinado. Es sólo una ilusión que hayamos definido el 0 y el 1; en verdad, hemos asegurado el sentido de

"el número 0 corresponde a"
"el número 1 corresponde a";

pero esto no permite ver al 0 y al 1 como objetos independientes, susceptibles de ser reconocidos, cada uno, como el mismo.

§ 57. Es aquí el lugar para poner más estrictamente en claro nuestra expresión de que una asignación de número contiene una predicación acerca de un concepto. En la proposición "el número 0 corresponde al concepto *F*", 0 es sólo una parte del predicado, si consideramos al concepto *F* como el sujeto real. Por eso he evitado llamar a un número como 0, 1, 2, *propiedad* de un concepto. El número individual, precisamente porque constituye sólo una parte de la predicación, aparece como objeto independiente. Anteriormente, he subrayado el hecho de que decimos "el 1" y que el artículo definido sirve para ponerlo como objeto. Esta independencia aparece en general en la aritmética, por ejemplo, en la igualdad $1 + 1 = 2$. Lo que nos interesa aquí es llegar a un concepto de número que sirva para la ciencia, no nos debe preocupar que en el uso lingüístico cotidiano el número aparezca también en construcciones atributivas. Esto siempre se puede evitar. Por ejemplo, la proposición "Júpiter tiene cuatro lunas" se puede transformar en "el número de las lunas de Júpiter es cuatro". Aquí, la palabra "es" no debe ser considerada como mera cópula, tal como en la oración "el cielo es azul". Esto se pone de manifiesto en que se puede decir: "el número de las lunas de Júpiter es cuatro, o es el número 4". Aquí, la palabra "es" tiene el sentido de "es idéntico a", "es lo mismo que". Así, tenemos una igualdad que afirma que la expresión "el número de las lunas de Júpiter" designa el mismo objeto que la palabra "cuatro". Y la forma de la igualdad es la predominante en la aritmética. No es objeción a esta consideración que la palabra "cuatro" no contenga cosa alguna de Júpiter o de las lunas. Tampoco en el nombre "Co-

lón" hay nada acerca de descubrimientos ni de América y, sin embargo, un mismo hombre es llamado Colón y el descubridor de América.

§ 58. Se podría objetar que no podemos tener representación alguna[81] de los objetos que llamamos cuatro o número de las lunas de Júpiter como algo independiente. Pero la independencia que hemos atribuido al número no tiene la culpa de esto. Ciertamente, con facilidad se cree que en la representación de los cuatro puntos de un dado hay algo que corresponde a la palabra "cuatro"; pero esto es una ilusión. Piénsese en un prado verde e inténtese ver si cambia la representación cuando sustituimos el artículo indefinido por el numeral "uno".* Nada se añade: mientras que, por el contrario, a la palabra "verde" corresponde algo en la representación. Si uno se representa impresa la palabra "oro", por lo pronto no pensará en número alguno en relación con ella. Pregúntese ahora de cuántas letras consta; el número 3 es el que resulta; pero la representación, por su parte, no se vuelve más determinada, sino que puede permanecer sin ninguna alteración. En el concepto que se adiciona, "letras de la palabra oro", es justamente donde descubrimos el número. En el caso de los cuatro puntos de un dado la cosa es algo más oscura, en virtud de que el concepto, dada la similaridad de los puntos, se nos impone tan de inmediato que escasamente notamos su intervención. El número no se puede representar como objeto independiente, ni como propiedad en una cosa externa, ya que ni es algo sensible ni es propiedad de una cosa externa. En el caso del número 0, la situación es clarísima. En vano intentará uno representarse 0 estrellas visibles. Desde luego, se puede pensar en un cielo completamente cubierto de nubes: pero en esto nada hay que corresponda a la palabra "estrella" o al 0. Sólo se representa una situación que puede originar el juicio: ahora no se ve ninguna estrella.

[81] "Representación" tomada en el sentido de algo figurativo.

* En castellano, no es una construcción gramaticalmente correcta "uno prado verde", pero se entiende por el contexto lo que Frege quiere indicar en el texto. (N. del t.)

§ 59. Quizás toda palabra provoca alguna representación en nosotros, incluso una palabra como "solamente"; pero la representación no necesita corresponder al contenido de la palabra; puede ser totalmente diferente en diferentes personas. Podemos representar una situación que traiga a la mente una proposición en la cual ocurra la palabra; o tal vez la palabra hablada evoque en la memoria a la escrita.

Esto no sólo tiene lugar en el caso de las partículas. No cabe duda que no tenemos representación alguna de la distancia que nos aleja del Sol. Pues si bien conocemos la regla según la cual debemos multiplicar tantas veces como sea necesario una medida de longitud, no obstante, fracasa todo intento de trazarnos, por medio de esta regla, una imagen que nos acercara a lo que queremos, aunque fuera aproximadamente. Esto no es razón para dudar de la corrección de nuestro cálculo de la distancia al Sol, y en modo alguno nos impide basar posteriores inferencias sobre la existencia de esta distancia.

§ 60. Ni siquiera una cosa tan concreta como la Tierra podemos representarla tal como sabemos que es; en lugar de eso, nos conformamos con una esfera de mediano tamaño que nos sirve como símbolo de la Tierra; aunque sabemos que ésta es muy diferente. Si bien nuestra representación muchas veces no coincide con lo que se quiere, no obstante, con gran seguridad hacemos juicios de un objeto como la Tierra, incluso cuando su tamaño no entra en consideración.

Con frecuencia, por medio del pensamiento hemos ido más allá de lo representable, sin perder con ello la base para nuestras inferencias. Si como parece, también es imposible para nosotros los hombres el pensar sin hacernos representaciones, sin embargo, la conexión de éstas con los pensamientos puede ser completamente externa, arbitraria y convencional.

Que sea imposible representar el contenido de una palabra no es razón alguna para negarle a la palabra todo significado o para excluirla del uso. El falso brillo de la idea contraria surge de que, cuando nos preguntamos por el significado de una palabra, la consideramos aisladamente, lo cual nos inclina a aceptar que su significado es una representación. Así, parece que una palabra carece de contenido si falta una imagen interna

que le corresponda. Pero debemos tener siempre a la vista una proposición completa. Sólo en una proposición tienen las palabras un significado. Puede ser que haya una imagen interna, pero ésta no necesita corresponder a los elementos lógicos del juicio. Basta que la proposición, como un todo, tenga sentido; éste confiere también su contenido a las partes.

Esta observación me parece apropiada para arrojar alguna luz sobre más de un concepto difícil, tal como el de lo infinitesimal,[82] y su alcance no se restringe a la matemática.

La independencia, que tomo como una exigencia para el número, no tiene que significar que un numeral designe algo fuera del contexto de una proposición, sino que con ello sólo excluyo su uso como predicado o atributo, con lo cual se cambia en algo su significado.

§ 61. Pero quizás se arguya que si bien la Tierra puede ser propiamente irrepresentable, no obstante es una cosa externa que ocupa un lugar determinado; pero ¿dónde está el número 4? Ni es externo a nosotros ni está en nosotros. Entendido en sentido espacial, esto es correcto. Determinar la ubicación del número 4 carece de todo sentido; pero de ello sólo se sigue que no es objeto espacial alguno, y no que no sea un objeto en absoluto. No todo objeto tiene un lugar. En este sentido, nuestras representaciones[83] tampoco están en nosotros (bajo nuestra piel). Ahí hay células de ganglios, corpúsculos sanguíneos y cosas por el estilo, pero no representaciones. Los predicados espaciales no son aplicables a éstas: una representación no está ni a la derecha ni a la izquierda de otra; entre las representaciones no hay una distancia medible en milímetros. Si aun así decimos que están dentro de nosotros, es porque con ello se las quiere señalar como subjetivas.

Pero si tampoco lo subjetivo tiene una ubicación espacial, ¿cómo es posible que el número 4, que es objetivo, no esté en parte alguna? Ahora bien, yo afirmo que no hay contradicción

[82] El problema no es producir un segmento limitado por dos puntos diferentes cuya distancia fuera *dx*, sino más bien de definir el sentido de una igualdad como

$$df(x) = g(x)\,dx\ .$$

[83] Entendida esta palabra sólo psicológicamente, no psicofísicamente.

alguna en esto. De hecho, ese número es exactamente el mismo para quienquiera que se ocupe de él; pero esto nada tiene que ver con la espacialidad. No toda cosa objetiva tiene una ubicación.

PARA OBTENER EL CONCEPTO DE NÚMERO, SE TIENE QUE FIJAR EL SENTIDO DE UNA IGUALDAD NUMÉRICA

§ 62. ¿Cómo se nos ha de dar un número, si no podemos tener de él ninguna representación ni intuición? Sólo en el contexto de una proposición significan algo las palabras. Por tanto, se tendrá que definir el sentido de una proposición en la que aparezca un numeral. Por el momento, esto concede demasiada libertad a la elección personal. Pero ya hemos asegurado que los numerales han de entenderse como signos de objetos independientes. Y esto basta para darnos una clase de proposiciones que tienen que tener sentido, a saber, el de las proposiciones que expresan que un número se reconoce de nuevo. Si se ha de designar un objeto con el símbolo a, entonces tenemos que tener un criterio que nos permita decidir en todos los casos si b es el mismo que a, aunque no siempre esté en nuestro poder el aplicar este criterio. En nuestro caso debemos definir el sentido de la proposición

> "el número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G";

es decir, tenemos que reproducir el contenido de esta proposición con otros términos, sin utilizar la expresión

> "el número que corresponde al concepto F".

Con esto marcamos un criterio general para la igualdad numérica. Una vez que hemos conseguido un medio para aprehender un número determinado, y para reconocerlo como el mismo, podemos asignarle un numeral como su nombre propio.

§ 63. Ya Hume mencionó tal medio:[84] "Cuando dos números están combinados de tal manera que el uno tiene siempre una

[84] Baumann, *op. cit.*, t. II, p. 565. [*Tratado*, libro I, parte III, secc. I.]

unidad que responde a cada unidad del otro, los declaramos iguales." En nuestros días, esta opinión de que la igualdad numérica puede ser definida en términos de una correlación biunívoca parece haber ganado amplia aceptación entre los matemáticos.[85] Pero, inmediatamente, esto suscita ciertas objeciones lógicas y algunas dificultades que no se deben dejar pasar sin examen.

La relación de igualdad no sólo se da con respecto a los números. De esto parece desprenderse que ella no debe ser definida especialmente para este caso. Se debe pensar que el concepto de igualdad ha de fijarse previamente, y que de esto y del concepto de número se debería deducir si los números son iguales entre sí, sin que para ello se requiera una definición especial de igualdad numérica.

Contra esto hay que señalar que, para nosotros, el concepto de número aún no ha sido fijado, sino que primero ha de determinarse por medio de nuestra definición. Nuestro propósito es construir el contenido de un juicio que pueda tomarse como una igualdad y que en cada lado de esta igualdad haya un número. Tampoco queremos definir la igualdad propiamente para este caso, sino que queremos obtener, por medio del ya conocido concepto de igualdad, lo que ha de ser considerado como igual. Ciertamente, ésta parece ser una clase de definición bastante rara, la cual todavía no ha sido suficientemente atendida por los lógicos; pero unos ejemplos mostrarán que no es algo inaudito.

§ 64. El juicio: "la recta *a* es paralela a la recta *b*", en símbolos:

$$a \,//\, b,$$

puede tomarse como una igualdad. Si hacemos esto, obtenemos el concepto de dirección y decimos: "la dirección de la recta *a* es igual a la dirección de la recta *b*". Así, sustituimos el símbolo // por el más general "=" quitando lo específico

[85] *Cfr.* E. Schröder, *op. cit.*, pp. 7 s.; E. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik. Programm des Friedrichs-Wender'schen Gymnasiums* [*Elementos de la aritmética. Programa del Bachillerato Friedrichs-Wender'schen*], Berlín, 1872, p. 16; G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* [*Fundamentos de una teoría general de multiplicidades*], Leipzig, 1883.

del contenido del primero y distribuyéndolo entre *a* y *b*. Partimos el contenido de un modo diferente del original, y con ello obtenemos un nuevo concepto. Por cierto, con frecuencia se conciben las cosas a la inversa, y muchos autores definen: son rectas paralelas aquéllas cuyas direcciones son iguales. La proposición: "si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí", puede muy bien probarse apelando a la proposición de igualdad que le es análoga. Lástima que con esto el verdadero orden de las cosas se ponga de cabeza. Pues todo lo geométrico debe estar dado ya originariamente en la intuición. Pero ahora pregunto si alguien tiene una intuición de la dirección de una línea recta. Ciertamente la tiene de la recta, pero ¿acaso se distingue, en la intuición de esta recta, su dirección? Difícilmente. El concepto de dirección se descubre sólo por medio de una actividad intelectual que se enlaza a la intuición. En cambio, sí se tiene una representación de las líneas paralelas. La prueba sólo es posible si asumimos subrepticiamente, al usar la palabra "dirección", lo que se va a probar; así, si fuera incorrecta la proposición "si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí", entonces no se podría transformar *a* // *b* en una igualdad.

De manera análoga, del paralelismo de planos se puede obtener un concepto que corresponda al de dirección en el caso de las líneas rectas. Para éste se reserva el nombre de "orientación" [*Stellung*]. De la semejanza geométrica se deriva el concepto de forma; así que, por ejemplo, en lugar de "ambos triángulos son semejantes", se dice "ambos triángulos tienen igual forma", o "la forma de un triángulo es igual a la forma del otro". Así, de la semejanza colineal de las figuras geométricas se puede obtener un concepto, para el que aún no hay nombre.

§ 65. Ahora, por ejemplo, para llegar al concepto de dirección a partir del paralelismo,[86] intentemos la siguiente definición: sea la proposición

"la recta *a* es paralela a la recta *b*"

[86] Para poder expresarme más cómodamente y ser más fácilmente entendido, hablo del paralelismo. Sería fácil trasladar lo esencial de estas discusiones al caso de la igualdad numérica.

de igual significado que

> "la dirección de la recta a es igual a la dirección de la recta b".

Esta definición se aparta un tanto de lo habitual, ya que aparentemente determina la ya conocida relación de igualdad, mientras que en verdad debe introducir la expresión "la dirección de la recta a", que sólo aparece secundariamente. De aquí surge una segunda duda: la de si por usar tal método no podríamos vernos envueltos en contradicción con las conocidas leyes de igualdad. ¿Cuáles son éstas? Se podrían desarrollar a partir del concepto mismo como verdades analíticas. Leibniz la define así:[87]

> "*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva vetitate*"*

Adopto esta definición de la igualdad. Si, como Leibniz, se dice "lo mismo", o si se dice "iguales", resulta irrelevante. Ciertamente, "lo mismo" parece expresar una concordancia de todos los aspectos; "iguales", sólo de este o aquel aspectos; pero se puede adoptar una forma de expresión tal que desaparezca esta distinción; por ejemplo, cuando en lugar de "los segmentos son iguales en longitud", decimos "la longitud de los segmentos es igual" o "la misma", o en lugar de "las superficies son iguales en color", se dice "el color de las superficies es igual". Así hemos utilizado la palabra en los ejemplos anteriores. De hecho, en la sustituibilidad generalizada están contenidas todas las leyes de la igualdad.

Para justificar la definición propuesta para dirección de una recta, debemos mostrar por tanto que

> la dirección de a,

se puede sustituir en todas partes por

> la dirección de b

[87] "Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis", ed. Erdmann, p. 94.

* "Dos cosas son lo mismo si una puede ser sustituida por la otra, sin afectar la verdad." [N. del t.]

si la recta a es paralela a la recta b. Esto se simplifica ya que inicialmente nada se afirma de la dirección de una recta, como no sea su coincidencia con la dirección de una recta. Así, únicamente necesitamos comprobar la sustituibilidad en una igualdad de este tipo, o en contenidos que incluyan tales igualdades como elementos constitutivos.[88] Cualesquiera otras afirmaciones respecto de las direcciones tendrán que ser definidas primero, y para estas definiciones podemos fijar la regla de que ha de admitirse la sustituibilidad de la dirección de una recta por la de cualquier otra paralela a ella.

§ 66. Pero surge aún una tercera objeción en contra de la definición propuesta por nosotros. En la proposición

> "la dirección de a es igual a la dirección de b"

la dirección de a aparece como objeto,[89] y con nuestra definición tenemos un medio para reconocer este objeto en caso de que pudiera aparecer de diferente modo, digamos, como dirección de b. Pero este medio no es suficiente para todos los casos. Por ejemplo, con él no se puede decidir si Inglaterra es lo mismo que la dirección del eje de la Tierra. Que se me perdone si este ejemplo parece carente de sentido. Es natural que nadie confunda a Inglaterra con la dirección del eje terrestre; pero esto no es el mérito de nuestra definición. Ella nada dice acerca de si la proposición

> "la dirección de a es igual a q"

[88] En un juicio hipotético, por ejemplo, una igualdad de direcciones podría ocurrir como condición o como consecuencia.

[89] El artículo definido indica esto. Un concepto es, para mí, un posible predicado de un contenido juzgable singular; objeto, un posible sujeto de un contenido tal. Si en la proposición

> "la dirección del eje del telescopio es igual a la dirección del eje terrestre"

tomamos la dirección del eje del telescopio como sujeto, entonces el predicado es "igual a la dirección del eje terrestre". Esto es un concepto. Pero la dirección del eje terrestre sólo es una parte del predicado; es un objeto, pues también puede convertirse en sujeto.

ha de afirmarse o de negarse, cuando *q* misma no está dada en la forma de "la dirección de *b*". Nos falta el concepto de dirección; si lo tuviéramos, podríamos establecer que si *q* no es una dirección, entonces hay que negar nuestra proposición; y si *q* es una dirección, entonces el que haya de afirmarse o de negarse lo decide nuestra definición original. Ahora parece que hay que definir:

> *q* es una dirección, si hay una recta *b* cuya dirección es *q*.

Pero ahora resulta claro que nos hemos movido en círculo. Para poder aplicar esta definición, necesitaríamos saber ya, en cada caso, si la proposición

> "*q* es igual a la dirección de *b*"

ha de ser afirmada o negada.

§ 67. Si se quiere decir: *q* es una dirección si se introduce por medio de la definición expuesta antes, entonces tomaríamos el modo en que se introdujo el objeto *q* como propiedad del mismo, cosa que no es el caso. La definición de un objeto, en cuanto tal, propiamente nada expresa de él, sino que establece el significado de un símbolo. Después de que esto sucede, la definición se transforma en un juicio que trata del objeto, pero ya no lo introduce, y se coloca en el mismo nivel que otras afirmaciones que hablan de él. Si se elije esta solución, se tendría que presuponer que un objeto únicamente puede darse de una sola manera; pues de lo contrario, de que *q* no fuera introducido por medio de nuestra definición, no se seguiría que no pudiera ser introducido. Todas las igualdades se reducirían a esto: que se reconocería como igual aquello que nos fuese dado de la misma manera. Pero esto es tan evidente y tan estéril que no vale la pena expresarlo. De hecho, de ello no se podría sacar conclusión alguna diferente de los presupuestos. La extensa aplicabilidad de las igualdades y su importancia proviene, más bien, de que se puede reconocer algo como lo mismo, aun cuando sea dado de modos diferentes.

§ 68. Si no podemos obtener un concepto estrictamente delimitado para la dirección, y por las mismas razones tampoco lo

podemos obtener para el número, intentaremos otro camino. Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, entonces la extensión del concepto "recta paralela a la recta *a*" es igual a la extensión del concepto "recta paralela a la recta *b*"; y a la inversa: si las extensiones de los conceptos aludidos son iguales, entonces *a* es paralela a *b*. Por tanto, intentemos definir:

> la dirección de la recta *a* es la extensión del concepto "paralela a la recta *a*";
>
> la forma del triángulo *t* es la extensión del concepto "semejante al triángulo *t*".

Si queremos aplicar esto a nuestro caso, tenemos que poner conceptos en lugar de rectas o de triángulos, y en lugar del paralelismo o de la semejanza, la posibilidad de correlacionar biunívocamente los objetos que caen bajo un concepto con los que caen bajo el otro. Por mor de la brevedad, diré que el concepto *F* es *equinumeroso* con respecto al concepto *G* si hay esta posibilidad; pero tengo que pedir que se considere esta palabra como un modo de simbolización arbitrariamente elegido, cuyo significado no proviene de su etimología, sino de esto que ahora se establece.

Por consiguiente, defino:

> el número que corresponde al concepto *F* es la extensión[90] del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *F*".

§ 69. A primera vista, tal vez es poco evidente que esta definición acierte. Pues, ¿no se piensa bajo la extensión de un con-

[90] Creo que simplemente podría decirse "concepto", en lugar de "extensión del concepto". Pero se objetarían dos cosas:

1. que esto está en contradicción con mi afirmación anterior de que cada número individual es un objeto, lo cual se indicó por medio del artículo definido en expresiones como "el dos" y por la imposibilidad de hablar de unos, doses, etc., en plural, así como por el hecho de que el número constituye sólo una parte del predicado de asignación numérica.

2. que los conceptos podrían tener la misma extensión, sin coincidir.

Soy de la opinión de que ambas objeciones pueden ser superadas; pero llevaría muy lejos emprender esto aquí. Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto.

cepto algo distinto? Lo que por ello se piense resultará claro de las afirmaciones básicas que puedan hacerse sobre las extensiones de conceptos. Éstas son las siguientes:

1. que son iguales,
2. que una es más abarcadora que la otra.

Así, la proposición:

> la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *F*" es igual a la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *G*"

es verdadera si y sólo si también es verdadera la proposición

> "al concepto *F* le corresponde el mismo número que al concepto *G*".

Hay pues, aquí, completo acuerdo.

Ciertamente, no se dice que un número sea más abarcador que otro, en el sentido en que la extensión de un concepto sea más abarcadora que otra; pero tampoco es el caso que

> la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *F*"

sea más abarcadora que

> la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *G*";

sino que si todos los conceptos son equinumerosos con respecto al concepto *G*, también son equinumerosos con respecto al concepto *F*, e inversamente, todos los conceptos que son equinumerosos con respecto al concepto *F*, son equinumerosos con respecto al *G*. Esto de "más abarcador" no debe ser confundido con "mayor que", que aparece en relación con números.

Sin duda, aun es pensable el caso de que la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *F*" fuera más abarcadora o menos abarcadora que la extensión de algún otro concepto que, según nuestra definición, pudiera no ser un número; y no es usual llamar a un número más abarcador o menos abarcador que la extensión de un concepto; pero no

hay ningún impedimento para admitir tal modo de expresión, si alguna vez fuera éste el caso.

COMPLEMENTO Y COMPROBACIÓN DE NUESTRA DEFINICIÓN

§ 70. Las definiciones se prueban por su fecundidad. Aquellas que puedan omitirse sin dejar lagunas en la ejecución de la prueba, tienen que rechazarse como totalmente baladíes.

Por tanto, intentemos ver si las conocidas propiedades de los números se pueden derivar de nuestra definición de número que corresponde al concepto *F*. Nos limitaremos aquí a las más simples.

Para ello, es necesario concebir más rigurosamente la igualdad numérica. La definimos por medio de una correlación biunívoca, y quiero explicar ahora cómo se ha de entender esta expresión, ya que fácilmente podría suponerse que se refiere a algo intuitivo.

Consideremos los siguientes ejemplos. Si un camarero quiere estar seguro de que pone sobre la mesa tantos cuchillos como platos, no necesita contar éstos ni aquéllos, si a la derecha de cada plato coloca un cuchillo, de suerte que cada cuchillo sobre la mesa se encuentra a la derecha de un plato. Los platos y los cuchillos están, en este caso, correlacionados biunívocamente, y esto debido a la igualdad de la relación espacial. Si en la oración

> "*a* está inmediatamente a la derecha de *A*",

pensamos sustituir *a* y *A* por otros objetos cualesquiera, entonces la parte del contenido que permanece sin cambios al hacer esto constituye la esencia de la relación. Generalicemos esto.

Si sustraemos *a* y *b* de un contenido juzgable que trate de un objeto *a* y un objeto *b*, nos quedará un concepto relacional que, por tanto, tendrá que ser doblemente completado. Si en la proposición

> "la Tierra tiene más masa que la Luna",

sustraemos "la Tierra", obtenemos el concepto "tiene más masa que la Luna". Por el contrario, si sustraemos el objeto "la Luna", obtenemos el concepto "tiene menos masa que la Tierra". Si sustraemos ambos a la vez, entonces nos queda un concepto de relación que, por sí solo tiene tan poco sentido como un concepto simple: siempre exige ser completado para constituir un contenido juzgable. Pero esta compleción puede hacerse de diferentes maneras: en lugar de la Tierra y la Luna, puedo poner, digamos, el Sol y la Tierra y justo esto efectúa la sustracción.

Los pares individuales de objetos correlacionados se comportan con respecto al concepto relacional –podría decirse, como sujeto– de un modo análogo a como el objeto individual se comporta con respecto al concepto bajo el cual cae. Sólo que aquí el sujeto es compuesto. A veces, cuando la relación se puede invertir, esto aparece expresado lingüísticamente, como en la oración "Peleo y Tetis fueron los padres de Aquiles".[91] Pero no siempre, por ejemplo, no sería posible reformular la proposición: "la Tierra es mayor que la Luna" de modo que apareciera "la Tierra y la Luna" como sujeto compuesto, porque el "y" indica siempre una cierta equiparación. Pero esto no afecta la cuestión.

El concepto de relación, tanto como el concepto simple, pertenece a la lógica pura. Aquí no entra en consideración el contenido particular de la relación, sino sólo la forma lógica. Y, afírmese lo que se afirme de ésta, su verdad será analítica y conocida *a priori*. Esto vale tanto para los conceptos de relación como para los otros.

Así como

"a cae bajo el concepto F",

es la forma general de un contenido juzgable que trata de un objeto a, también se puede admitir que

"a está en la relación φ con b"

es la forma general del contenido juzgable que trata del objeto a y del objeto b.

[91] No hay que confundir con esto el caso en que la conjunción "y" sólo aparentemente une dos sujetos, cuando en realidad une dos oraciones.

§71. Ahora bien, si todo objeto que cae bajo el concepto F está en la relación φ respecto a un objeto que cae bajo el concepto G, y si todo objeto que cae bajo G está en la relación φ respecto a un objeto que cae bajo F, entonces los objetos que caen bajo F y G están correlacionados entre sí por la relación φ.

Aún se puede preguntar qué significa la expresión

"todo objeto que cae bajo F, está en la relación φ con respecto a un objeto que cae bajo G",

cuando absolutamente ningún objeto cae bajo F. Lo que entiendo por esto es el par de proposiciones:

"a cae bajo F"

y

"a no está en la relación φ con respecto a ningún objeto que cae bajo G"

no pueden existir conjuntamente, sea lo que fuere lo que a designe, así que, o bien la primera o bien la segunda, o bien ambas, son falsas. De aquí que la proposición "todo objeto que cae bajo F, está en la relación φ con respecto a un objeto que cae bajo G" resulta verdadera cuando no hay ningún objeto que caiga bajo F porque, en este caso, la primera proposición

"a cae bajo F"

siempre es falsa, sea lo que fuere que a designe. Igualmente, la proposición

"para todo objeto que cae bajo G, hay un objeto que está en la relación φ que cae bajo F"

significa que ambas proposiciones

"a cae bajo G"

y

"ningún objeto que cae bajo F está en la relación φ con respecto a a"

no pueden sostenerse conjuntamente, sea lo que fuere lo que a designe.

§ 72. Hemos visto, pues, cuando los objetos que caen bajo los conceptos *F* y *G* están correlacionados entre sí por medio de la relación φ. Sólo que aquí esta correlación tiene que ser biunívoca. Por ello entiendo la validez de las siguientes dos proposiciones:

1. si *d* está en la relación φ con *a*, y si *d* está en la relación φ con *e*, entonces resulta en general que, sean lo que fueren *d*, *a* y *e*, *a* es lo mismo que *e*.
2. Si *d* está en la relación φ con *a*, y si *b* está en la relación φ con *a*, entonces resulta en general que, sean lo que fueren *d*, *b* y *a*, *d* es lo mismo que *b*.

Con esto hemos reducido la correlación biunívoca a relaciones lógicas puras y, por tanto, podemos definir:
la expresión

> "el concepto *F* es equinumeroso con respecto al concepto *G*"

significa lo mismo que la expresión:

> "hay una relación φ que correlaciona biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto *F* con los objetos que caen bajo *G*".

Repito:

> "el número que corresponde al concepto *F*, es la extensión del concepto 'equinumeroso con respecto al concepto *F*' ",

y agrego:

la expresión

> "*n* es un número"

significa lo mismo que la expresión

> "hay un concepto tal, que *n* es el número que le corresponde".

De esta manera se define el concepto de número; aunque aparentemente parece definido en términos de sí mismo, con todo no nos hemos equivocado, porque "el número que corresponde al concepto *F*" ya ha sido definida.

§ 73. Inmediatamente queremos mostrar ahora que si el concepto *F* es equinumeroso con respecto al concepto *G*, el número que corresponde al concepto *F* es igual al número que corresponde al concepto *G*. Ciertamente, esto suena como si fuera una tautología, pero no lo es ya que el significado de la palabra "equinumeroso" no proviene de su etimología, sino de la definición que se dio anteriormente.

Según nuestra definición [de "el número que corresponde al concepto *F*"], tenemos que mostrar que si el concepto *F* es equinumeroso con respecto al concepto *G*, entonces la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *F*" es la misma que la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto *G*". En otras palabras: se debe probar que, bajo estas presuposiciones, valen universalmente las proposiciones:

> si el concepto *H* es equinumeroso con respecto al concepto *F*, entonces también es equinumeroso con respecto al concepto *G*,

y

> si el concepto *H* es equinumeroso con respecto al concepto *G*, entonces también es equinumeroso con respecto al concepto *F*.

La primera proposición equivale a decir que hay una relación que correlaciona biunívocamente los objetos que caen bajo el concepto *H* con los que caen bajo el concepto *G*, si hay una relación φ que correlaciona biunívocamente los objetos que caen bajo el concepto *F* con los objetos que caen bajo el concepto *G*, y si hay una relación ψ que correlaciona biunívocamente los objetos que caen bajo el concepto *H* con los objetos que caen bajo el concepto *F*. La siguiente disposición de letras dará una visión sumaria de esto:

$$H \, \psi \, F \, \phi \, G.$$

De hecho, tal relación puede darse: se halla en el contenido del juicio

> "hay un objeto con el que c está en la relación ψ, y que está con b en la relación φ",

si de ahí sustraemos c y b (si los consideramos como los términos de la relación). Se puede mostrar que esta relación es biunívoca, y que correlaciona los objetos que caen bajo el concepto H con los objetos que caen bajo el concepto G.

De manera parecida se puede demostrar también la segunda proposición.[92] Espero que estas indicaciones sean suficientes para reconocer que no necesitamos aceptar ningún fundamento tomado de la intuición, y que algo se puede hacer con nuestras definiciones.

§ 74. Ahora podemos pasar a las definiciones de los números individuales.

Dado que nada cae bajo el concepto "desigual a sí mismo", defino:

> Cero es el número que corresponde al concepto "desigual a sí mismo".

Tal vez se encuentre chocante que hable aquí de un concepto. Quizás se objete que en esto está contenida una contradicción, y tal vez haga recordar a nuestros ya conocidos hierro de madera y círculo cuadrado. Aunque creo que éstos no son tan malos como parecen. Ciertamente no se les puede utilizar; pero tampoco perjudican, siempre y cuando no se presuponga que algo cae bajo ellos; y esto no ocurre por el mero uso de los conceptos. Que un concepto contenga una contradicción no siempre es evidente sin más investigación; pero para investigarlo se requiere primero tenerlo y tratarlo lógicamente como a cualquier otro. Todo lo que se puede exigir de un concepto por parte de la lógica, y para el rigor de la prueba, es una delimitación precisa, tal que para cada objeto esté determinado si

[92] Igualmente a la inversa: si el número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G, entonces el concepto F es equinumeroso con respecto al concepto G.

cae o no cae bajo él. Esta exigencia la satisfacen perfectamente los conceptos que contienen una contradicción, como el de "desigual a sí mismo", pues de todo objeto se sabe que no cae bajo ese concepto.[93]

Utilizo la palabra "concepto" de manera que

> "a cae bajo el concepto F"

es la forma general de un contenido juzgable que trata de un objeto a, y que continúa siendo juzgable sea lo que fuere lo que se ponga en el lugar de a. En este sentido,

> "a cae bajo el concepto 'desigual a sí mismo' "

significa lo mismo que

> "a es desigual a sí mismo"

o que

> "a no es igual a a".

Para la definición del 0 podría haber tomado cualquier otro concepto bajo el cual nada caiga. Pero me interesa elegir uno de tal modo que esto último pueda probarse de él sobre bases puramente lógicas; y, para esto, el más adecuado parece ser "desigual a sí mismo", en donde por "igual" hago valer lo expresado en la definición de Leibniz, antes expuesta, que es puramente lógica.

§ 75. Ahora tiene que ser posible demostrar, por medio de lo establecido anteriormente, que cualquier concepto bajo el

[93] Totalmente diferente de esto es la definición de un objeto a partir de un concepto bajo el cual cae. La expresión "la mayor fracción propia", por ejemplo, no tiene contenido alguno, ya que el artículo definido destaca la pretensión de referirse a un objeto determinado. Por el contrario, el concepto "fracción menor que 1 formada de tal manera que ninguna fracción menor que 1 la supere en magnitud" es irreprochable, y para poder probar que no hay tal fracción, incluso se necesita este concepto, aunque contenga una contradicción. Pero si por medio de este concepto se quisiera definir un objeto que cae bajo él, ciertamente sería necesario mostrar previamente dos cosas:

1. que bajo este concepto cae un objeto;
2. que únicamente un objeto cae bajo él.

Puesto que ya la primera de estas proposiciones es falsa, la expresión "la mayor fracción propia" carece de sentido.

cual nada cae es equinumeroso con respecto a cualquier otro concepto bajo el cual nada cae y solamente es equinumeroso con respecto a un concepto tal, de lo cual se sigue que 0 es el número que corresponde a tal concepto, y que ningún objeto cae bajo un concepto si a éste le corresponde el número 0.

Supongamos que ni bajo el concepto F ni bajo el concepto G cae objeto alguno; para demostrar la equinumerosidad, requerimos una relación φ con respecto a la cual valgan las siguientes proposiciones:

> todo objeto que cae bajo F está en la relación φ con un objeto que cae bajo G; para cada objeto que cae bajo G, hay un objeto que cae bajo F, con el cual está en la relación φ.

Después de lo que hemos dicho antes sobre el significado de estas expresiones, vemos que, según nuestras presuposiciones, cualquier relación cumple estas condiciones, y también la de igualdad, la que, además, es biunívoca, pues para ella valen las dos proposiciones exigidas antes.

Si, por el contrario, un objeto, por ejemplo a, cae bajo G, mientras que ninguno cae bajo F, entonces para toda relación φ se pueden sostener conjuntamente las dos siguientes proposiciones:

> "a cae bajo G"

y

> "ningún objeto que cae bajo F, está en la relación φ con a";

pues la primera es correcta según el primer presupuesto, y la segunda de acuerdo con el segundo. Cuando no hay objeto alguno que caiga bajo F, entonces tampoco hay ninguno que esté en alguna relación con a. Así, según nuestra definición, no existe relación que correlacione los objetos que caen bajo F con los objetos que caen bajo G y, por tanto, los conceptos F y G no son equinumerosos.

§ 76. Ahora definiré la relación en la que se encuentran mutuamente dos miembros adyacentes de la serie de los números naturales. La proposición:

> "hay un concepto F y un objeto x que cae bajo él, de manera que el número que corresponde al concepto F es n, y que el número que corresponde al concepto 'cae bajo F, pero no es igual a x' es m",

significa lo mismo que

> "n sigue en la serie de los números naturales inmediatamente a m".

Evito la expresión "n es *el* número inmediatamente siguiente a m", en virtud de que, para justificar el artículo definido, primero se tendrían que probar dos proposiciones.[94] Por la misma razón, todavía no digo aquí "$n = m + 1$", pues mediante el signo de igualdad se designa también $(m + 1)$ como objeto.

§ 77. Para llegar ahora al número 1, tenemos primeramente que mostrar que hay algo en la serie de los números naturales que sigue inmediatamente a 0.

Consideremos el concepto —o, si se prefiere, el predicado— "igual a 0". Bajo éste cae el 0. Bajo el concepto "igual a 0, pero no igual a 0", por el contrario, no cae objeto alguno, de suerte que 0 es el número que corresponde a este concepto. Por consiguiente, tenemos un concepto "igual a 0" y un objeto 0 que cae bajo él, para los cuales vale lo siguiente:

> el número que corresponde al concepto "igual a 0", es igual al número que corresponde al concepto "igual a 0";
>
> el número que corresponde al concepto "igual a 0, pero no igual a 0", es el 0.

Por tanto, según nuestra definición, el número que corresponde al concepto "igual a 0" sigue inmediatamente a 0 en la serie de los números naturales.

Si ahora definimos:

> 1 es el número que corresponde al concepto "igual a 0"

podemos expresar la última proposición como sigue:

[94] Vése la nota anterior.

1 sigue, en la serie de los números naturales, inmediatamente a 0.

Quizás no resulte superfluo señalar que la definición del 1 no presupone, para su legitimidad objetiva, ningún hecho observado,[95] pues fácilmente se confunde con esto el que tengan que cumplirse ciertas condiciones subjetivas para que sea posible que lleguemos a la definición, y que algunas percepciones sensibles nos den pie para ello.[96]

Sin embargo, todo esto puede ser cierto sin que las proposiciones deducidas dejen de ser *a priori*. A tales condiciones pertenece también, por ejemplo, el que la sangre debe irrigar al cerebro en volumen suficiente y con calidad adecuada –al menos, hasta donde sabemos–, pero la verdad de nuestra última proposición es independiente de esto; la proposición vale, aunque esto no ocurra. Incluso si aconteciera que todos los seres racionales cayeran simultáneamente en un letargo hibernal, la proposición no se anularía durante ese lapso, sino que permanecería inalterada. La verdad de una proposición no radica en su ser pensada.

§ 78. En seguida presento algunas proposiciones que se demuestran por medio de nuestras definiciones. El lector verá fácilmente cómo puede hacerse esto.

1. Si a sigue inmediatamente a 0, en la serie de los números naturales, entonces $a = 1$.
2. Si 1 es el número que corresponde a un concepto, entonces hay un objeto que cae bajo el concepto.
3. Si 1 es el número que corresponde a un concepto F, si el objeto x cae bajo el concepto F, y si y cae bajo el concepto F, entonces $x = y$, esto es, x es lo mismo que y.
4. Si un objeto cae bajo un concepto F, y si de ello se sigue en general que de x cae bajo el concepto F y de y cae bajo el concepto F, se infiere que $x = y$, entonces 1 es el número que corresponde al concepto F.

[95] Proposición no general.
[96] *Cfr.* B. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie* [*Los axiomas de la geometría*], p. 164.

5. La relación de m con n que se establece por medio de la proposición:

   "n sigue inmediatamente a m, en la serie de los números naturales",

   es una relación biunívoca.

Con esto aún no se ha dicho que para cada número existe otro que le sigue inmediatamente, o al cual sigue inmediatamente en la serie de los números naturales.

6. Aparte del 0, en la serie de los números naturales todo número sigue inmediatamente a un número.

§ 79. Ahora, para poder probar que en la serie de los números naturales a cada número (n) le sigue inmediatamente un número, se debe presentar un concepto que corresponda a este último número. Como tal, elegimos éste:

> "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con n",

que primeramente tiene que ser definido.

Repito, ahora, en palabras algo diferentes, la definición de seguirse en una serie, ofrecida en mi *Conceptografía*.

La proposición

> "si todo objeto que está en la relación φ con x cae bajo el concepto F, y si del hecho de que d cae bajo el concepto F, se sigue en general sea lo que fuere d, que todo objeto que está en la relación φ con d, cae bajo el concepto F, entonces y cae bajo el concepto F, sea F el concepto que fuere"

significa lo mismo que

> "y sigue a x en la serie-φ",

y que

> "x precede a y en la serie-φ".

§ 80. Respecto a esto, no resultarán superfluas algunas observaciones. Como la relación φ se ha dejado indeterminada, entonces no es necesario pensar la serie en la forma de una ordenación espacial y temporal, si bien no se excluyen estos casos.

Quizás otra definición se tendría por más natural, por ejemplo: si partiendo de un objeto x se pasa de un objeto a otro, con respecto a los cuales está en la relación φ, y si finalmente de este modo llegamos a y, entonces se dirá que y sigue a x en la serie-φ.

Éste es un modo de investigar la cuestión, no una definición. Si cuando fluctúa nuestra atención llegamos a y, esto puede depender de múltiples circunstancias subjetivas, por ejemplo, del tiempo de que se disponga o de nuestro conocimiento de las cosas. Si en la serie-φ, y sigue a x, esto en general nada tiene que ver con nuestra atención y con las condiciones de su movimiento, sino que es algo fáctico, del mismo modo que es fáctico que una hoja verde refleja ciertos rayos de luz, tanto si éstos van a parar a mis ojos y provoquen una sensación como si no; del mismo modo que es fáctico que un grano de sal es soluble en agua, ya sea que lo ponga en agua y observe el proceso o que no lo haga, y sigue siendo soluble, incluso, si no tengo la posibilidad de realizar un experimento con él.

En virtud de mi definición, la cuestión pasa del terreno de las posibilidades subjetivas al de la determinación objetiva. De hecho: de que de ciertas proposiciones se siga otra es algo objetivo, independiente de las leyes del movimiento de nuestra atención, y lo mismo da si realmente sacamos la conclusión o no. Tenemos aquí un criterio que permite decidir la cuestión siempre que ésta pueda plantearse, aunque también pueda ser que en algunos casos particulares nos veamos impedidos a decidir la cuestión por dificultades externas. Pero esto es irrelevante para la cuestión misma.

No siempre necesitamos recorrer los miembros intermedios de una serie entre el primero y algún otro objeto dado para tener la certeza de que este último sigue a aquél. Si, por ejemplo, en la serie-φ, b sigue a a, y c a b, podemos concluir, según nuestra definición, que c sigue a a, aun sin conocer los miembros intermedios.

Sólo por medio de esta definición de seguirse en una serie es posible reducir a las leyes lógicas generales la inferencia de n a $(n + 1)$, la cual aparentemente es propia de la matemática.

§ 81. Si ahora tenemos como relación φ la que se establece entre m y n por medio de la proposición

> "n sigue inmediatamente a m, en la serie de los números naturales",

entonces, en lugar de "serie-φ", decimos "serie de los números naturales".

Añado las siguientes definiciones:

> "y sigue a x en la serie-φ, o y es lo mismo que x"

significa lo mismo que

> "y pertenece a la serie-φ, que empieza con x"

y que

> "x pertenece a la serie-φ, que termina con y".

Por consiguiente, a pertenece a la serie de los números naturales que termina con n, si n sigue a a en la serie de los números naturales, o bien es igual a a.[97]

§ 82. Ahora hay que demostrar –bajo una condición que aún se tiene que proporcionar– que el número que corresponde al concepto

> "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con n"

sigue inmediatamente a n en la serie de los números naturales. Y así, al demostrar que hay un número que sigue en la serie de los números naturales inmediatamente a n, se probará al mismo tiempo que no existe un último miembro de esta serie. Es evidente que esta proposición no se puede establecer de modo empírico o por medio de la inducción.

Nos llevaría demasiado lejos el realizar aquí la prueba misma. Sólo puedo indicar brevemente sus líneas generales. Hay que probar

[97] Si n no es ningún número, entonces sólo n mismo pertenece a la serie de los números naturales que termina con n. Y que no nos asombre esta expresión.

1. Si en la serie de los números naturales *a* sigue inmediatamente a *d*, y si para *d* vale que:

   el número que corresponde al concepto

   "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *d*",

   sigue en la serie de los números naturales inmediatamente a *d*,

entonces también vale para *a* que:

el número que corresponde al concepto

"perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *a*"

sigue en la serie de los números naturales inmediatamente a *a*.

En segundo lugar, hay que demostrar que para el 0 vale lo que acabamos de afirmar de *d* y de *a* en las proposiciones anteriores, y después hay que deducir que también vale para *n*, si *n* pertenece a la serie de los números naturales que empieza con 0. Esta derivación es una aplicación de la definición que he dado de la expresión

"*y* sigue a *x* en la serie de los números naturales",

tomando como concepto *F* lo afirmado antes de *d* y de *a* conjuntamente, pero sustituyendo a estos por 0 y *n*.

§ 83. Para demostrar la proposición 1 del parágrafo anterior, debemos demostrar que *a* es el número que corresponde al concepto "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *a*, pero que no es igual a *a*". Y para esto hay que probar que este concepto es de igual extensión que el concepto "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *d*". Para esto, se requiere la proposición de que ningún objeto que pertenezca a la serie de los números naturales que comienza con 0 puede seguirse a sí mismo en la serie de los números naturales. Esto, a su vez, tiene que demostrarse, como ya ha sido señalado anteriormente, por medio de nuestra definición de seguirse en una serie.[98]

Para esto, estamos obligados a añadir a la proposición de que el número que corresponde al concepto

"perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *n*"

sigue en la serie de los números naturales inmediatamente a *n*, a condición de que *n* pertenezca a la serie de los números naturales que comienza con 0. Para esto, es utilizable un modo de expresión más breve que defino ahora:

la proposición

"*n* pertenece a la serie de los números naturales que comienza con 0"

significa lo mismo que

"*n* es un número finito".

Entonces, podemos expresar la última proposición así: ningún número finito se sigue a sí mismo en la serie de los números naturales.

NÚMEROS INFINITOS

§ 84. Frente a los números finitos están los infinitos. El número que corresponde al concepto "número finito" es un número infinito. Simbolicémoslo con ∞_1. Si fuera finito, entonces no se podría seguir a sí mismo en la serie de los números naturales. Pero se puede mostrar que ∞_1 hace eso.

En el número ∞_1, así definido, nada hay de misterioso o asombroso. "El número que corresponde al concepto *F* es ∞_1"

[98] E. Schröder, *op. cit.*, p. 63, parece considerar esta proposición como consecuencia de un modo de simbolización que podría concebiblemente ser distinta. También aquí se hace notable el inconveniente, que demerita toda su exposición de esta cuestión, de que uno no sabe realmente si el número es un signo, y si lo es, cuál es entonces su significado, o si justamente es éste su significado. De estipular signos diferentes, de modo que jamás se repita el mismo, no se sigue todavía que esos signos signifiquen cosas diferentes.

significa ni más ni menos que: hay una relación que correlaciona biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto F con los números finitos. Esto, de acuerdo con nuestras definiciones, tiene un sentido de lo más claro e inequívoco; y es suficiente para justificar el uso del símbolo ∞_1 para asegurarle un significado. Que no podamos formarnos ninguna representación de un número infinito carece de importancia; y lo mismo es cierto de los números finitos. De esta manera, nuestro número, ∞_1, es algo tan determinado como cualquier número finito: sin duda, se le puede reconocer de nuevo como el mismo y se le distingue de cualquier otro.

§ 85. En un trabajo notable, G. Cantor recientemente ha introducido los números infinitos.[99] Concuerdo plenamente con él en la valoración que hace de la opinión de que sólo los números finitos deben ser admitidos como reales. Éstos no son sensiblemente perceptibles o espaciales, como tampoco lo son las fracciones, los números negativos, los irracionales y los complejos; y si se llama real a lo que actúa sobre los sentidos o, por lo menos, lo que tiene efectos que pueden dar como consecuencias próximas o remotas percepciones sensibles, entonces, ciertamente, ninguno de estos números es real. Pero tampoco necesitamos de tales percepciones como base para la prueba de nuestros teoremas. Un nombre o un signo que se introduzca lógicamente de modo inobjetable puede ser usado sin temor en nuestras investigaciones, y así nuestro número, ∞_1, está tan justificado como el dos o el tres.

Si bien creo concordar en esto con Cantor, discrepo de él en lo concerniente a la terminología. Él llama "potencia" a mi número, mientras que su concepto de número[100] hace referencia a la ordenación. Los números finitos, ciertamente, son independientes de su orden en la serie, pero esto no ocurre con los transfinitos. En el uso del lenguaje, la palabra "número" y la pregunta "¿cuántos?" no suponen referencia alguna a un orden determinado. El número de Cantor más bien responde a la pregunta: "¿el cuántos es el número final en la sucesión?"

[99] *Op. cit.*, Leipzig, 1883.

[100] Esta expresión puede parecer contradecir la objetividad del concepto, destacada anteriormente; pero lo único subjetivo aquí es la denominación.

Por esto, creo que mi terminología concuerda mejor con el uso corriente del lenguaje. Si el significado de una palabra se amplía, se ha de cuidar tanto como sea posible que las proposiciones generales conserven su validez y, sobre todo, una tan fundamental como la que afirma la independencia del número respecto de su orden en una serie. Nosotros no hemos necesitado ampliación alguna, debido a que nuestro concepto de número engloba también a los números infinitos.

§ 86. Para obtener sus números infinitos, Cantor introduce el concepto relacional de seguir en una sucesión, que difiere de mi concepto de "seguir en una serie". Por ejemplo, según él, se originaría una sucesión si se ordenaran los números enteros positivos finitos de tal manera que los impares se siguieran unos a otros según el orden natural, e igualmente los pares, estipulándose además que todo número par debe seguir después de todo número impar. En esta sucesión, el 0 por ejemplo seguiría después del 13. Pero ningún número precedería inmediatamente a 0. Éste es un caso que no puede ocurrir según la definición que he dado de seguir en la serie. Se puede probar rigurosamente, sin usar ningún axioma de la intuición, que si y sigue a x en la serie-φ, entonces hay un objeto que precede inmediatamente a y en esta serie. Me parece que aún faltan definiciones precisas de seguir en una sucesión y del número cantoriano. Así, Cantor apela a la más bien misteriosa "intuición interna", en donde debería procurar ofrecer una prueba a partir de definiciones, cosa que hubiera sido posible. Creo poder anticipar cómo se definirían cada uno de estos conceptos. En todo caso, por medio de estas indicaciones no intento atacar su justificación ni su fertilidad. Por el contrario, saludo en estas investigaciones como una ampliación de la ciencia, en especial porque han trazado un camino puramente aritmético para llegar a números transfinitos (potenciales).

V. CONCLUSIÓN

§ 87. En este escrito espero haber hecho verosímil el que las leyes de la aritmética sean juicios analíticos y, por consiguiente, *a priori*. Según esto, la aritmética sólo sería una lógica más

avanzada, toda proposición aritmética sería una ley lógica, aunque derivada. Las aplicaciones de la aritmética en las ciencias de la naturaleza serían elaboraciones lógicas de los hechos observados;[101] calcular sería deducir. Las leyes numéricas no requieren, como cree Baumann,[102] una confirmación práctica para ser aplicables en el mundo exterior; pues en el mundo exterior, en la totalidad de lo espacial, no hay conceptos, ni propiedades de los conceptos, ni números. Así, las leyes numéricas propiamente no son aplicables a las cosas externas: no son leyes naturales. Pero son perfectamente aplicables a juicios que valen para las cosas del mundo externo: son leyes de las leyes naturales. No afirman una conexión entre los fenómenos naturales, sino conexiones entre juicios; y a éstos pertenecen también las leyes naturales.

§ 88. Es evidente que Kant[103] ha subestimado –si bien como consecuencia de una conceptuación demasiado estrecha– el valor de los juicios analíticos, aunque parece haber vislumbrado algo del concepto más amplio utilizado aquí.[104] Si se toma su definición como base, la división en juicios analíticos y sintéticos no resulta exhaustiva. Él está pensando en el caso del juicio universal afirmativo; ahí se puede hablar de un concepto de sujeto y preguntar si el concepto del predicado está contenido en él, a consecuencia de su misma definición. Pero, ¿qué pasa si el sujeto es un objeto único?, ¿y si se trata de un juicio existencial? En este sentido, pues, no se puede hablar de un concepto de sujeto en absoluto. Parece que Kant piensa determinar el concepto por medio de características asociadas; pero esta manera de formar los conceptos es una de las menos fructíferas. Si se echa una mirada a la definición que se ofreció antes, nada de este tipo se encontrará. Lo mismo vale también para las definiciones en matemáticas, que son realmente fructíferas como, por ejemplo, la de continuidad de una función. Ahí no

[101] El observar ya encierra en sí una actividad lógica.
[102] *Op. cit.*, t. II, p. 670.
[103] *Op. cit.*, t. III, pp. 39 ss. [A6 ss./B10 ss.]
[104] En la página 43 [B 14], dice que una proposición sintética sólo puede admitirse según el principio de contradicción, sólo cuando está presupuesta otra proposición sintética.

encontramos una serie de características asociadas, sino una conexión más íntima, podríamos decir, orgánica de las determinaciones. Se puede hacer más intuitiva la distinción mediante una imagen geométrica. Si se representan los conceptos (o sus extensiones) por medio de la delimitación de un área en una superficie, entonces al concepto definido por las características asociadas corresponde el área común de todas las áreas de las características; el concepto quedará delimitado por segmentos de los linderos de éstas. Lo que se hace con una definición tal –en relación con la imagen– es usar de una manera nueva las líneas ya dadas para determinar un área.[105] Pero esto no hace aparecer algo esencialmente nuevo. Las conceptualizaciones fructíferas trazan líneas de delimitación que no están dadas con anterioridad. Lo que de esto se pueda inferir no se vislumbra de antemano; en este caso, no se saca simplemente de la caja lo que se había puesto en ella. Las conclusiones obtenidas amplían nuestro conocimiento y, de acuerdo con Kant, deberían ser consideradas como sintéticas; sin embargo, se pueden probar por medios puramente lógicos y, por tanto, son analíticas. Lo cierto es que están contenidas en las definiciones, pero a la manera en que las plantas lo están en las semillas, y no como las vigas lo están en una casa. Con frecuencia, se necesitan varias definiciones para probar alguna proposición que consecuentemente no se halla contenida en ninguna de ellas por separado, y que, sin embargo, se sigue por medios puramente lógicos de todas ellas juntas.

§ 89. También tengo que contradecir la generalidad de la afirmación de Kant:[106] sin la sensibilidad no nos sería dado objeto alguno. El cero, el uno, son objetos que no nos pueden ser dados sensiblemente. Incluso aquellos que tienen por intuibles a los números pequeños, deberían conceder que no les pueden ser dados intuitivamente números mayores que $1000^{1000^{1000}}$, sobre los cuales, sin embargo, sabemos muchas cosas. Quizás Kant usa la palabra "objeto" en un sentido algo diferente; pero, entonces, caen totalmente fuera de su consideración el cero, el uno, nuestro ∞_1, pues tampoco son conceptos; y Kant exige

[105] Igualmente, si las características están unidas por "o".
[106] *Op. cit.*, t. III, p. 82.

incluso para los conceptos que se les asocie un objeto en la intuición.

Para que no se me reproche censurar mezquinamente a un genio al que sólo podemos mirar con rendida admiración, creo que también debo destacar las coincidencias, que superan en mucho a los desacuerdos. Para aludir sólo a la más próxima, veo como un gran servicio prestado por Kant el que haya hecho la distinción de juicios sintéticos y analíticos. Al llamar sintéticas *a priori* a las verdades geométricas, reveló su verdadera naturaleza. Y vale la pena repetirlo aun ahora porque frecuentemente no se reconoce. Si Kant se equivocó con respecto a la aritmética, creo que esto no hace mella esencial en su obra. Lo que quiso destacar es que hay juicios sintéticos *a priori*; si éstos aparecen únicamente en la geometría o también en la aritmética resulta de menor importancia.

§ 90. No tengo la pretensión de haber mostrado más que la probabilidad del carácter analítico de las proposiciones aritméticas, ya que aún se puede dudar de si su prueba puede llevarse a cabo sólo por medio de leyes puramente lógicas, o si no se introduce en ningún lugar de la prueba algún otro tipo de premisas de las que no nos percatamos. Esta opinión no está totalmente desvirtuada dadas las indicaciones que he ofrecido para la demostración de algunas proposiciones; la objeción sólo puede ser superada por medio de una deducción completamente formal, de suerte que no hubiera un solo paso que no se ajustara a alguno de los pocos principios de inferencia reconocidos como lógicamente puros. Pero hasta ahora ninguna prueba se ha realizado así, ya que el matemático se contenta con que cada paso que conduzca a un nuevo juicio aparezca como evidentemente correcto, sin preguntar si es lógica o intuitiva la naturaleza de esa evidencia. Con frecuencia, tal paso es un compendio equivalente a varias inferencias simples, junto a las cuales pueden aún deslizarse factores procedentes de la intuición. Se procede a saltos, y de ello surge la multiplicidad aparentemente rica de modos de inferencia en la matemática; pues entre más grandes son los saltos, tanto más variadas son las combinaciones de inferencias simples y axiomas de la intuición que los pueden representar. Sin embargo, es frecuente

que uno de esos pasos nos parezca evidentemente inmediato, sin percatarnos de los pasos intermedios, y puesto que no se ajustan a los modos de inferencia lógicamente reconocidos, estamos dispuestos a considerar que esa evidencia es intuitiva y que la verdad que encierra es sintética, aun cuando su dominio de validez supere patentemente el dominio de lo intuitivo.

De esta manera, no es posible separar limpiamente lo sintético, que descansa en la intuición, de lo analítico. Tampoco se consigue así reunir con certeza el conjunto completo de los axiomas de la intuición, tal que de ellos solamente, por medio de las leyes de la lógica, se pudiese llevar a cabo toda prueba matemática.

§ 91. Es ineludible la exigencia de evitar todo salto en las deducciones. Que esto es difícil de satisfacer, lo muestra lo farragoso que es proceder paso por paso. Toda prueba, aunque sólo sea algo complicada, amenaza con tomar una extensión exorbitante. A ello se añade que la enorme variedad de formas lógicas acuñadas en el lenguaje dificulta aislar un conjunto de reglas de inferencia suficiente para todos los casos y fácil de abarcar de una sola mirada.

Para minimizar estos inconvenientes, he ideado mi *Conceptografía*. Tiene como finalidad producir expresiones más cortas y concisas, y proceder según pocas formas fijas, como en un cálculo, de modo que no se permite ningún paso que no se ajuste a las reglas establecidas de una vez por todas.[107] Será imposible que se introduzca alguna premisa en la prueba sin que nos percatemos de ello. Así, sin pedir prestado un solo axioma a la intuición, he probado una proposición[108] que a primera vista podría tomarse por sintética, y la que aquí formularé así:

Si la relación de todo miembro de una serie con su inmediato sucesor es biunívoca, y si m y y siguen a x en esta serie, entonces y precede a m en esta serie, o coincide con m, o sigue a m.

[107] Sin embargo, no sólo debe poder expresar la forma lógica, como la notación booleana, sino también el contenido.

[108] Véase *Conceptografía*, fórmula 133 [*supra*].

Por medio de esta prueba se puede ver que las proposiciones que amplían nuestro conocimiento pueden contener juicios analíticos.[109]

OTROS NÚMEROS

§ 92. Hasta aquí hemos limitado nuestras consideraciones a los números naturales. Echemos ahora una mirada a otras clases de números e intentemos hacer aplicable a ese campo más amplio lo que ya hemos aprendido en el campo más limitado.

Para hacer claro el sentido de la cuestión de la posibilidad de un cierto tipo de número, Hankel dice:[110]

> El número hoy día no es más una cosa, una sustancia que exista con independencia fuera del sujeto pensante y de los objetos que lo originan, un principio autosuficiente, como lo era para los pitagóricos. La pregunta por la existencia sólo puede entenderse como referida al sujeto pensante o a los objetos pensados, cuyas relaciones los números representan. Para el matemático, sólo cuenta como imposible, en sentido estricto, lo que es lógicamente imposible, esto es, lo contradictorio en sí mismo. No requiere prueba alguna el que no se puedan admitir números imposibles en este sentido. Pero si los números en cuestión son lógicamente posibles, si su concepto es claro y bien definido, y sin contradicción, entonces la pregunta anterior se reduce a la cuestión de si hay un sustrato para éstos en el dominio de lo real, de lo actual, de lo dado en la intuición; de si hay objetos en los que aparecen los números, o sea, de si hay relaciones intelectuales del tipo determinado.

§ 93. Según la primera proposición, cabe la duda de si para Hankel los números existen en el sujeto pensante, en los ob-

[109] Ciertamente, esta prueba resultará siempre demasiado farragosa; desventaja que tal vez parece más que sobreestimar la seguridad incondicionada ante una falla o una laguna. Mi pretensión, en aquel entonces, era reducir todo al menor número posible de leyes lógicas lo más simples posibles. Como consecuencia de esto, sólo empleé un solo principio de deducción. Pero ya entonces señalé en el prólogo [página 41 de la presente edición] que para posteriores aplicaciones se tendrían que emplear más reglas de inferencia. Esto puede ocurrir sin perjudicar la vinculación de la cadena deductiva, y se logra así una significativa abreviación.

[110] *Op. cit.*, pp. 6-7.

jetos que los originan, o en ambos. En todo caso, en sentido espacial no están dentro ni fuera del sujeto ni tampoco de un objeto. Pero ciertamente están fuera del sujeto, en el sentido de que no son subjetivos. Mientras que cada quien sólo puede sentir su dolor, su placer, su hambre, y sólo puede tener sus sensaciones de sonidos y colores, los números, por el contrario, pueden ser objetos comunes a muchos individuos, son exactamente los mismos para todos ellos, y no son sólo estados internos más o menos semejantes en los distintos individuos. Cuando Hankel pone la pregunta sobre la existencia del número en relación con el sujeto pensante, parece que la vuelve una cuestión psicológica, cosa que de ninguna manera es. El matemático no se ocupa de la naturaleza de nuestra psique, y debe serle completamente indiferente cómo se contesten las preguntas psicológicas.

§ 94. También hay que criticar la idea de que sólo cuenta como imposible para el matemático lo que es contradictorio en sí mismo. Un concepto puede ser admitido aun si sus características contienen una contradicción; sólo hay que presuponer que nada cae bajo él. Pero de que el concepto no contenga contradicción alguna, tampoco se puede inferir que algo caiga bajo él. Por lo demás, ¿cómo podría probarse que un concepto no contiene contradicción alguna? Esto no es siempre obvio; de que no se vea ninguna contradicción, no se sigue que no la haya, y la determinación de su definición no constituye garantía para ello. Hankel demuestra[111] que un sistema de números complejos cerrado de orden superior al ordinario, sometido a todas las leyes de la adición y la multiplicación, contiene una contradicción. Pero esto justamente es algo que se tiene que demostrar; no se ve inmediatamente. Antes de que se demuestre, podría ser que alguien, utilizando tal sistema de números, lograra resultados asombrosos cuyos fundamentos no fueran peores que los que ofrece Hankel[112] para la teoría de determinantes por medio de los números alternantes; pues, ¿quién nos garantiza que sus conceptos no encierran alguna contradicción oculta? E incluso, si se pudiera excluir esa

[111] *Op. cit.*, pp. 106 s.

[112] *Op. cit.*, § 35.

contradicción, en general para un número cualquiera de unidades alternantes, de eso tampoco se seguiría que haya tales unidades. Y es justamente esto lo que necesitamos. Tomemos, por ejemplo, el teorema 18 del libro I de los *Elementos* de Euclides:

> En todo triángulo el lado mayor es opuesto al ángulo mayor.

Para probar esto, Euclides toma del lado mayor AC un segmento AD igual al lado menor AB, y para esto se basa en una construcción previa. La prueba se desplomaría si no hubiera un punto tal como D, y no basta que no se descubra ninguna contradicción en el concepto "punto sobre AC, cuya distancia de A es igual a la de B". Ahora se une B con D. También el que haya una recta tal es una proposición en la que se apoya la prueba.

§ 95. En rigor, la falta de contradicción de un concepto sólo se puede establecer, por supuesto, mostrando que algo cae bajo él. La inversa constituiría un error. En este error cae Hankel cuando, en relación con la ecuación $x + b = c$, dice:[113]

> Es evidente que, cuando $b > c$, no existe ningún número x en la serie $1, 2, 3, \ldots$ que nos dé la solución del problema: la sustracción, es entonces, *imposible*. Sin embargo, en este caso nada nos impide *considerar* la diferencia $(c-b)$ como un signo que soluciona el problema, y con el cual se puede operar exactamente como si fuera un número de la serie $1, 2, 3 \ldots$

Sin embargo, sí hay algo que nos impide considerar, sin más, $(2 - 3)$ como un signo que resuelve el problema; pues, precisamente, un símbolo vacío no resuelve ningún problema; sin un contenido, es únicamente tinta o impresión sobre el papel y, en cuanto tal, posee propiedades físicas, pero no la propiedad de dar 2 al sumársele 3. Propiamente no sería un signo en absoluto, y usarlo como si lo fuese constituiría un error lógico. Aun en el caso de que $c > b$, el signo ("$c - b$") no es la solución del problema, sino que lo es su contenido.

[113] *Op. cit.*, p. 5. De manera similar, E. Kossak, *op. cit.*, p. 17 *ad fin.*

§ 96. Igualmente se podría decir: entre los números conocidos hasta ahora, no hay ninguno que satisfaga a la vez las dos ecuaciones siguientes:

$$x + 1 = 2 \qquad \text{y} \qquad x + 2 = 1;$$

pero nada nos impide introducir un signo que resuelva el problema. Se dirá: el planteamiento del problema contiene ya una contradicción. Esto es cierto, si como solución se exige un número real o un número complejo ordinario; pero ¡ampliemos nuestro sistema de números, creemos números que satisfagan los requisitos! Esperemos a ver si alguien nos comprueba alguna contradicción. ¿Quién puede saber lo que será posible con estos nuevos números? Ciertamente, en este caso ya no se podrá mantener la univocidad de la sustracción; pero también tenemos que abandonar la univocidad de la operación de sacar raíz si introducimos los números negativos; y con los números complejos dar el logaritmo se hace multívoco.

¡Y por qué no crear también números que permitan la suma de series divergentes! ¡No! Nunca el matemático puede producir algo arbitrariamente, como tampoco lo puede el geógrafo; también él sólo puede descubrir lo que está ahí y darle un nombre.

De este error adolece la teoría formal de las fracciones, de los números negativos y de los números complejos.[114] Se pone el requisito de que, en la medida de lo posible, se mantengan las reglas conocidas para el cálculo respecto de los nuevos números que se vayan a introducir, y se deduzcan de ellos propiedades y relaciones generales. Si nadie se topa con una contradicción, entonces se tiene por justificada la introducción de nuevos números, como si, a pesar de todo, no pudiera estar oculta en alguna parte una contradicción y como si la falta de contradicción fuera, sin más, existencia.

§ 97. El que este error se cometa con facilidad se debe, sin duda, a que no se distinguen correctamente los conceptos de los objetos. Nada nos impide utilizar el concepto "raíz cuadrada de -1"; pero no estamos autorizados, sin más, a ponerle

[114] Algo similar ocurre con los números infinitos de Cantor.

delante el artículo definido y considerar que la expresión "la raíz cuadrada de -1" tiene sentido. Bajo la suposición de que $i^2 = -1$, podemos dar una prueba de la fórmula que expresa el seno de un múltiplo del ángulo a por medio del seno y el coseno de a mismo; pero no debemos olvidar que la proposición supone la condición de que $i^2 = -1$, la cual no podemos simplemente hacerla a un lado. Si nada hubiera cuyo cuadrado fuera -1, nuestra demostración no conseguiría, sin más, que la ecuación fuese correcta,[115] ya que jamás se cumpliría la condición de que $i^2 = -1$, de la cual depende su validez. Sería como si en una demostración geométrica tuviéramos necesidad de una línea auxiliar que no se pudiera trazar.

§ 98. Hankel[116] introduce dos tipos de operaciones, que llama lítica y thética, que define por medio de ciertas propiedades que estas operaciones tienen que poseer. Contra esto nada hay que decir, en tanto que no se presuponga que existen esas operaciones y los objetos que pudieran ser sus resultados.[117] Un poco después,[118] simboliza una operación thética, unívoca y asociativa, por medio de $(a + b)$, y la correspondiente operación lítica, también unívoca, por medio de $(a - b)$. ¿*Una* operación tal? ¿Cuál? ¿Una arbitraria? Esto no es una definición de $(a + b)$; ¿y qué si no existe ninguna? Si la palabra "adición" no tuviera significado alguno, lógicamente sería lícito decir: a una operación así, la llamamos una adición; pero no se puede decir: esa operación ha de ser *la* adición y será designada mediante $(a + b)$, antes de establecer que hay una y sólo una operación tal. No se puede usar en un lado de la igualdad definicional el artículo indefinido y en la otra el definido. Luego Hankel dice, sin más: "el módulo de la operación", sin haber demostrado que hay una y sólo una operación tal.

§ 99. En pocas palabras: la teoría formal pura es insuficiente. Su mérito es sólo éste. Se prueba que si las operaciones poseen ciertas propiedades como la asociatividad y la conmutatividad, ciertas proposiciones valen para ellas. Así, se muestra que si la adición y la multiplicación —que ya se conocen— tienen estas propiedades, en seguida pueden enunciarse estas proposiciones de ellas, sin repetir la prueba detalladamente en cada caso particular. Así, sólo después de aplicar esto a operaciones dadas, se llega a los conocidos teoremas de la aritmética. Pero de ninguna manera se debe creer que la adición y la multiplicación podrían introducirse mediante este procedimiento. No se dan las definiciones completas, sino sólo los lineamientos generales para éstas mismas. Se dice: el nombre "adición" sólo puede darse a una operación thética, unívoca y asociativa, con lo cual, todavía no se indica cuál es la operación que ha de llamarse así. Según esto, nada nos impide llamar adición a la multiplicación y designarla mediante $(a + b)$, y nadie podría decir en definitiva si $2 + 3$ son 5 o 6.

§ 100. Si abandonamos este tratamiento puramente formal, parece que se ofrece otro camino debido a la circunstancia de que, con la introducción de nuevos números, se amplía simultáneamente el significado de las palabras "suma" y "producto". Tómese un objeto, digamos, la Luna, y defínase: la Luna multiplicada por sí misma es -1. Por tanto, en la Luna tenemos la raíz cuadrada de -1. Esta definición parece permisible, ya que la definición de la multiplicación, hasta ahora, no adelanta nada acerca del sentido de tal producto y, por tanto, se puede establecer libremente como ampliación de su significado. Pero también necesitamos el producto de un número real y la raíz cuadrada de -1. Para esto, elijamos el intervalo temporal de un segundo como raíz cuadrada de -1, y simbolicémoslo por i. Así, por $3i$, entenderemos el intervalo temporal de 3 segundos, etc.[119] ¿Qué objetos designaremos, luego, con $2 + 3i$? ¿Qué significado habría que dar al signo de más, en este caso?

[115] Siempre se podría demostrar, rigurosamente, de alguna otra manera.

[116] *Op. cit.*, p. 18.

[117] En realidad, esto ya lo hace Hankel al utilizar la igualdad $\Theta(c, b) = a$.

[118] *Op. cit.*, p. 29.

[119] Con el mismo derecho, podríamos elegir como raíz cuadrada de -1, a un cierto cuanto de electricidad, a una cierta área, etc., pero estas diferentes raíces, obviamente, deben simbolizarse de modo diferente. Que a discreción se pueden producir muchas raíces cuadradas de -1, resultará menos asombroso si se piensa que el significado de la raíz cuadrada no era algo que ya hubiese sido fijado invariablemente con anterioridad a estas estipulaciones, sino que por medio de ellas se determina por primera vez.

Ahora bien, ese significado se tendrá que establecer de forma general, lo cual ciertamente no será fácil. Sin embargo, supongamos que hemos asegurado un sentido para todos los signos de la forma $a + bi$, y un sentido tal que valen para él las conocidas leyes de la adición. Lo que tendríamos que establecer, además, es que en general

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i\,(ad + bc),$$

con lo cual determinaríamos el significado extendido de la multiplicación.

§ 101. Ahora podríamos probar la fórmula de $\cos(n\alpha)$, si supiéramos que de la igualdad de números complejos se sigue la igualdad de sus partes reales. Esto debería derivarse del sentido de $a + bi$, el cual hemos admitido como existente. La prueba sólo valdría para los números complejos, sus sumas y productos, cuyo sentido hemos fijado. Puesto que para un número real entero n y para un número real α ya no aparece más i en la igualdad, entonces nos vemos tentados a concluir: por tanto, es indiferente si i significa un segundo, un milímetro, o alguna otra cosa, con la condición de que valgan nuestras leyes de la adición y la multiplicación; todo depende de esto, no necesitamos preocuparnos de lo demás. Tal vez se puede fijar, de distinta manera, el significado de $a + bi$, de la suma y del producto, de suerte que esas leyes se sigan manteniendo; pero no es indiferente si se puede encontrar en absoluto un sentido para estas expresiones.

§ 102. Con frecuencia, se procede como si la mera estipulación fuera ya su cumplimiento. Se estipula que la sustracción,[120] la división, la extracción de raíces, son siempre realizables, y con esto se cree haber hecho lo suficiente. ¿Por qué tampoco se estipula que por tres puntos cualesquiera se puede trazar una recta? ¿Por qué no se estipula que todas las leyes de la adición y la multiplicación continúan valiendo para un sistema de números complejos tridimensional, como valen para los números reales? Porque estas estipulaciones contienen una contradicción. ¡Vaya, pues, lo que tenemos que hacer primero es probar

[120] *Cfr.* Kossak, *op. cit.*, p. 17.

que esas otras estipulaciones no contienen contradicción alguna! Hasta que no se haya hecho esto, todo el pretendido rigor no es más que un falso brillo o una humareda.

En un teorema geométrico no se menciona la línea auxiliar trazada para la prueba. Tal vez sean posibles más de una, por ejemplo, cuando se puede elegir arbitrariamente un punto. Pero por mucho que resulte prescindible cada línea en particular, no obstante, la fuerza de la prueba depende de que se pueda trazar una línea con las características requeridas. La mera postulación no es suficiente. Así, tampoco en nuestro caso es indiferente para la fuerza de la prueba si "$a + bi$" tiene un sentido o si meramente es una mancha impresa. No basta exigir que deba tener un sentido, o decir que el sentido es la suma de a y bi, si no se ha definido previamente lo que significa "suma" en este caso y si no se ha justificado el uso del artículo definido.

§ 103. Ciertamente se podrán hacer algunas objeciones en contra del sentido que intentamos fijar para "i". Con ello, introdujimos en la aritmética algo totalmente ajeno, el tiempo. El segundo no tiene relación interna alguna con los números reales. Las proposiciones que son probadas por medio de números complejos serían juicios *a posteriori*, desde luego, sintéticos, si no hubiera otro tipo de prueba, o si no se pudiera encontrar ningún otro sentido para i. En todo caso, primero tenemos que intentar demostrar que todas las proposiciones de la aritmética son analíticas.

Cuando Kossak dice,[121] al referirse al número complejo: "es la representación compuesta de grupos heterogéneos de elementos iguales entre sí",[122] parece haber evitado con ello la intromisión de algo ajeno; pero lo parece sólo debido a la indeterminación de la expresión. No se obtiene ninguna respuesta a qué significa realmente $1 + i$: ¿acaso la representación de una manzana y una pera, o del dolor de muelas y la podagra? Sin embargo, no puede significar ambas cosas porque entonces $1 + i$ no sería siempre igual a $1 + i$. Se podría decir:

[121] *Op. cit.*, p. 17.

[122] Sobre el término "representación", compárese § 27; sobre "grupo", lo que se dijo en relación con "agregado" en § 23 y § 25; sobre la igualdad de los elementos, en §§ 34-39.

esto depende de la estipulación especial que hagamos. Bien, pero entonces ciertamente tampoco tendríamos en la proposición de Kossak ninguna definición del número complejo, sino sólo una indicación general para establecerla. Pero necesitamos algo más; tenemos que saber con precisión qué significa "*i*", y si siguiendo aquella indicación dijéramos: la representación de una pera, estaríamos introduciendo de nuevo algo ajeno a la aritmética.

Lo que se suele llamar la representación geométrica de los números complejos tiene por lo menos la ventaja, frente a las propuestas hasta ahora consideradas, de que en ella 1 e *i* no aparecen como si carecieran de toda conexión y fuesen totalmente heterogéneos, sino que el segmento que se considera como representación de *i* se encuentra en una relación regular con el segmento que representa 1. Por lo demás, en sentido estricto, no es correcto que 1 signifique un cierto segmento e *i* un segmento de la misma longitud perpendicular a aquél, pues "1" significa lo mismo en todas partes. Aquí, un número complejo indica cómo el segmento que vale como su representación se produce por medio de la multiplicación, la división y la rotación,[123] a partir de un segmento dado (segmento-unidad). Pero también según esta interpretación, todo teorema cuya prueba se tenga que apoyar en la existencia de un número complejo aparece como dependiente de la intuición geométrica y, por tanto, como sintético.

§ 104. ¿De qué manera, entonces, nos han de ser dados las fracciones, los números irracionales y los números complejos? Si acudimos a la intuición como ayuda, entonces introducimos en la aritmética algo que le es ajeno; pero si sólo determinamos el concepto de tales números mediante ciertas características, si sólo exigimos que el número tenga ciertas propiedades, entonces nada nos garantiza también que algo caiga bajo nuestro concepto y satisfaga nuestros requisitos y, sin embargo, las pruebas tienen que basarse precisamente en esto.

¿Qué pasa, entonces, con los números? ¿Realmente no podemos hablar de $1\,000^{1\,000^{1\,000}}$, antes de que nos sean dados tantísimos objetos en la intuición? ¿Es, mientras tanto, un signo vacío? ¡No! Tiene un sentido perfectamente determinado, si bien psicológicamente, considerando lo corto de nuestra vida, es imposible tener frente a la conciencia semejante número de objetos;[124] pero, a pesar de ello, $1\,000^{1\,000^{1\,000}}$ es un objeto cuyas propiedades podemos conocer, aunque no tengamos intuición de él. Para convencerse uno de esto, se introduce el signo a^n para la potencia, y se muestra que, si a y n son números enteros positivos, uno y sólo un número entero positivo se expresa siempre con esto. Demostrar en detalle cómo puede mostrarse esto nos llevaría aquí demasiado lejos. El modo como hemos definido el cero en § 74, el uno en § 77 y el número infinito ∞_1 en § 84, y la indicación general de la prueba de que en la serie de los números naturales a cada número finito sigue inmediatamente otro número (§§ 82 y 83), nos dan una idea del camino que se ha de seguir.

En el caso de la definición de fracción, número complejo, etc., todo dependerá, en último término, de que encontremos un contenido juzgable que pueda transformarse en una igualdad cuyos lados sean justamente los nuevos números. En otras palabras: debemos fijar el sentido de un juicio de reconocimiento para tales números. Al hacer esto, tenemos que tener en mente las dudas suscitadas en relación con transformaciones de este tipo, examinadas en §§ 63-68. Si procedemos de la misma manera que ahí, entonces los nuevos números nos serán dados como extensiones de conceptos.

§ 105. Con base en esta concepción de los números,[125] me parece que se explica fácilmente el atractivo que ejerce el estudio de la aritmética y el análisis. Modificando una conocida expresión, bien se podría decir: el objeto propio de la razón es la razón. En la aritmética nos ocupamos de objetos que no nos son dados a través de los sentidos como algo ajeno, exterior, sino que son dados inmediatamente a la razón, la cual los puede contemplar como lo que le es más propio.[126]

[123] Por mor de la simplicidad, prescindo aquí de los inconmensurables.

[124] Un simple cálculo muestra que no serían suficientes para ello millones de años.

[125] También se le podría llamar formal. Sin embargo, es completamente diferente de la concepción criticada más arriba bajo este nombre.

[126] Con esto, en absoluto quiero negar que sin las impresiones sensibles se-

Y, sin embargo, o más bien justo por ello, estos objetos no son quimeras subjetivas. Nada hay más objetivo que las leyes de la aritmética.

§ 106. Echemos una breve mirada final al curso de nuestra investigación. Después de haber establecido que el número no es ni una colección de cosas ni una propiedad de tales colecciones, y que tampoco es un producto subjetivo de procesos mentales, sino que una proposición numérica afirma algo objetivo de un concepto, intentamos definir luego los números individuales 0, 1, etc., y la progresión en la serie de los números. El primer intento fracasó porque únicamente habíamos definido lo que se predica de un concepto, pero no habíamos dado definiciones por separado del 0 y del 1, que son sólo parte de esa predicación. La consecuencia de esto es que no pudimos probar la igualdad de números. Se mostró que el número del que se ocupa la aritmética no debe ser considerado como un atributo dependiente, sino sustantivo.[127] El número surgía, así, como un objeto reconocible, aunque no físico, ni siquiera espacial, tampoco como un objeto del cual pudiéramos formarnos una imagen por medio de nuestra capacidad de imaginación. Formulamos luego la proposición fundamental de que el significado de una palabra no se explica aisladamente, sino en el contexto de una proposición; sólo siguiendo este principio, según creo, se puede evitar la concepción física del número, sin caer, por ello, en la psicológica. Para todo objeto, hay un tipo de proposición que debe tener un sentido, a saber, la proposición de reconocimiento, que en el caso de los números se llama una igualdad. Vimos que las proposiciones numéricas se deben considerar como igualdades. Así, fue de importancia establecer el sentido de una igualdad numérica; expresarlo sin hacer uso de las palabras numéricas o de la palabra "número". Descubrimos que el contenido de un juicio de reconocimiento de números es que es posible que los objetos que caen bajo un

ríamos tan tontos como una piedra y no sabríamos nada, ni de los números ni de cosa alguna; pero esta proposición psicológica en nada nos concierne. Por el riesgo constante de confundir dos cuestiones fundamentalmente distintas, destaco esto una vez más.

[127] La diferencia corresponde a la que hay entre "azul" y "el color del cielo".

concepto *F* se correlacionen biunívocamente con los que caen bajo un concepto *G*. Nuestra definición debía colocar a esa posibilidad como equivalente a una igualdad numérica. Recordamos casos semejantes: la definición de dirección a partir del paralelismo, la de la forma a partir de la semejanza, etcétera.

§ 107. Entonces surgió la pregunta: ¿cuándo está justificado considerar un contenido como el contenido de un juicio de reconocimiento? Para esto se debe satisfacer la condición de que en todo juicio se pueda sustituir, sin alterar su verdad, lo que aparece del lado izquierdo por lo que aparece del lado derecho de la supuesta igualdad. Ahora bien, mientras no agreguemos otras definiciones, no disponemos de ninguna predicación más sobre cualquiera de los dos lados de una igualdad, excepto la de que son idénticos. Por tanto, sólo se requeriría demostrar la sustituibilidad en una igualdad.

Pero aún queda una duda. Una proposición de reconocimiento tiene que tener siempre un sentido. Si ahora tratamos una igualdad como la posibilidad de correlacionar biunívocamente los objetos que caen bajo el concepto *F* con los que caen bajo el concepto *G*, al decir en su lugar: "el número que corresponde al concepto *F* es igual al número que corresponde al concepto *G*", e introducir con ello la expresión "el número que corresponde al concepto *F*", obtenemos un sentido para la igualdad sólo si ambos lados tienen la forma antes mencionada. De acuerdo con tal definición, no podríamos juzgar si una igualdad es verdadera o falsa en caso de que únicamente un lado tuviera esta forma. Esto nos dio pie para la definición:

El número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto "concepto equinumeroso con respecto al concepto *F*"; en donde llamamos a un concepto *F* equinumeroso con respecto a un concepto *G* si existe la mencionada posibilidad de correlación biunívoca.

Aquí, se presupone que se conoce el sentido de la expresión "extensión del concepto". Este modo de superar la dificultad ciertamente no encontrará consenso general, y muchos preferirán allanar tal dificultad de otra manera. Yo tampoco pongo un peso decisivo en la utilización de la extensión de un concepto.

§ 108. Aún quedaba por definir la correlación biunívoca; la redujimos a relaciones puramente lógicas. Después, indicamos a grandes rasgos la prueba de la proposición: el número que corresponde al concepto F es igual al que corresponde al concepto G, si el concepto F es equinumeroso con respecto al concepto G, definimos el 0, la expresión: "en la serie de los números naturales, n sigue inmediatamente a m", y el número 1, y mostramos que en la serie de los números naturales 1 sigue inmediatamente a 0. Mencionamos algunas proposiciones que podían probarse fácilmente en este lugar y examinamos un poco más de cerca la siguiente, que permite conocer la infinitud de la serie de los números:

> A todo número le sigue un número en la serie de los números naturales.

Esto nos condujo al concepto "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con n", del que queríamos mostrar que el número que le corresponde sigue inmediatamente a n en la serie de los números naturales. Inicialmente lo definimos por medio de la noción de seguir un objeto y a un objeto x en una serie-φ en general. También el sentido de esta expresión fue reducido a relaciones puramente lógicas. Y, así, logramos demostrar que la inferencia de n a $(n + 1)$, que es tenida como peculiar de la matemática, descansa en inferencias lógicas generales.

Para probar la infinitud de la serie de los números, requerimos la proposición de que en la serie de los números naturales ningún número finito se sigue a sí mismo. Así llegamos a los conceptos de número finito y de número infinito. Indicamos que, en el fondo, el segundo no está menos justificado lógicamente que el primero. Con el fin de comparar, se hizo referencia a los números infinitos de Cantor, y a su "seguir en la sucesión", y se resaltó la divergencia en la terminología.

§ 109. Así, de todo lo anterior surge ahora con gran probabilidad que la naturaleza de las verdades aritméticas es analítica y *a priori*; y hemos logrado mejorar la posición de Kant. Hemos visto también que aún falta elevar esa probabilidad a certeza, y señalado el camino por el que esto tiene que hacerse.

Finalmente, utilizamos nuestros resultados en una crítica de una teoría formal de los números negativos, fraccionarios, irracionales y complejos, que hizo patente su insuficiencia. Vimos que su error estriba en considerar que un concepto está probado si no se ha encontrado ninguna contradicción en él; y en considerar que la falta de contradicción en un concepto vale como garantía suficiente de que no es vacío. Esta teoría se imagina que todo lo que necesita es estipular requisitos cuyo cumplimiento se da de por sí. Se comporta como un dios que pudiese crear por su mera palabra lo que quisiese. También tendría que censurarse que se tome por una definición una mera instrucción de cómo llegar a ella, una instrucción cuya observancia introduciría algo ajeno en la aritmética, aunque su expresión verbal puede estar libre de ello, pero sólo porque sigue siendo una mera instrucción.

Así, esa teoría formal incurre en el peligro de reincidir en una postura *a posteriori* o sintética, por más que se dé la impresión de flotar en las cimas de la abstracción.

Nuestras consideraciones anteriores sobre los números enteros positivos nos indicaron la posibilidad de evitar la intromisión de cosas externas y de intuiciones geométricas, sin caer, no obstante, en los errores en los que caen las teorías formales. La cuestión aquí, como allá, es fijar el contenido de un juicio de reconocimiento. Si pensamos que esto se cumple en todas partes, entonces los números negativos, fraccionarios, irracionales y complejos no parecen más misteriosos que los números enteros positivos; éstos no son más reales, actuales o palpables que aquéllos.

LAS LEYES FUNDAMENTALES DE LA ARITMÉTICA*

[Selección]

*Título original: *Grundgesetze der Arithmetik*, obra en dos volúmenes. El volumen I fue publicado por Hermann Pohle en Jena en 1893, y el volumen II, por el mismo editor en 1903.

PRÓLOGO AL VOLUMEN I

[1893]*

En este libro se encuentran teoremas en los que se basa la aritmética, demostrados con signos especiales; al conjunto de estos signos lo llamo conceptografía. Las más importantes de estas proposiciones han sido reunidas al final, y se ha añadido su traducción. Como se ve, no se han considerado aquí todavía los números negativos, fraccionarios, irracionales ni complejos, como tampoco la adición, la multiplicación, etc. Ni siquiera las proposiciones sobre los números naturales se han presentado con la compleción proyectada en principio. En particular, falta aún la proposición de que el número de los objetos que caen bajo un concepto es finito si es finito el número de objetos que caen bajo un concepto al que el primero está subordinado. Circunstancias externas me han decidido a reservar la prosecución de estos estudios, así como el tratamiento de los demás números y de las operaciones matemáticas; la publicación de estos resultados dependerá de la aceptación que encuentre este primer volumen. Baste lo que he ofrecido aquí para dar una idea de mi modo de proceder. Puede que se opine que no eran necesarias las proposiciones sobre el número infinito.[1] Es verdad que no lo son para la fundamentación de la aritmética en

* Traducción de Carlos Ulises Moulines, publicada en Frege 1971. Revisada para el presente volumen.

En esta versión revisada se reemplaza el término "enunciado" que aparecía en la traducción original por "proposición", siguiendo en esto el criterio de traducción de A. Ebert y M. Rossberg en su versión inglesa de los *Grundgesetze der Arithmetik*. Véase G. Frege, *Basic Laws of Arithmetic*, Oxford University Press, Oxford, 2013, p. xxi. [N. de la c.]

[1] Es el número cardinal de un conjunto infinito numerable.

su extensión habitual; pero su deducción es mucho más sencilla que la de las proposiciones correspondientes para números finitos y puede servir como preparación para éstas. Además de esto aparecen proposiciones que no tratan de números, pero que se utilizan en las pruebas. Tratan, por ejemplo, del seguirse en una serie, de la univocidad de las relaciones, de las relaciones compuestas, del mapeo mediante relaciones y nociones parecidas. Estas proposiciones podrían atribuirse quizás a una teoría ampliada de las combinaciones.

Las pruebas se hallan únicamente en los parágrafos titulados "construcción" ["*Aufbau*"], mientras que los titulados "análisis" ["*Zerlegung*"] van encaminados a facilitar la comprensión, al describir provisionalmente a grandes rasgos la marcha de la prueba. Las pruebas no contienen en sí mismas ninguna palabra, sino que se realizan sólo con mis signos. Se presentan visualmente como una serie de fórmulas, separadas por trazos continuos o discontinuos, o por otros signos. Cada una de estas fórmulas es una proposición completa, con todas las condiciones que son necesarias para su validez. Esta compleción de la proposición, la cual no admite supuestos tácitos sobreentendidos, me parece indispensable para el rigor de la demostración.

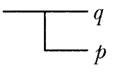
El paso de una proposición a la siguiente procede según las reglas que se hallan en el § 48, y no se da ningún paso que no responda a estas reglas. Cómo y según qué reglas se hace la inferencia lo indica el signo que se halle entre las fórmulas, mientras que — • — concluye una cadena deductiva. Para este propósito debe haber proposiciones que no se derivan de otras. Algunas de éstas son las leyes fundamentales que he reunido en el § 47; otras son las definiciones, que se encuentran juntas al final en una tabla, con indicación de los pasajes en que aparecen por primera vez. Al llevar a cabo esta tarea aparecerá siempre la necesidad de definiciones. Los principios que hay que seguir para introducir las definiciones se exponen en el § 33. Las definiciones no son propiamente creadoras y, según creo, no lo pueden ser; sólo introducen abreviaturas de designaciones (nombres) que podrían ser evitadas si la prolijidad no produjera en tal caso dificultades externas insuperables.

El ideal de un método estrictamente científico de la matemática que he tratado de realizar aquí, y que bien pudiera ser

denominado euclídeo, lo voy a describir de la siguiente manera. Probarlo todo es algo que ciertamente no se puede exigir porque es imposible; pero puede exigirse que todas las proposiciones que se utilicen sin ser probadas sean declaradas explícitamente como tales, para que se vea claramente sobre qué descansa la construcción entera. Por ello hay que esforzarse por reducir al máximo el número de leyes primitivas, demostrando todo lo que sea demostrable. Pero además, y en este punto voy más allá que Euclides, exijo que se mencionen previamente todos los modos de deducción y de inferencia que se empleen. En caso contrario, no se puede asegurar el cumplimiento de la primera exigencia. En lo esencial, creo haber alcanzado este ideal. Sólo en unos pocos puntos podrían plantearse exigencias de mayor rigor. Para procurarme mayor movilidad y evitar una extensión desmesurada, me he permitido hacer uso tácito de la intercambiabilidad de los miembros inferiores (condiciones)* y de la fusión de miembros inferiores iguales, y no he reducido los modos de deducción y de inferencia al menor número posible. Quien conozca mi librito *Conceptografía* podrá deducir de lo que se dice allí cómo se podrían satisfacer también aquí las exigencias más rigurosas, pero al mismo tiempo sabrá que esto traería consigo un aumento considerable de la extensión.

Por lo demás, creo yo, los reparos que con razón pueden ponerse a este libro no se referirán al rigor sino sólo a la elección de una prueba y de los pasos intermedios. Es frecuente que se presenten varios caminos posibles para llevar a cabo una prueba; no he intentado andar por todos ellos, y por eso es posible, incluso probable, que no siempre haya escogido el más corto. Quien tenga algo que objetar en este sentido, que lo haga mejor. Otras cuestiones también serán discutibles. Algunos habrían preferido quizás extender más el conjunto de los modos de deducción e inferencia admitidos, para conse-

*Frege expresa que la fórmula "p" implica la fórmula "q" (en nuestra notación actual $p \rightarrow q$) de la siguiente manera:



Por esto llama a "p" el "miembro inferior" (en una inferencia) y a "q" el "superior" (véase *Las leyes fundamentales de la aritmética*, § 12). [N. del t.]

guir con ello una mayor movilidad y brevedad. Pero en esto debemos detenernos en algún punto, si es que se admite el ideal que he propuesto, y sea cual sea el punto en el que nos detengamos, siempre habrá alguien que pueda decir: habría sido mejor admitir aún más modos de deducción.

Con que no haya lagunas en las cadenas deductivas se consigue hacer patente cada axioma, presupuesto, hipótesis, o como se quiera llamar a aquello sobre lo que se base una demostración; y así obtenemos un fundamento para ponderar la naturaleza epistemológica de la ley demostrada. Ciertamente se ha afirmado repetidas veces que la aritmética no es más que lógica desarrollada; pero esto seguirá siendo discutible mientras aparezcan en las pruebas pasos que no se den según las leyes lógicas reconocidas, sino que parecen descansar en un conocimiento intuitivo. Sólo a partir del momento en que estos pasos se descompongan en pasos lógicos simples, podremos estar convencidos de que en la base no hay sino lógica. He reunido todo lo que pueda facilitar la evaluación de si una cadena deductiva es concluyente o de si unas premisas son sólidas. Si alguien encontrase algo erróneo, tendría que poder indicar exactamente dónde se halla el error según su opinión: en las leyes fundamentales, en las definiciones, en las reglas o en su aplicación en un determinado lugar. Si se encuentra todo en orden, se conocen entonces exactamente los fundamentos sobre los que se basa cada teorema en particular. Sólo puede haber discusión, por lo que alcanzo a ver, respecto de mi ley fundamental (V) de los rangos de valores [*Wertverlaufen*], que quizás los lógicos todavía no consideran como cosa propia, aunque se piensa en ella cuando se habla, por ejemplo, de extensiones de conceptos. Por mi parte, la considero puramente lógica. En cualquier caso, señalo aquí el punto en donde tiene que haber una decisión.

Mi objetivo exige apartarse un poco de lo que es usual en matemáticas. Las exigencias de rigor en las pruebas tienen como consecuencia ineludible una mayor longitud de ellas. Quien no tenga en cuenta este hecho, se sorprenderá realmente mucho de lo complicada que resulta aquí la prueba de una proposición que él cree comprender inmediatamente en un solo acto cognoscitivo. Esto será especialmente sorprendente

si se compara con el escrito del señor Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* [*¿Qué son y qué deben ser los números?*], lo más profundo que he conocido en los últimos tiempos sobre la fundamentación de la aritmética. En un espacio mucho menor, examina las leyes de la aritmética hasta un nivel muy superior del que se considera aquí. Esa brevedad, naturalmente, sólo se consigue dejando que mucho quede propiamente sin demostrar. El señor Dedekind dice frecuentemente que la prueba procede a partir de tales y cuales proposiciones; utiliza puntos suspensivos, como en "$\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$"; en ninguna parte hallamos una lista de las leyes lógicas o de otro tipo tomadas como base, e incluso si éstas se hubieran puesto, no habría ninguna manera de comprobar si realmente no se han utilizado otras; pues para ello las pruebas deberían aparecer no sólo indicadas, sino llevadas a cabo paso por paso. El señor Dedekind también es de la opinión de que la teoría de los números es una parte de la lógica; pero su escrito apenas contribuye a robustecer esta opinión, porque su uso de las expresiones "sistema", "una cosa pertenece a una cosa", no son usuales en lógica y no pueden ser reducidas a nada reconocidamente lógico. No digo esto como reproche; pues su método puede haber sido para él el más útil para su objetivo; sólo lo digo para hacer más claro mi propósito al resaltar la diferencia. La longitud de una prueba no debe medirse con la regla. Es fácil hacer que una prueba parezca breve sobre el papel saltándonos pasos intermedios de la cadena deductiva o dejándolos sólo indicados. Generalmente nos contentamos con que cada paso de la prueba nos parezca evidentemente correcto, y esto es lícito si sólo nos queremos convencer de la verdad de la proposición que se va a demostrar. Pero si se trata de proporcionar una comprensión de la naturaleza de esta evidencia, este procedimiento no es suficiente, sino que hay que escribir todos los estadios intermedios, para que toda la luz de nuestra conciencia caiga sobre ellos. Los matemáticos acostumbran estar interesados solamente en el contenido de la proposición y en que sea probada. En nuestro caso lo nuevo no es el contenido de la proposición, sino el modo como se lleva a cabo la prueba, los fundamentos sobre los que se apoya. No debe extrañar que este punto de vista esencialmente distinto exija también otro tipo de tratamiento. Si se demuestra de la

manera usual una de nuestras proposiciones, es fácil que se pase por alto alguna proposición que parezca ser innecesaria para la prueba. Pero en un examen detenido de mi prueba se verá, según creo, que esa proposición es indispensable, a no ser que se quiera tomar un camino completamente distinto. Por esto quizás se encuentren aquí y allá en nuestros teoremas condiciones que a primera vista parecen innecesarias, pero que luego resultan ser necesarias, o que, por lo menos, sólo pueden ser abandonadas mediante alguna otra proposición que uno tiene que probar para ese propósito.

Llevo a cabo aquí un proyecto que ya había tenido en vista en mi *Conceptografía* del año 1879 y que anuncié en mis *Fundamentos de la aritmética* del año 1884.[2] Quiero confirmar aquí con este acto mi concepción sobre el número, que expuse en el último de los libros citados. Lo fundamental de mis resultados lo expresé allí en el § 46, diciendo que la asignación de número contiene una predicación sobre un concepto; y en esto se basa la presente exposición. Si alguien tiene una concepción distinta, que intente fundamentar sobre ella mediante signos un sistema consecuente y útil, y verá que no se puede. En el lenguaje natural, la situación no es, claro está, tan transparente; pero si se examina cuidadosamente, se hallará que también aquí al asignar un número cardinal se nombra siempre un concepto, no un grupo, un agregado o algo por el estilo, y que, incluso si esto ocurre alguna vez, el grupo o el agregado siempre están determinados por un concepto, es decir, por las propiedades que tiene que tener un objeto para pertenecer al grupo, mientras que lo que hace grupo al grupo, sistema al sistema, o las relaciones que tienen los miembros entre sí es completamente indiferente para el número cardinal.

La razón de que la realización de este proyecto haya tardado tanto después de su anuncio radica en parte en transformaciones internas de la conceptografía que me obligaron a desechar el manuscrito que estaba ya casi terminado. Explicaré aquí brevemente estos cambios. Los signos primitivos empleados en mi *Conceptografía* aparecen aquí de nuevo con una sola excepción. En lugar de los tres trazos paralelos he empleado

[2] Compárese con la Introducción y los §§ 90 y 91 de mis *Fundamentos de la aritmética*.

el signo de igualdad usual, puesto que me he convencido de que en la aritmética éste también se refiere a lo mismo que yo quiero designar. Uso la palabra "igual" con la misma referencia que "coincidente con" o "idéntico a", y realmente así es como se usa también en la aritmética el signo de igualdad. La objeción que aparentemente podría surgir provendría, sin duda, de una distinción defectuosa entre signo y designado. Claro que en la ecuación "$2^2 = 2 + 2$" el signo de la izquierda es diferente del que está a la derecha; pero ambos designan o se refieren al mismo número.[3] A los signos primitivos antiguos sólo he añadido dos: el "espíritu suave" para designar el rango de valores de una función y un signo que ha de reemplazar el artículo definido del lenguaje natural. La introducción de los rangos de valores de las funciones es un progreso esencial, gracias al cual tenemos una movilidad mucho mayor. Los signos derivados anteriores pueden ser sustituidos ahora por otros signos, más simples, si bien las definiciones de la univocidad de una relación, de seguirse en una serie, de la correlación, son en lo esencial las mismas que yo había dado en parte en mi *Conceptografía*, en parte en mis *Fundamentos de la aritmética*. Pero los rangos de valores tienen además una gran importancia fundamental; pues defino el número cardinal mismo como la extensión de un concepto, y las extensiones de conceptos son, según mi concepción, rangos de valores. Sin éstos, por tanto, no se podría llegar a ninguna parte. Los antiguos signos primitivos que reaparecen sin modificación externa y cuyo algoritmo apenas ha cambiado, han sido provistos, sin embargo, de aclaraciones distintas. La anterior barra de contenido reaparece como la horizontal. Éstas son consecuencias de la evolución de mis concepciones lógicas. Antes había distinguido, en lo que por su forma externa es una oración afirmativa, dos cosas: 1) el reconocimiento de su verdad, 2) el contenido que se reconoce como verdadero. Al contenido lo llamaba yo contenido juzgable. A éste ahora lo he analizado en lo que llamo pensamiento y valor veritativo. Esto es una consecuencia

[3] Naturalmente, también puedo decir: el sentido del signo que está a la derecha es distinto del sentido del signo que está a la izquierda; pero la referencia es la misma. Véase mi ensayo "Sobre sentido y referencia" [*supra*, pp. 249 y ss.].

de la distinción entre sentido y referencia de un signo. En este caso, el sentido de la oración es el pensamiento y su referencia el valor veritativo. A ello se añade el reconocimiento de que su valor veritativo es lo verdadero. Pues distingo dos valores veritativos: lo verdadero y lo falso. Esto lo he justificado detalladamente en mi ensayo antes citado sobre sentido y referencia. Aquí diré sólo que únicamente de este modo se puede dar cuenta correctamente del estilo indirecto. En efecto, el pensamiento, que en los demás casos es el sentido de la oración, pasa a ser, en el estilo indirecto, su referencia. Hasta qué punto con la introducción de valores veritativos todo se hace más simple y riguroso, sólo se podrá ver mediante un estudio detenido de este libro. Estas ventajas solas inclinan ya la balanza a favor de mi concepción, que naturalmente puede parecer a primera vista extraña. También he caracterizado más claramente que en mi *Conceptografía* la esencia de la función, diferenciándola del objeto. De ello resulta además la distinción entre las funciones de primero y segundo nivel. Tal como lo he expuesto en mi conferencia sobre "Función y concepto",* los conceptos y las relaciones son funciones en el sentido ampliado por mí de esta palabra, y de ahí que debamos distinguir también conceptos de primero y segundo nivel, relaciones del mismo nivel y de distinto nivel.

Como se ve, no han transcurrido en vano los años desde la publicación de mi *Conceptografía* y de mis *Fundamentos*: han hecho madurar la obra. Pero precisamente esto, que yo considero como progreso esencial, no puedo ocultarme que también representa un gran obstáculo en el camino de la difusión y de la influencia de mi libro. Y aquello que constituye una parte no menor de su valor, a saber, el rigor de las cadenas deductivas, me temo que no despertará mucho agradecimiento. Me he alejado aún más de las concepciones usuales, imprimiendo con ello cierto carácter paradójico a mis ideas. Es fácil tropezar aquí o allá, al hojear el libro rápidamente, con alguna expresión que parezca extraña y que provoque un prejuicio desfavorable. Yo mismo puedo comprender en cierta medida esta oposición con la que se encontrarán mis innovaciones, ya que yo mismo, para

*Véase *supra*, pp. 225-248.

lograrlas, tuve que superar primero algo parecido. Pues he llegado a esas expresiones no al azar o por ansias de novedad, sino obligado por el asunto mismo.

Con esto llego al segundo motivo del retraso: el desaliento que a veces me sobrevenía ante el frío recibimiento, o mejor dicho, ante la falta de recibimiento a mis obras antes mencionadas por parte de los matemáticos[4] y la malevolencia de las corrientes científicas contra las cuales mi libro tendrá que luchar. Ya la primera impresión tiene que producir espanto: signos desconocidos, páginas enteras de fórmulas extravagantes. De ahí que durante algún tiempo me haya dedicado a otras cuestiones. Pero a la larga, no podía dejar encerrados en el escritorio los resultados de mi pensamiento que me parecían valiosos, y el esfuerzo empleado exigía siempre nuevos esfuerzos para que el trabajo no fuera en vano. Por eso no me libraba del asunto. En un caso como éste, en que el valor del libro no puede determinarse mediante una lectura rápida, la crítica debería venir en auxilio. Pero, en general, la crítica se paga muy mal. Un crítico nunca podrá esperar ser compensado en dinero por el esfuerzo que representa un estudio profundo de este libro. Sólo me queda esperar que alguien confíe tanto de antemano en el tema que espere que la ganancia interior sea un premio suficiente, y que transmita luego al público el resultado de su examen concienzudo. No se trata de que a mí sólo pueda satisfacerme un comentario elogioso. ¡Al contrario!: siempre preferiré un ataque apoyado en un conocimiento profundo a un elogio que sólo diga generalidades, sin tocar el núcleo de la cuestión. Al lector que se adentre en el libro con esos propósitos, quisiera facilitarle aquí el trabajo con algunas advertencias.

Ante todo, para obtener una idea aproximada de cómo expreso pensamientos con mis signos, será útil examinar detenidamente en la tabla de los teoremas más importantes algunos de los más sencillos, a los que va pareja su traducción. Entonces también se podrá adivinar lo que afirman otros teoremas

[4] En vano se buscarán mis *Fundamentos de la aritmética* en el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* [*Anuario de los progresos de la matemática*]. Otros investigadores en el mismo campo, los señores Dedekind, Otto Stolz, von Helmholtz, parecen desconocer mis obras. Tampoco las menciona Kronecker en su ensayo sobre el concepto de número.

semejantes a los que no sigue una traducción. A continuación, se puede empezar con la introducción y atacar la presentación de la conceptografía. Con todo, aconsejo que primero se trabe con ella un conocimiento fugaz tan sólo y no detenerse demasiado ante dudas particulares. Hubo que recoger algunas consideraciones para poder rebatir todas las objeciones, pero son inesenciales para la comprensión de los enunciados conceptográficos. Entre estas consideraciones cuento la segunda parte del § 8, que en la p. 12 empieza con las palabras "Si definimos ahora..."; además la segunda parte del § 9, que en la p. 15 empieza con las palabras "Cuando digo en general...", y finalmente todo el § 10. En una primera lectura, estos pasajes pueden ser pasados totalmente por alto. Lo mismo vale para los §§ 26 y 28 hasta 32. En cambio, quisiera hacer notar que son especialmente importantes para la comprensión la primera parte del § 8, así como los §§ 12 y 13. Una lectura más detenida puede empezar con el § 34 y llegar hasta el final. Sólo ocasionalmente deberá uno retroceder fugazmente a los §§ leídos. Esto vendrá facilitado por el índice de términos del final y por el índice de materias. Las deducciones de los §§ 49 hasta 52 pueden servir como preparación para la comprensión de las pruebas mismas. Todos los modos de inferencia y de deducción y casi todas las aplicaciones de nuestras leyes fundamentales aparecen ya en este punto. Después de que se haya llegado hasta el final procediendo de este modo, podrá leerse la presentación de la conceptografía una vez más en su contexto y de manera completa, teniendo en cuenta entonces que las estipulaciones que luego no se utilizan, y que por ello parecen innecesarias, sirven para el cumplimiento del principio fundamental de que todos los signos formados correctamente deben referirse a algo, principio que es esencial para conseguir un rigor absoluto. De esta manera creo que desaparecerá paulatinamente la desconfianza que mis innovaciones puedan despertar de momento. El lector verá que mis principios nunca llevan a consecuencias que él mismo no tenga que reconocer como verdaderas. Quizás también tendrá que admitir entonces que había sobrevalorado antes el esfuerzo necesario, que mi proceder sin saltos en realidad facilita la comprensión, una vez se han superado los obstáculos que radican en la novedad de

los signos. ¡Ojalá tenga la suerte de tener un lector o un crítico semejante! Pues una reseña basada en una ojeada superficial fácilmente sería más perjudicial que beneficiosa.

Por lo demás, las perspectivas de mi libro son, por supuesto, escasas. En todo caso hay que descontar a todos los matemáticos que al chocar con expresiones lógicas, como "concepto", "relación", "juicio", piensan: *methaphysica sunt, non leguntur!* y asimismo a los filósofos que a la vista de una fórmula exclaman: *mathematica sunt, non leguntur!*, y serán muy pocos los que no quepan en una de estas categorías. Quizás no es grande el número de los matemáticos que se interesan por la fundamentación de su ciencia, e incluso éstos parecen tener frecuentemente mucha prisa para dejar pronto tras de sí las bases iniciales. Y apenas me atrevo a esperar que convenzan a muchos de ellos mis razones para el penoso rigor y para la extensión que a él va ligada. La costumbre tiene un gran poder sobre los sentimientos. Si puedo comparar la aritmética con un árbol que por arriba se despliega en una multiplicidad de métodos y teoremas, mientras que sus raíces penetran en la profundidad, entonces me parece que el crecimiento de las raíces, en Alemania por lo menos, es débil. Incluso en una obra que se podría contar como una que va en esta dirección, el *Algebra der Logik* del señor E. Schröder, el crecimiento hacia la copa se impone pronto; antes de que se haya alcanzado mayor profundidad, efectúa un giro hacia arriba y logra un florecimiento de métodos y teoremas.

También es desfavorable para mi libro la inclinación tan difundida a admitir como existente sólo lo sensible. Lo que no puede ser percibido con los sentidos, se pretende negar o pasar por alto. Ahora bien, los objetos de la aritmética, los números, son de naturaleza no sensible. ¿Cómo se las arregla uno entonces? ¡Muy fácil! Se toman los signos numéricos por los números. En los signos se tiene algo visible, y esto es lo principal, a fin de cuentas. Claro que los signos tienen propiedades totalmente distintas de las de los números; ¿pero qué importa? Se inventan para ellos las propiedades deseadas mediante supuestas definiciones. Ciertamente es un enigma cómo puede tener lugar una definición cuando se prescinde de cualquier conexión entre signo y designado. Se funden signo y designado

haciéndolos lo más indistinguibles posible; y según sea necesario, entonces, se afirma la existencia señalando la tangibilidad de los signos[5] o se destacan las verdaderas propiedades de los números. A veces parece que se consideran los signos numéricos como figuras de ajedrez y las llamadas definiciones como reglas de juego. El signo, entonces, no designa nada sino que es la cosa misma. Claro que con ello se pasa por alto un detalle, a saber, que con "$3^2 + 4^2 = 5^2$" expresamos un pensamiento, mientras que una posición de figuras de ajedrez no dice nada. Cuando uno se contenta con tales superficialidades, naturalmente no queda sitio para una comprensión más profunda.

Es importante aquí tener una idea clara de lo que es definir y de lo que se puede conseguir mediante definiciones. Con frecuencia parece que se le atribuye una fuerza creadora, mientras que en realidad no ocurre otra cosa sino que se hace resaltar algo delimitándolo y se le asigna un nombre. Así como el geógrafo no crea ningún mar cuando traza fronteras y dice: a la porción de superficie oceánica limitada por estas líneas la llamaré Mar Amarillo, así tampoco el matemático puede crear nada propiamente mediante sus definiciones. No se puede atribuir a una cosa mágicamente, por una mera definición, una propiedad que no tenga ya antes, a no ser la de llamarse con el nombre que se le asigna. Pero que una figura en forma de huevo, que se crea sobre el papel con tinta, haya de recibir mediante una definición la propiedad de que sumada a uno dé uno, esto sólo puedo considerarlo una superstición científica. Del mismo modo se podría crear, por una mera definición, un estudiante aplicado a partir de uno perezoso. La confusión nace aquí fácilmente por la falta de distinción entre concepto y objeto. Si se dice: "Un cuadrado es un rectángulo en el que los lados que se tocan son iguales", se define el concepto *cuadrado*, al indicar las propiedades que algo debe tener para caer bajo este concepto. A estas propiedades las llamo características del concepto. Pero obsérvese que estas características

[5] Véase E. Heine: "Die Elemente der Functionslehre" ["Los elementos de la teoría de funciones"], en la revista *Crelle*, no. 74, p. 173: "Respecto de la definición me coloco en el punto de vista puramente formal, al denominar números a ciertos signos perceptibles, de modo que no se cuestiona la existencia de estos números".

del concepto no son sus propiedades. El concepto *cuadrado* no es un rectángulo; sólo los objetos que caen bajo este concepto son rectángulos, del mismo modo en que el concepto *paño negro* no es negro ni es un paño. Que haya objetos tales aún no lo sabemos directamente a través de la definición. Supongamos ahora que se quiere definir el número cero, por ejemplo, diciendo: es algo que sumado a uno da uno. Con ello se ha definido un concepto, al indicar la propiedad que ha de tener un objeto para caer bajo el concepto. Pero esta propiedad no es propiedad del concepto definido. Por lo que parece, la gente se figura a menudo que, mediante la definición, se ha creado algo que, sumado a uno, da uno. ¡Grave error! Ni el concepto definido tiene esta propiedad, ni la definición garantiza que el concepto no sea vacío. Para afirmar esto es preciso primero hacer una investigación. Sólo una vez se ha probado que hay un objeto y sólo uno con la propiedad requerida, se está en situación de poner a ese objeto el nombre propio de "cero". Crear el cero es, pues, imposible. Repetidas veces he expuesto ya esta opinión, pero, por lo visto, sin éxito.[6]

Tampoco por parte de la lógica dominante puede esperarse comprensión de la distinción que hago entre la característica de un concepto y la propiedad de un objeto,[7] pues la lógica actual parece estar completamente infectada de psicología. Si en vez de las cosas mismas se consideran sólo sus imágenes subjetivas, las representaciones, se pierden naturalmente todas las diferencias reales más finas y aparecen, en cambio, otras que para la lógica carecen totalmente de valor. Y con esto paso a hablar de lo que obstaculiza el influjo de mi libro sobre los lógicos. Se trata de la perniciosa injerencia de la psicología en la lógica. Para el tratamiento de esta ciencia es decisivo cómo se conciben las leyes lógicas, y esto a su vez depende de cómo se entienda la palabra "verdadero". Que las leyes lógicas tienen que ser pautas del pensamiento para alcanzar la verdad es algo reconocido ciertamente por todo el mundo; sólo que esto se olvida demasiado fácilmente. Es funesto aquí el doble sentido

[6] Se ruega a los matemáticos a quienes no les guste extraviarse por los caminos de la filosofía, que interrumpan aquí la lectura del Prólogo.

[7] En la *Logik* del señor B. Erdmann no encuentro ni rastro de esta importante distinción.

de la palabra "ley". En un sentido dice lo que es, en el otro prescribe lo que debe ser. Solamente en este último sentido pueden ser llamadas las leyes lógicas leyes del pensamiento, al fijar el modo como debemos pensar. Toda ley que establezca lo que es, puede concebirse también como una prescripción, pues se tiene que pensar de acuerdo con ella, y en este sentido es por tanto una ley del pensamiento. Esto vale para las leyes geométricas y físicas no menos que para las lógicas. Éstas merecen con mayor derecho el nombre de "leyes del pensamiento" sólo si con ello queremos decir que son las más generales, que siempre que se piensa prescriben cómo hay que pensar. Pero la expresión "ley del pensamiento" induce a la opinión errónea de que estas leyes gobiernan el pensamiento del mismo modo que las leyes naturales los sucesos del mundo exterior. En tal caso no pueden ser otra cosa que leyes psicológicas, pues el pensamiento es un proceso mental. Y si la lógica tuviera que ver algo con estas leyes psicológicas, entonces sería una parte de la psicología. Y así es concebida de hecho. Estas leyes del pensamiento se consideran entonces como pautas en el sentido de que indican un promedio, del mismo modo que puede decirse cómo ocurre la digestión sana en el ser humano, o cómo se habla de manera gramaticalmente correcta, o cómo se viste uno a la moda. En tal caso, sólo se puede decir: según estas leyes rige lo que actualmente los seres humanos en promedio toman por verdadero, y en la medida en que se conoce a los seres humanos; así, pues, si uno quiere concordar con el promedio, debe seguir esas leyes. Pero, así como lo que hoy es moderno dentro de cierto tiempo ya no lo será, y entre los chinos ahora no lo es, así también sólo con limitaciones pueden proponerse las leyes lógicas como determinantes. ¡Esto ciertamente sería así si en la lógica se tratase de lo que se toma por verdadero y no de lo que es verdadero! Y esto es lo que confunden los lógicos psicologistas. Así, por ejemplo, el señor B. Erdmann equipara en el primer volumen de su *Lógica*,[8] pp. 272-275, la verdad con la validez general y fundamenta ésta en la certidumbre general sobre el objeto acerca del cual se juzga, y esta certidumbre a su vez se basa en el acuerdo general de los

[8] *Logik*, Halle a.S., Max Niemeyer, 1892.

emisores del juicio. En definitiva, pues, se reduce la verdad al consenso de los que juzgan. A esto sólo puedo replicar: ser verdad es algo distinto de ser tenido por verdadero, ya sea por parte de un individuo, o de muchos, o de todos, y lo primero no puede reducirse a lo segundo en ningún caso. No hay contradicción en que sea verdadero algo que todos tienen por falso. Por leyes lógicas no entiendo las leyes psicológicas de la aceptación como verdadero, sino las leyes del ser verdad. Si es verdad que yo escribo esto en mi habitación el 13 de julio de 1893, mientras fuera brama el viento, seguirá siendo verdad, aun cuando todos los seres humanos lo consideren luego falso. Y como el ser verdad es independiente de que alguien lo reconozca como tal, resulta que las leyes del ser verdadero no son leyes psicológicas, sino mojones clavados en un suelo eterno, que ciertamente pueden ser pasados por alto por nuestro pensamiento, pero nunca removidos. Y puesto que son leyes del ser verdadero, son determinantes para nuestro pensamiento si éste quiere alcanzar la verdad. Estas leyes no están con nuestro pensamiento en la misma relación que las leyes gramaticales con el lenguaje, de modo que fueran expresión de la naturaleza de nuestro pensamiento humano y cambiasen con él. Completamente distinta es, naturalmente, la concepción de las leyes lógicas del señor Erdmann. Él duda de su validez incondicionada, eterna, y pretende limitarlas a nuestro pensamiento, tal como éste es ahora (pp. 375 y ss.). "Nuestro pensamiento" sin duda sólo puede significar el pensamiento de la humanidad conocida hasta ahora. Según esto, quedaría abierta la posibilidad de que se descubrieran hombres u otro tipo de seres que pudieran emitir juicios contradictorios con nuestras leyes lógicas. ¿Y qué si esto ocurriera realmente? El señor Erdmann diría: vemos, pues, que esos principios no valen universalmente. ¡Sin duda! Si han de ser leyes psicológicas, su expresión verbal ha de dar a conocer la especie de seres cuyo pensamiento está empíricamente gobernado por ellas. Yo diría: existen seres, pues, que no conocen ciertas verdades directamente como nosotros, sino que quizás están obligados a marchar por el largo camino de la inducción. ¿Pero qué ocurriría si también se encontrasen seres cuyas leyes de pensamiento contradijesen totalmente las nuestras y que, por tanto, su aplicación condujese también

a resultados opuestos? El lógico psicologista no podría hacer más que admitir esto y decir: para estos seres valen esas leyes, para nosotros éstas. Yo diría: estos seres padecen un tipo de locura hasta ahora desconocido. Quien por leyes lógicas entienda aquellas que prescriben cómo hay que pensar, o leyes del ser verdadero, no leyes naturales de la aceptación humana, ése preguntará: ¿Quién tiene razón? ¿Qué leyes de la aceptación de algo como verdadero están en concordancia con las leyes del ser verdad? El lógico psicologista no puede hacer estas preguntas, pues con ellas admitiría leyes del ser verdadero que no serían psicológicas. ¿Hay peor manera de falsear el sentido de la palabra "verdadero" que cuando en él se pretende incluir una relación con el emisor del juicio? Que no se me objete que la oración "yo estoy hambriento" puede ser verdadera para uno y falsa para otro. La oración lo puede ser, ciertamente, pero no el pensamiento; pues la palabra "yo" se refiere en la boca del otro a otra persona, y por eso la oración emitida por el otro expresa otro pensamiento. Todas las determinaciones de lugar, de tiempo, etc., pertenecen al pensamiento de cuya verdad se trata; el ser verdad en sí mismo es no espacial y atemporal. ¿Cómo interpretar realmente el principio de identidad? ¿Así quizás: "En el año 1893 es imposible a los hombres admitir que un objeto es distinto de sí mismo", o bien así: "Todo objeto es idéntico consigo mismo"? La primera ley trata de seres humanos y contiene una determinación temporal; en la segunda no se habla ni de seres humanos ni de tiempo. Ésta es una ley del ser verdad, aquélla una ley del tomar como verdadero los seres humanos. El contenido de una y otra es completamente distinto, y son independientes entre sí, de modo que ninguna de las dos puede ser inferida de la otra. Por ello da lugar a confusión designar a ambas con el mismo nombre de principio de identidad. Tales confusiones de cosas radicalmente diferentes son las responsables de la terrible falta de claridad que hallamos en los lógicos psicologistas.

Ahora bien, la pregunta de por qué y con qué justificación admitimos como verdadera una ley lógica sólo puede ser contestada por la lógica reduciéndola a otras leyes lógicas. Cuando esto no es posible, la pregunta seguirá en pie. Saliéndonos de la lógica podemos decir: por nuestra naturaleza y por las circunstancias externas, estamos obligados a emitir juicios, y cuando emitimos juicios no podemos prescindir de esta ley —la de identidad, por ejemplo—; tenemos que reconocerla si no queremos hacer caer nuestro pensamiento en confusión y renunciar, en definitiva, a cualquier juicio. No voy a discutir ni a apoyar esta opinión; sólo quiero observar que aquí no tenemos ninguna conclusión lógica. No se da una razón del ser verdad, sino de nuestro tomar por verdadero. Y además: esta imposibilidad que tenemos de prescindir de la ley no nos impide suponer seres que prescindan de ella; pero sí nos impide suponer que estos seres tienen razón en hacerlo; también nos impide dudar de si la razón la tenemos nosotros o ellos. Por lo menos esto vale para mí. Si otros se atreven a admitir una ley y de golpe dudar de ella, esto me parece como si fuese un intento de salirse de la propia piel, del cual no puedo más que prevenir vehementemente. Quien haya reconocido una vez una ley del ser verdad, habrá reconocido con ello una ley que prescribe cómo hay que juzgar, donde sea, cuando sea y por quien sea.

Echando una mirada de conjunto, me parece que lo que origina la polémica es la distinta concepción de lo verdadero. Para mí lo verdadero es algo objetivo, independiente del emisor de juicios, mientras que para los lógicos psicologistas no lo es. Lo que el señor B. Erdmann llama "certeza objetiva" es sólo el reconocimiento general por parte de los emisores de juicios, que, por lo tanto, no es independiente de éstos, sino que puede cambiar con su naturaleza mental.

Podemos concebir la diferencia con mayor generalidad aún: yo admito un dominio de lo objetivo no real, mientras que los lógicos psicologistas consideran lo no real como subjetivo sin más. Y, no obstante, no se ve claro por qué lo que tiene una existencia independiente del emisor de juicios debe ser real, es decir, debe poder actuar directa o indirectamente sobre los sentidos. No se puede descubrir tal conexión entre los conceptos. Incluso pueden señalarse ejemplos que muestran lo contrario. El número uno, por ejemplo, no es fácil considerarlo como real, a menos que sea seguidor de J.S. Mill. Por otra parte es imposible asignar a cada persona su propio uno, pues primero habría que investigar hasta qué punto coinciden las propiedades de estos unos. Y si alguien dijera "uno por uno es uno"

y otro dijera "uno por uno es dos", sólo se podría constatar la diferencia y decir: tu uno tiene esta propiedad, el mío esta otra. No tendría ningún sentido una discusión acerca de quién tiene la razón ni un intento de enseñanza, pues para ello haría falta un objeto común. Evidentemente, esto es totalmente contrario al sentido de la palabra "uno" y al sentido de la proposición "uno por uno es uno". Dado que el uno, en cuanto que es el mismo para todos, se presenta a todos del mismo modo, es tan imposible investigarlo por medio de la observación psicológica como la Luna. Si bien hay representaciones del uno en las mentes individuales, éstas deben ser distinguidas del uno, al igual que las representaciones de la Luna deben ser distinguidas de la Luna misma. Como los lógicos psicologistas ignoran la posibilidad de lo no real objetivo, consideran que los conceptos son representaciones, con lo cual asignan su estudio a la psicología. Pero la verdadera situación pesa demasiado como para que esto sea fácil de realizar. Y así se llega a una oscilación en el uso de la palabra "representación": unas veces parece referirse a algo que pertenece a la vida mental del individuo y se fusiona con otras representaciones, se asocia con ellas, según leyes psicológicas, y otras veces parece referirse a algo que se presenta a todos del mismo modo, sin que se nombre o tan siquiera se presuponga un sujeto de representación. Estos dos usos son inconciliables, pues aquellas asociaciones o fusiones ocurren sólo en el sujeto de representación y ocurren sólo en un estado que es tan absolutamente privado a este sujeto de representación como su alegría o su dolor. No hay que olvidar nunca que las representaciones de personas distintas, por muy parecidas que puedan ser, lo cual, por otra parte, nosotros no podemos comprobar exactamente, no coinciden en una sola, sino que deben ser diferenciadas. Cada uno tiene sus representaciones, que no son a la vez las de otro. Naturalmente, aquí entiendo "representación" en el sentido psicológico. El vacilante uso de esta palabra provoca confusión y ayuda a los lógicos psicologistas a ocultar su debilidad. ¡Cuándo se pondrá fin de una vez a esto! De este modo todo es arrastrado en definitiva al dominio de la psicología; va desapareciendo cada vez más la frontera entre lo objetivo y lo subjetivo, e incluso objetos reales son tratados psicológicamente como representaciones.

Pues, ¿qué es *real* sino un predicado? ¿Y qué son los predicados lógicos sino representaciones? Así desemboca todo en el idealismo y, siendo más consecuentes, en el solipsismo. Si cada uno designase con la palabra "Luna" algo distinto, a saber, una de sus representaciones, del mismo modo como con la exclamación "¡ay!" expresa su dolor, entonces estaría justificado el modo de consideración psicologista; pero una discusión sobre las propiedades de la Luna carecería de objeto: uno podría muy bien afirmar de su Luna lo contrario de lo que otro diría, con la misma razón, de la suya. Si no pudiéramos concebir más que lo que está en nosotros mismos, sería imposible una lucha de opiniones, una comprensión mutua, porque faltaría el terreno común, y éste no puede ser ninguna representación en el sentido de la psicología. No habría nada parecido a la lógica que estuviera encargado de arbitrar en la lucha de opiniones.

Pero para no dar la impresión de que estoy luchando contra molinos de viento, voy a mostrar en un libro determinado el hundimiento insoslayable en el idealismo. Escojo para ello la antes mencionada *Logik* del señor B. Erdmann como una de las obras más recientes de la orientación psicologista, a la que nadie querrá negar cierta importancia. Consideremos primero el siguiente enunciado (I, p. 85):

> Así, pues, la psicología enseña con certeza que los objetos del recuerdo y de la imaginación son, al igual que los de la representación alucinatoria e ilusoria patológica, de naturaleza ideal... Ideal es también todo el dominio de las representaciones propiamente matemáticas, desde la serie de los números hasta los objetos de la Mecánica.

¡Qué comparación! ¡Así, pues, el número diez debe estar al mismo nivel que las alucinaciones! Aquí se confunde evidentemente lo no real objetivo con lo subjetivo. Hay cosas objetivas que son reales, y otras no. *Real* es sólo uno de tantos predicados, y a la lógica no le interesa más éste que el predicado *algebraico* aplicado a una curva. Naturalmente, a causa de esta confusión, el señor Erdmann se pierde en la metafísica, por mucho que trate de mantenerse libre de ella. Considero que es síntoma seguro de error el que la lógica necesite de la metafísica y la psicología, ciencias estas mismas que precisan de

principios lógicos. ¿Cuál es, entonces, la genuina base originaria sobre la que todo descansa? ¿O es como en el cuento de Münchhausen, que él mismo se sacaba del pantano tirándose de los pelos? Dudo mucho de esta posibilidad y sospecho que el señor Erdmann se quedará hundido en su pantano psicológico-metafísico.

No existe una verdadera objetividad para el señor Erdmann, pues todo es representación. Nos convenceremos de ello si seguimos sus propias afirmaciones. En la página 187 del primer volumen, leemos:

> En cuanto que es una relación entre cosas representadas, el juicio presupone dos puntos relacionales, entre los que tiene lugar la relación. En cuanto que es una predicación sobre lo representado, exige que uno de estos puntos relacionales se defina como el objeto del que se predica algo, el sujeto..., el segundo como el objeto que se predica, el predicado...

Vemos aquí ante todo que tanto el sujeto, del que se predica algo, como el predicado, son calificados de objeto o representado. En vez de "el objeto", podría haber dicho también "lo representado"; en efecto, leemos (I, p. 81): "Pues los objetos son lo representado." Pero, a la inversa, también todo lo representado debe ser objeto. En la página 38 se dice:

> Por su origen, lo representado se divide, por una parte, en objetos de la percepción sensorial y de la conciencia de sí mismo, y por otra, en primitivo y derivado.

Lo que nace de la percepción sensorial y de la conciencia de sí mismo es, sin duda, de naturaleza mental. Los objetos, lo representado y con ello también sujeto y predicado son atribuidos a la psicología. Esto viene confirmado por el siguiente pasaje (I, pp. 147 y 148):

> Es lo representado o la representación sin más. Pues ambos son una y la misma cosa: lo representado es representación, la representación es lo representado.

La palabra "representación" generalmente se toma en sentido psicológico; que éste es también el uso que le da el señor Erdmann, lo vemos por los pasajes:

"Conciencia, por consiguiente, es el género de sentir, representar, querer" (p. 35), y

"El representar se compone de las representaciones... y de los trascursos de representación" (p. 36).

Por ello no deberíamos extrañarnos de que un objeto surja por vía psicológica:

> En la medida en que una masa de percepciones... presenta algo análogo a estímulos anteriores y a las excitaciones emitidas por ellos, *reproduce* los residuos de la memoria que procedían de lo análogo en los estímulos anteriores y se *funde* con ellos para formar el objeto de la representación apercibida. (I, p. 42)

En la página 43, se muestra, por ejemplo, cómo se crea por vía puramente psicológica, sin plancha ni tinta ni prensa ni papel, un grabado de acero de la Madonna Sixtina de Rafael. Después de esto, nadie puede dudar de que el objeto, del que se predica algo, ha de ser, según la opinión del señor Erdmann, el sujeto de una representación en el sentido psicológico, lo mismo que el predicado, el objeto que se predica. Si esto fuera cierto, de ningún sujeto podría predicarse con verdad que es verde; pues no hay representaciones verdes. Tampoco podría predicar de ningún sujeto que es independiente del ser representado o de mí, el sujeto de representación, como tampoco mis decisiones son independientes de mi voluntad ni de mí, el sujeto de voluntad, sino que serían aniquiladas conmigo si yo fuera aniquilado. Para el señor Erdmann no hay, pues, una auténtica objetividad, como también se desprende del hecho de que pone lo representado o la representación en general, el objeto en el sentido más general de la palabra, como género sumo (γενικώτατον, *genus summum*) (p. 147). Es, por tanto, un idealista. Si los idealistas pensasen consecuentemente, no considerarían la oración "Carlomagno conquistó a los sajones" ni verdadera ni falsa, sino como ficción, tal como estamos acostumbrados a concebir, por ejemplo, la oración "Neso llevó a Deyanira al otro lado del río Eveno", pues también la oración

"Neso llevó a Deyanira al otro lado del río Eveno" podría ser verdadera sólo si el nombre "Neso" tuviera un portador. Ciertamente no sería fácil alejar de este punto de vista a los idealistas. Pero no tenemos que tolerar que falseen el sentido de la oración como si yo quisiera predicar algo acerca de mi representación cuando hablo de Carlomagno; yo quiero designar a un hombre independiente de mí y de mi representación y afirmar algo sobre él. Se puede conceder a los idealistas que la consecución de este propósito no es totalmente segura, que quizás, sin quererlo, me salgo de la verdad para caer en la ficción. Pero con ello no se puede cambiar nada del sentido. Con la oración "esta brizna de hierba es verde" no expreso nada sobre mi representación; con las palabras "esta brizna de hierba" no designo ninguna de mis representaciones, y, si así lo hiciera, la oración sería falsa. Aquí aparece un segundo falseamiento, a saber, que mi representación de lo verde se predique de mi representación de esta brizna de hierba. Repito: en esta oración no se trata en absoluto de mis representaciones; se le daría un sentido totalmente distinto. Dicho sea de pasada, no entiendo en absoluto cómo una representación puede predicarse de algo. Asimismo sería un falseamiento si se quisiera decir que, en la oración "la Luna es independiente de mí y de mi acto de representación", mi representación del ser independiente de mí y de mi acto de representación se predica de mi representación de la Luna. Con ello se habría abandonado la objetividad en el sentido propio de la palabra y se pondría algo muy diferente en su lugar. Es posible, ciertamente, que al emitir un juicio pueda ocurrir tal juego de representaciones; pero no es éste el sentido de la oración. También puede observarse que en la misma oración, y con el mismo sentido de la oración, el juego de representaciones puede ser totalmente distinto. Y esta manifestación secundaria, indiferente para la lógica, es lo que nuestros lógicos toman por objeto propio de su investigación.

Qué comprensible es que la naturaleza del tema nos advierta de un hundimiento en el idealismo, y que el señor Erdmann no esté dispuesto a admitir que para él no hay auténtica objetividad; pero igualmente comprensible es lo vano de su esfuerzo. Pues si todos los sujetos y todos los predicados son representaciones, y si todo pensamiento no es sino la producción, co-

nexión y modificación de representaciones, no se comprende cómo puede alcanzarse nunca algo objetivo. Una indicación de este vano forcejeo es ya el uso de las palabras "representado" y "objeto", que a primera vista parecen querer designar algo objetivo en contraposición con la representación, pero sólo aparentemente; pues está claro que se refieren a lo mismo. ¿Para qué, pues, esta profusión de expresiones? No es difícil adivinarlo. Nótese también que se habla de un objeto de representación, si bien el objeto mismo ha de ser una representación. Éste sería, pues, una representación de una representación. ¿A qué relación entre representaciones nos referimos? Por oscuro que esto sea, también es comprensible, sin embargo, cómo el conflicto de la naturaleza del tema con el idealismo puede originar semejante embrollo. Por todas partes vemos aquí cómo se confunden el objeto del que me hago una representación con esa representación, volviendo a aparecer luego la distinción. Este conflicto lo detectamos también en lo siguiente:

> Pues una representación cuyo objeto es general no por ello es, en cuanto tal, en cuanto proceso consciente, general, como tampoco es real una representación porque su objeto sea real, ni un objeto que sentimos como dulce... nos es dado mediante representaciones que en sí mismas sean dulces (I, p. 86).

En este pasaje se hace evidente la verdadera situación. Yo casi podría estar de acuerdo; pero observemos que, según los principios erdmannianos, el objeto de una representación y el objeto que viene dado por representaciones son también representaciones, de modo que toda diferenciación es en vano. Ruego que se retengan en la memoria las palabras "en cuanto", que aparecen similarmente en el siguiente pasaje, también en la página 83:

> Cuando se predica de un objeto la realidad, el sujeto material de este juicio no es el objeto o lo representado en cuanto tal, sino más bien *lo trascendente*, que se presupone como fundamento óntico de lo representado, que se manifiesta en lo representado. Lo trascendente no debe suponerse en tal caso que es lo incognoscible..., sino que su trascendencia ha de consistir solamente en su independencia del ser representado.

¡Otro vano intento de sacarse del pantano! Si tomamos esta frase en serio, vemos que se dice que en este caso el sujeto no es una representación. Pero si esto es posible, entonces no se comprende por qué en el caso de otros predicados, que indican modos especiales de efectividad o realidad, el sujeto real tenga que ser absolutamente una representación, por ejemplo, en el juicio "la Tierra es magnética". Y con ello llegaríamos al resultado de que sólo en unos pocos juicios sería el sujeto real una representación. Pero una vez admitido que no es esencial ni para el sujeto ni para el predicado ser una representación, entonces hemos quitado la base en qué apoyarse a toda lógica psicologista. Aparecen entonces como carentes de propósito todas las consideraciones psicológicas de que están repletos actualmente nuestros libros de lógica.

Pero, ciertamente, no debemos tomar tan en serio la trascendencia del señor Erdmann. Basta sólo recordar su afirmación (I, p. 148): "Al género supremo está también subordinado el límite *metafísico* de nuestra representación, lo trascendente", y se hunde; pues este género supremo (γενικώτατον, *genus summum*) es según él precisamente lo representado o la representación en general. ¿O es que la palabra "trascendente" podría ser empleada en otro sentido que el presente? En cualquier caso, habría que pensar que lo trascendente debe estar subordinado al género supremo.

Detengámonos todavía un poco en la expresión "en cuanto tal". Supongamos el caso de que alguien quisiera hacerme creer que todos los objetos no son otra cosa que imágenes sobre la retina de mi ojo. Bien, yo todavía no respondo nada. Pero prosigue afirmando él que es mayor la torre que la ventana a través de la cual yo creo ver la primera. A esto diría yo: o bien no son ni la torre ni la ventana imágenes retinianas en mi ojo, en cuyo caso puede ser la torre mayor que la ventana; o bien son la torre y la ventana, como tú dices, imágenes en mi retina; entonces la torre no es mayor, sino menor, que la ventana. Con el "en cuanto tal" quiere escapar él al dilema y dice: la imagen retiniana de la torre en cuanto tal no es mayor que la de la ventana. A esto yo casi reventaría de indignación y le gritaría: pues entonces la imagen retiniana de la torre no es mayor que la de la ventana, y si la torre fuera la imagen retiniana de la torre y la ventana la imagen retiniana de la ventana, entonces simplemente la torre no sería mayor que la ventana, y si tu lógica te enseña algo distinto es que no sirve para nada. Este "en cuanto tal" es un invento excelente para autores confusos que no quieren decir ni sí ni no. Pero yo no tolero esta vacilación entre ambos, sino que pregunto: si de un objeto se afirma la realidad, ¿es entonces el sujeto real del juicio la representación, sí o no? Si no lo es, lo es sin duda lo trascendente, que se presupone como fundamento del ser de esta representación. Pero lo trascendente es a su vez representado o representación. Así nos vemos llevados a la suposición ulterior de que el sujeto del juicio no es lo trascendente representado, sino lo trascendente que se presupone como fundamento del ser de lo trascendente representado. De este modo, no acabaríamos nunca; por muy lejos que fuéramos, nunca saldríamos de lo subjetivo. Por lo demás, podríamos empezar el mismo juego con el predicado, y no sólo con el predicado *real*, sino igualmente, por ejemplo, con *dulce*. En este caso, primero diríamos: si de un objeto se predica la realidad o la dulzura, el predicado real no es la realidad o dulzura representadas, sino lo trascendente, que se presupone como fundamento de lo representado. Pero con ello no acabaríamos nunca, sino que tendríamos que ir siempre más allá. ¿Qué se puede aprender de todo esto? Que la lógica psicologista va a la deriva al concebir sujeto y predicado de los juicios como representaciones en el sentido de la psicología, que las consideraciones psicológicas son tan inadecuadas en lógica, como lo son en astronomía o geología. Si queremos salirnos de lo subjetivo, debemos concebir el conocimiento como una actividad que no produce lo conocido, sino que agarra algo que ya existe. La imagen del agarrar es muy adecuada para explicar la cuestión. Si yo agarro un lápiz, en mi cuerpo ocurren ciertos procesos: excitaciones nerviosas, cambios en la tensión y la presión de los músculos, tendones y huesos, modificaciones en la circulación sanguínea. Pero el conjunto de estos procesos no es el lápiz, ni lo produce. Éste existe independientemente de tales procesos. Y es esencial para el agarrar que haya algo que sea agarrado; los cambios internos por sí solos no son el agarrar. Así, también, lo que aprehendemos mentalmente existe independientemente de esta actividad, de las representaciones y de

sus cambios, que son parte de esta aprehensión o la acompañan; no es ni la totalidad de estos procesos, ni es producido por ellos como parte de nuestra vida mental.

Veamos finalmente cómo a los lógicos psicologistas se les escapan diferencias reales más finas. Ya se ha mencionado la confusión entre característica y propiedad. Con esto está relacionada la diferencia subrayada por mí entre objeto y concepto, así como la que hay entre conceptos de primero y segundo nivel. Estas distinciones, naturalmente, son incognoscibles para los lógicos psicologistas, pues para ellos todo es representación. Por esto también carecen de una concepción correcta del tipo de juicios que en castellano hacemos con "hay". Esta existencia es confundida por el señor B. Erdmann (*Logik*, I, p. 311) con la realidad, que, como hemos visto, no es distinguida claramente de la objetividad. ¿De qué cosa afirmamos propiamente que es real cuando decimos que hay raíces cuadradas de cuatro? ¿Acaso del dos o del -2? Pero ni uno ni otro son nombrados aquí en absoluto. Y si yo quisiera decir que el número dos es actual, o que es efectivo o real, esto sería falso y totalmente distinto de lo que quiero decir con la oración "hay raíces cuadradas de cuatro". La confusión que se da aquí es casi la más grosera posible, pues no ocurre entre conceptos del mismo nivel, sino que se mezcla un concepto de primer nivel con uno de segundo. Esto es característico de la torpeza de la lógica psicologista. Más generalmente, si se ha llegado a un punto de vista algo más libre, uno se asombrará de que tal error pueda ser cometido por un lógico profesional; pero, naturalmente, primero hay que haber comprendido la diferencia entre conceptos de primero y segundo nivel, antes de que se pueda medir la magnitud de este error, y de ello la lógica psicologista es sin duda incapaz. El gran obstáculo con que casi siempre choca ésta es que sus representantes esperan milagros de la profundización psicológica, cuando ésta no es más que una corrupción psicológica de la lógica. Y así aparecen nuestros gruesos libros de lógica, hinchados de dañina grasa psicológica que oculta todas las formas más finas. De este modo se hace imposible una colaboración fructífera entre matemáticos y lógicos. Mientras el matemático define objetos, conceptos y relaciones, el lógico psicologista averigua el progreso y la transformación de las representaciones, y en el fondo, las definiciones del matemático no pueden parecerle sino insensatas, porque no reflejan la esencia de la representación. Echa un vistazo dentro de su caja psicológica y le dice al matemático: No veo nada de todo esto que tú defines. Y el otro no puede sino responder: ¡No me extraña!, porque no está donde tú buscas.

Baste esto para poner en claro, por contraposición, mi punto de vista lógico. La distancia respecto de la lógica psicologista me parece tan enorme, que no hay ningún prospecto de que mi libro tenga un efecto inmediato sobre ella. Me parece como si el árbol plantado por mí debiera levantar un peso descomunal para procurarse espacio y luz. Y, con todo, no quisiera abandonar la esperanza de que más tarde mi libro pueda contribuir a derrocar la lógica psicologista. Para ello no deberá faltarle cierto reconocimiento de los matemáticos, lo cual les forzará a enfrentarse con él. Y creo poder esperar cierto apoyo de esta parte; en definitiva, los matemáticos tienen que hacer causa común contra los lógicos psicologistas. Tan pronto éstos se dignen estudiar seriamente mi libro, aunque sólo sea para atacarlo, creo que habré ganado la partida. Pues toda la Parte II es en realidad una demostración de mis ideas lógicas. De antemano es improbable que una construcción semejante pudiera llevarse a cabo sobre una base insegura, errónea. Cualquiera que tenga otras ideas puede intentar montar sobre ellas una construcción parecida y echará de ver, según creo, que no funciona o por lo menos que no funciona tan bien. Y como refutación sólo podría admitir yo que alguien mostrase en la práctica que se puede construir con ideas básicas distintas un edificio mejor, más sólido, o que alguien me demostrase que mis principios conducen a consecuencias manifiestamente falsas. Pero esto no lo conseguirá nadie. Ojalá que este libro contribuya, aunque sea tarde, a una renovación de la lógica.

Jena, julio de 1893.

INTRODUCCIÓN AL VOLUMEN I*

En mis *Fundamentos de la aritmética*[1] traté de hacer verosímil la idea de que la aritmética es una rama de la lógica y que no necesita apoyarse ni en la experiencia ni en la intuición para sus pruebas. En este libro se tratará de confirmar esta idea derivando las leyes más simples de los números cardinales por medios únicamente lógicos. Pero, para que esto sea convincente, hay que ser considerablemente más exigente con el desarrollo de las pruebas de lo que es usual en la aritmética.[2] Hay que determinar previamente un conjunto de modos de deducción y de inferencia, y no hay que dar ni un paso que no siga esos modos. Así, pues, al pasar de un juicio a otro nuevo, no hay que quedar satisfecho, como hacen los matemáticos casi siempre, con que el paso aparezca como correcto, sino que hay que descomponerlo en los pasos lógicos simples de que está compuesto, y a menudo éstos no son pocos. De este modo no puede pasar inadvertida ninguna presuposición; hay que poner al descubierto cada axioma que nos sea preciso, pues justamente las presuposiciones tácitas y hechas sin clara conciencia impiden la comprensión de la naturaleza epistemológica de una ley.

Naturalmente, para que semejante empresa pueda tener éxito, los conceptos que se necesitan tienen que ser concebidos con rigor. Esto vale, en particular, para lo que los matemáticos quieren designar con la palabra "conjunto". Dedekind[3] emplea

*Traducción de Carlos Ulises Moulines, publicada originalmente en Frege 1971, revisada para el presente volumen.

[1] Breslau, 1884. [Véase *supra*, pp. 361–487.]

[2] Véanse mis *Fundamentos*, § 90.

[3] *Was sind und was sollen die Zahlen?* [*¿Qué son y qué deben ser los números?*], Braunschweig, 1888.

la palabra "sistema" con el mismo propósito. Pero, a pesar de los estudios sobre este punto que había presentado ya cuatro años antes en mis *Fundamentos*, no se encuentra en Dedekind una clara comprensión de la esencia de la cuestión, si bien a veces se acerca al núcleo, como en el pasaje (p. 2):

> Un sistema S tal [...] está completamente determinado si para cada cosa está determinado si es o no elemento de S. El sistema S es, por tanto, el mismo que el sistema T, en signos $S = T$, si todo elemento de S es también elemento de T, y todo elemento de T es también elemento de S.

Frente a esto, otros pasajes presentan extravíos, como, por ejemplo, el siguiente (pp. 1 y 2): "Ocurre muy frecuentemente que cosas diversas $a, b, c \ldots$, concebidas por cierto motivo bajo un punto de vista común, son reunidas en la mente, y entonces se dice que constituyen un *sistema* S". Aquí, al hablar de punto de vista común, se deja ver ciertamente la verdadera situación; pero esa concepción, esa reunión en la mente, no es ninguna característica objetiva. Pregunto: ¿reunidas en la mente de quién? ¿Si se reúnen en una mente, y en otra no, constituyen entonces un sistema? Lo que ha de ser reunido en mi mente debe estar contenido, sin duda, también en mi mente. ¿Acaso fuera de mí las cosas no constituyen sistemas? ¿Es el sistema una configuración subjetiva en la mente individual? ¿Es la constelación de Orión, según esto, un sistema? ¿Y cuáles son sus elementos? ¿Las estrellas, las moléculas o los átomos? Es de notar el siguiente pasaje (p. 2):

> Para uniformar el modo de expresión es conveniente admitir también el caso especial en que un sistema S consta de un *único* elemento a (de uno y sólo uno); es decir, que la cosa a es elemento de S, pero ninguna cosa distinta de a es elemento de S.

Posteriormente (p. 3) esto se interpreta de modo que todo elemento s de un sistema S puede ser concebido a su vez como un sistema. Dado que en este caso coinciden elemento y sistema, aparece aquí especialmente claro que, según Dedekind, los elementos constituyen la verdadera realidad del sistema. E. Schröder, en sus *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [*Conferencias sobre el álgebra de la lógica*],[4] da un paso más allá que Dedekind, al hacer notar la conexión de los sistemas de éste con los conceptos, conexión que Dedekind parece haber pasado por alto. De hecho, lo que Dedekind realmente quiere decir, cuando dice que un sistema es parte de otro sistema (p. 2), es la subordinación de un concepto bajo otro concepto o el caer un objeto bajo un concepto, dos casos diferentes, que ni él ni Schröder distinguen en absoluto, a consecuencia de un error de concepción común a ambos, pues también Schröder considera que son sus elementos lo que constituye su *clase*. En rigor, tan ilícitas son en la teoría de Schröder las clases vacías, como en la de Dedekind los sistemas vacíos; pero la necesidad de ello, que surge de la naturaleza misma de las cosas, se impone en ambos autores de manera diversa. En el pasaje antes interrumpido prosigue Dedekind así: "Por el contrario, al sistema vacío, que no contiene ningún elemento, lo vamos a excluir aquí totalmente, por determinadas razones, si bien para otras investigaciones puede ser conveniente inventarlo." Según esto, pues, un invento semejante estaría permitido; sólo que, por determinadas razones, se renuncia a él. Schröder se atreve a inventar la clase vacía. Por lo que parece, pues, ambos están de acuerdo con muchos matemáticos en que se puede inventar cualquier cosa que no exista, o incluso que sea inconcebible, pues si los elementos son los que constituyen el sistema, entonces se suprime el sistema al suprimir los elementos. Pero ¿dónde están los límites de esta arbitrariedad inventiva, si es que los hay?; sobre esto será difícil hallar claridad y acuerdo; y, sin embargo, la corrección de una prueba puede depender de ello. Creo haber liquidado de una vez por todas esta cuestión para todas las personas razonables en mis *Fundamentos de la aritmética* (§ 92 y ss.) y en mi conferencia *Über formale Theorien der Arithmetik* [*Sobre las teorías formales de la aritmética*].[5] Schröder inventa su cero, enredándose así en grandes dificultades.[6] Si bien a Schröder y a Dedekind les falta una clara comprensión, con todo se impone la verdadera

[4] Leipzig, 1890, p. 253.
[5] Informes de las reuniones de la Sociedad de Jena de Medicina y Ciencia natural, año 1885, reunión del 17 de julio.
[6] Véase E.G. Husserl en los *Göttinger gel. Anzeigen*, 1891, no. 7, p. 272, quien, sin embargo, no resuelve el enredo.

situación siempre que hay que especificar un sistema. Dedekind indica las propiedades que tiene que tener una cosa para pertenecer al sistema dado, es decir, define un concepto mediante sus características.[7] Ahora bien, si las características son lo que constituye el concepto, y no los objetos que caen bajo el concepto, entonces a un concepto vacío no puede oponerse ninguna dificultad ni objeción. Claro que entonces un objeto no puede ser nunca concepto a la vez; y un concepto bajo el cual caiga un solo objeto no debe ser confundido con este último. Así quedará establecido definitivamente que la asignación de número contiene una predicación sobre un concepto.[8] He reducido el número a la relación de equinumerosidad y ésta a la correlación biunívoca [*eindeutige Zuordnung*]. De la palabra "correlación" puede decirse lo mismo que de la palabra "conjunto". Ambas se usan ahora con frecuencia en la matemática, y en la mayoría de los casos falta una comprensión profunda de lo que realmente se quiere designar con ello. Si es correcta mi idea de que la aritmética es una rama de la lógica, entonces habrá que elegir en vez de "correlación" una expresión puramente lógica. Y escojo la de "relación" [*Beziehung*]. Concepto y relación son las piedras fundamentales sobre las que construyo mi edificio.

Pero incluso después de haber sido concebidos rigurosamente los conceptos, sería difícil, casi imposible, satisfacer sin ayudas especiales las exigencias que tenemos que imponer al desarrollo de las pruebas. Una ayuda tal es mi conceptografía, cuya exposición será mi primera tarea. Pero antes quiero hacer la siguiente observación. No siempre será posible dar definiciones regulares de todo, porque nuestro esfuerzo ha de ser precisamente retroceder hasta lo lógicamente simple, que en cuanto tal no es propiamente definible. Tendré que contentarme entonces con indicar mediante alusiones lo que quiero decir. Debo esforzarme sobre todo por ser comprendido; y por esto trataré de desarrollar las cosas paulatinamente, y no trataré de alcanzar desde el principio la plena generalidad ni la expresión definitiva. Quizás sorprenderá el uso frecuente que

[7] Sobre *concepto, objeto, propiedad, característica*, véanse mis *Fundamentos*, §§ 38, 47 y 53, y mi ensayo "Sobre concepto y objeto" [*supra*, pp. 277 y ss.].

[8] § 46 de mis *Fundamentos*.

hago de las comillas; con ellas distingo los casos en que hablo de los signos mismos de aquellos en los que hablo de su referencia. Por pedante que esto pueda parecer, lo considero necesario. Es curioso hasta qué punto un modo de hablar o de escribir inexacto, que quizás originalmente se empleaba sólo por comodidad y en aras de la brevedad, pero con plena conciencia de su inexactitud, puede llegar a confundir el pensamiento una vez desaparecida esa conciencia. El resultado final ha sido que se han tomado los numerales por los números, el nombre por lo denominado, el mero instrumento por el verdadero objeto de la aritmética. Tales experiencias enseñan cuán necesario es poner las máximas exigencias a la precisión del modo de hablar y de escribir. Y me he esforzado por respetar estas exigencias, por lo menos siempre que me parecía que algo dependía de ellas.

VOLUMEN II, PARTE III, §§ 55–67*

[1903]

PRINCIPIOS DE LA DEFINICIÓN

§ 55. Antes de examinar lo que los más notables matemáticos nos han enseñado acerca de los números, en particular acerca de los números irracionales, será beneficioso establecer y justificar primero algunos principios de la definición que son desatendidos por casi todos los autores en esta área, de modo que no tengamos que discutir la cuestión en detalle en cada ocasión que se presente. En el volumen I ya establecimos tales principios para el caso de la conceptografía; aquí nos ocuparemos principalmente de las definiciones en el lenguaje ordinario. Sin duda saldrán a la luz aquellas diferencias entre las dos exposiciones que tienen sus raíces en la naturaleza diferente de esos medios de expresión.

1 . *Principio de compleción*

§ 56. Una definición de un concepto (un predicado posible) tiene que ser completa. Para cada objeto tiene que determinar de manera inequívoca si éste cae o no bajo el concepto (si el predicado puede o no ser dicho de él con verdad). No puede haber ningún objeto con respecto al cual, tras la definición, quepan aún dudas de si cae o no bajo el concepto; aunque para nosotros, dado nuestro limitado conocimiento, pueda no ser siempre posible decidir la cuestión. Podemos expresar esto metafóricamente así: el concepto tiene que tener límites precisos. Si uno se representa conceptos en cuanto a su extensión como áreas en un plano, la analogía debe tomarse ciertamente con cautela, pero puede sernos aquí de utilidad. A un concepto sin límites claros correspondería un área cuyos contornos no siempre fuesen claros, sino que en algunas zonas fuesen completamente borrosos y parecieran fundirse con el entorno. De hecho esto no sería un área en absoluto; de la misma forma, un

* Traducción de Xavier de Donato.

concepto que no está definido con toda precisión no podría ser llamado propiamente concepto. La lógica no puede reconocer a estos constructos cuasiconceptuales como verdaderos conceptos; no es posible formular leyes exactas sobre ellos. La ley del tercio excluso no es sino otra forma de expresar el requisito de que el concepto tiene que tener límites precisos. Un objeto cualquiera Δ o cae bajo el concepto Φ o no cae bajo él: *tertium non datur*. Por ejemplo, la oración "toda raíz cuadrada de 9 es impar" ¿tendría acaso un sentido comprensible si el concepto *raíz cuadrada de 9* no fuera un concepto con límites precisos? ¿Tiene sentido la pregunta: "¿Seguimos siendo cristianos?" si no está determinado de quién puede decirse con verdad el predicado *cristiano* y a quién tiene que retirársele?

§ 57. De esto se sigue que el modo de definir preferido de los matemáticos, la definición fragmentaria, es inadmisible. El procedimiento en cuestión consiste en lo siguiente: se da la definición para un caso particular –por ejemplo, para los enteros positivos–, y se usa; luego, después de algunos teoremas, se continúa con una explicación para otro caso –por ejemplo, para los enteros negativos más el cero–, cometiendo a menudo aquí el error de hacer determinaciones para ese caso que ya se había contemplado antes. Aunque de hecho también se eviten las contradicciones, con este método no se descartan por principio. La mayoría de las veces ni siquiera se alcanza la compleción, pues quedan casos para los que no se determina nada, y algunos son tan ingenuos que emplean también para esos casos la palabra o símbolo, como si le hubieran asignado una referencia. Ese procedimiento de definición fragmentaria es comparable al método de dibujar por segmentos los límites de una superficie, tal vez sin acabar de juntarlos nunca. El principal error, no obstante, es usar el símbolo (palabra) en teoremas antes de que se haya definido completamente, y a menudo incluso con vistas a un posterior desarrollo de la propia definición. Mientras lo que una palabra o símbolo significa no esté completamente definido o no sea conocido de alguna otra manera, no puede ser usado en una ciencia exacta y menos todavía con vistas a seguir desarrollando su propia explicación.

§ 58. Ahora bien, ciertamente, tenemos que admitir que el desarrollo de la ciencia, que se ha llevado a cabo alcanzando cada vez dominios más grandes de números, necesita de ese procedimiento casi inevitablemente; y esa necesidad podría servir de excusa.[1] Por supuesto, hubiera sido posible sustituir

[1] Así dice Peano en la *Revue de mathématiques*, parte VI, pp. 60–61:

> El señor Frege quisiera una única definición para cada signo. Y ésta es también mi opinión si se trata de un signo que no contenga letras variables (F_2 § 1, P 7). Pero si aquello que se define contiene letras variables, es decir, es una función de esas letras, entonces veo la necesidad de dar definiciones condicionadas de dicha expresión, o definiciones con hipótesis (*id.* P 7′), y de dar tantas definiciones como tipos de entidades sobre las cuales realizamos esa operación. Así, la fórmula $a + b$ se define primero cuando a y b son enteros, una segunda vez cuando son fracciones, y otra vez cuando son irracionales o complejos. El mismo signo + se usa en el caso de los números infinitos y transfinitos (F_1 VI) y, en tal caso, se requiere dar una nueva definición; si se encuentra entre dos vectores será definido nuevamente, y así sucesivamente. Y con el progreso de la ciencia, se expande siempre más y más el significado de la misma fórmula. Los distintos significados de la expresión $a + b$ tienen propiedades comunes; mas éstas son insuficientes para precisar todos los valores que puede tener esa expresión.
>
> Lo mismo se puede decir de la fórmula $a = b$; en algunos casos, su significado se puede asumir como idea primitiva; en otros, se la define; y más precisamente en aritmética, dada la igualdad de los enteros, se define la igualdad entre racionales, irracionales, imaginarios, etc. Se suele definir en geometría la igualdad de dos áreas, de dos volúmenes, de dos vectores, etc. Con el progreso de la ciencia, se siente cada vez más la necesidad de expandir el significado de la fórmula $a = b$. Los distintos significados de ésta tienen propiedades comunes; pero yo no veo cómo basten para precisar todos los significados posibles de la igualdad.
>
> Por otra parte, las opiniones de los diversos autores sobre el concepto de igualdad difieren bastante, y un estudio de esta cuestión sería muy útil, especialmente si está hecho con ayuda de símbolos además de palabras. [En el original, el texto de Peano está citado por Frege en su versión original italiana y del italiano se traduce aquí. [N. del t.]]

Peano apela aquí a una necesidad práctica, pero esto no contradice las razones que yo le di en mi carta. Puede ser difícil satisfacer los requisitos que la lógica impone a las definiciones, pero tiene que ser posible.

Podemos cuando mucho permitir varias definiciones condicionales de los mismos signos siempre que resulte obvio a partir de su forma que cubren todos los casos posibles y que para ningún caso hacen múltiples determinaciones, y en tanto que ninguna de estas definiciones fragmentarias sea usada

los símbolos y términos viejos por otros nuevos y realmente esto es lo que la lógica requiere; pero se trata de una decisión difícil de tomar. Y esa reticencia a introducir nuevos símbolos o palabras es la causa de muchas oscuridades en matemáticas. Las viejas definiciones podrían haber sido desechadas como inválidas, para así poder empezar la ciencia desde el principio con nuevas definiciones, pero un corte tan taxativo como éste no se llegó a producir debido a que se creía imposible prescindir de las viejas definiciones para el comienzo de la ciencia. Los requerimientos didácticos también pueden haber tenido algo que ver aquí. Y el resultado es que la gente se ha acostumbrado a la definición fragmentaria; y, así, lo que originalmente era un parche improvisado, acabó siendo algo habitual y fue aceptado entre los métodos legítimos de la ciencia, de modo que ahora casi nadie se extraña cuando un símbolo se define primeramente para un dominio restringido y luego se usa una vez más el mismo símbolo para definir un dominio más amplio; pues la costumbre general llega a tener fuerza justifi-

antes de que hayan sido dadas todas; tampoco, por tanto, en una definición fragmentaria. Aunque esas definiciones pueden combinarse formalmente en una única definición. Aun así, cuando sea posible, este tipo de definición debe evitarse.

En lo que se refiere al signo de igualdad, haremos bien en mantenernos fieles a la convención de que la igualdad es la perfecta coincidencia, es decir, la identidad. Por supuesto, los cuerpos del mismo volumen no son idénticos, pero tienen el mismo volumen. En este caso, los signos a ambos lados del signo de igualdad no pueden ser tomados como signos de los cuerpos, sino de sus volúmenes, o también de las cantidades numéricas obtenidas por medición de la misma unidad de volumen. No hablaremos de vectores iguales, sino más bien de cierto atributo de los vectores (llamémosle la "longitud con dirección") que puede coincidir en el caso de vectores distintos. Según esto, el progreso de la ciencia no requerirá ampliar la referencia de la fórmula "$a = b$", sino que sólo se tendrán que investigar nuevas determinaciones (*modi*) de los objetos.

En la última oración, Peano hace una afirmación perentoria. Si las opiniones de los matemáticos acerca de la igualdad difieren tanto entre sí, esto no significa sino que los matemáticos no se ponen de acuerdo acerca del contenido de su propia ciencia; y si uno considera que la esencia de la ciencia consiste en pensamientos y no en palabras y símbolos, ello quiere decir que no hay una ciencia matemática unificada, que los matemáticos no se entienden entre ellos. Pues el sentido de casi todas las oraciones aritméticas y muchas geométricas depende directa o indirectamente del sentido de la palabra "igual".

cativa, de igual modo que la moda puede llegar a imprimir un sello de belleza sobre el atuendo más detestable. Por ello hay que subrayar la cuestión: la lógica no puede reconocer como conceptos aquellas construcciones parecidas a los conceptos que aún son fluidas y a las que no se les haya dotado de límites precisos y definitivos; y de ahí que deba rechazar toda definición fragmentaria. Después de todo, si la primera definición ya es completa y tiene trazados límites muy precisos, entonces o bien la segunda definición tiene exactamente los mismos límites y, en tal caso, debe ser desechada, pues su contenido podría ser probado como teorema, o bien tiene límites diferentes, con lo que contradice la primera definición. Se puede, por ejemplo, definir una sección cónica como la intersección de un plano con una superficie cónica en rotación. Pero, una vez hecho esto, no se puede definir otra vez la misma figura como, por ejemplo, una curva cuya ecuación en el eje cartesiano de coordenadas es de segundo grado; pues esto ahora tiene que ser probado. Tampoco se puede definir una sección cónica como una figura plana cuya ecuación en coordenadas lineales es de segundo grado, pues eso incluiría también a un par de puntos, que no pueden verse como la intersección de un plano con una superficie cónica. La delimitación del concepto tampoco es aquí la misma y sería un error utilizar las mismas palabras, "sección cónica", en ambos casos. Así, si la segunda definición no es hecha inadmisible por la primera de ninguno de estos dos modos, eso es posible sólo porque la primera es incompleta y no ha acabado de definir el concepto, dejándolo en un estado en el que no puede ser en absoluto utilizado y menos aún en definiciones.

§ 59. No será inútil dar un ejemplo que sirva como contrapeso a la abstracción de estas reflexiones. E. Heine propone la siguiente definición:[2]

> "Los signos numéricos se llaman iguales o son intercambiables cuando pertenecen a series numéricas iguales, y desiguales o no intercambiables cuando pertenecen a series numéricas desiguales. (§ 1 Def. 3)."

[2] "Die Elemente der Functionslehre" ["Los elementos de la teoría de funciones"] (*Crelle*, vol. 74), § 2, Def. 2. Del hecho de que haga una sola objeción a esta definición no se debe inferir que la encuentro, por lo demás, libre de otras objeciones.

¿Qué se diría de la siguiente definición?

> "Los signos son llamados blancos cuando pertenecen a objetos blancos".

Me es permitido, por supuesto, tomar una mancha circular negra como signo de la hoja blanca de papel que tengo delante, siempre y cuando este mismo signo no haya sido empleado antes con otro significado. Y según la definición, tal mancha sería ahora blanca. En contra de esto hay que decir lo siguiente: en la expresión "cuando pertenecen a objetos blancos", la definición presupone conocida la referencia de la palabra "blanco", pues de lo contrario no estaría determinado qué signos pertenecen a los objetos blancos. ¡Muy bien! Si la palabra "blanco" ya es conocida, entonces no podemos querer definirla nuevamente. Tendría que ser completamente obvio que una palabra no se puede definir recurriendo a ella misma, pues en tal caso se estaría tomando la palabra como conocida y no conocida al mismo tiempo. Si es conocida, una definición es por lo menos superflua, pero si no es conocida, no puede servir a los propósitos de una definición. ¡Es esto tan obvio, y a menudo se ignora esta obviedad! En el caso de la definición de Heine estamos frente a la misma situación. Con las palabras "cuando pertenecen a series numéricas iguales", el significado de la palabra "igual" se presupone conocida y, no obstante, se intenta definir esta misma palabra.

§ 60. Contra esto Heine probablemente respondería señalando que no se presupone conocido el significado de la palabra "igual" para todos los casos, sino que en su Def. 3 del § 1 su significado se da únicamente para series numéricas que no vayan entre paréntesis, mientras que aquí él está hablando de series numéricas entre paréntesis y de otros signos. Aparte de las razones ya mencionadas, hay que decir en contra de esto que la doble definición de un signo o palabra está mal, pues nos deja la duda de si estas definiciones se contradicen entre sí. Debiera al menos exigirse una prueba de que no hay tal contradicción,

pero este requisito apenas es respetado, y ciertamente no hay en Heine indicio alguno de semejante prueba. En general, tiene que rechazarse cualquier método de definición que haga depender la corrección de una definición de que se proporcionen previamente pruebas, pues de otra manera se hace extraordinariamente complicado comprobar que una prueba haya sido llevada a cabo con el rigor necesario, ya que, para cada definición, sería necesario investigar si antes de formular la definición, había que probar alguna proposición. Esta investigación casi nunca se lleva realmente a cabo. Casi nunca se da uno cuenta de este tipo de huecos, lo que resulta particularmente peligroso para el rigor. En aritmética no basta simplemente hacer una afirmación sin una prueba o con una pseudoprueba y esperar a ver si alguien logra luego probar su falsedad; por el contrario, lo que cabe exigir es que toda afirmación que no sea completamente evidente sea realmente probada, y esto incluye que las expresiones o signos que se usen en ese proceso y no sean generalmente conocidos se introduzcan correctamente.

Es, además, muy fácil evitar dar múltiples definiciones del mismo signo. En lugar de definirlo primero para un dominio limitado y usarlo después para una definición en un dominio más amplio, esto es, en lugar de usar el mismo signo dos veces, sólo se requiere elegir dos signos diferentes, acotando definitivamente la referencia del primero al dominio más restringido, de modo que la primera definición sea completa y trace límites precisos. De esta manera, la relación lógica entre la referencia de ambos signos no resulta prejuiciada y puede ser estudiada sin que, a resultas de la investigación, la legitimidad de las definiciones pueda ser puesta en tela de juicio.

Así pues, merece verdaderamente la pena inventar un nuevo signo si así podemos superar no pocas dificultades lógicas y se puede asegurar el rigor de la prueba. Sin embargo, en algunos matemáticos el sentido de la pureza y exactitud lógicas parece tan escaso que preferirán usar una palabra con tres o cuatro referencias diferentes antes que tomar la tremenda decisión de inventar una palabra nueva.

§ 61. Las definiciones fragmentarias también vuelven incierto el estatus de los teoremas. Si, por ejemplo, la expresión "raíz cuadrada de 9" ha sido definida de forma restringida para el dominio de los números enteros positivos, entonces podemos probar, digamos, la proposición de que sólo hay una raíz cuadrada de 9, la cual queda refutada tan pronto como se extiende la consideración a los números negativos y conforme a ello se completa la definición. Pero, ¿quién sabe si se ha llegado ahora a una proposición definitiva? ¿Quién sabe si no se verá uno movido aún a reconocer cuatro raíces cuadradas de 9? ¿Cómo se ha de saber realmente que no hay más que dos raíces cuadradas de −1? Hasta que no dispongamos de una definición definitiva y completa es imposible saberlo. Se puede muy bien objetar que entonces algunas proposiciones dejarán de valer. La misma razón iría en contra de admitir una segunda raíz cuadrada de 9. De esta forma, no se tiene nunca suelo enteramente firme bajo los pies. Sin definiciones últimas tampoco se tienen teoremas últimos. No escapamos de la provisionalidad, de la inseguridad.

§ 62. El caso de las relaciones es enteramente similar al de los conceptos: la lógica sólo puede reconocer una relación cuando está determinado, para todo primer objeto y todo segundo objeto, si efectivamente el primero está o no en relación con el segundo. También aquí tenemos un *tertium non datur*: está excluida la indecisión. Si no se satisficiera este requisito de una relación, entonces los conceptos que podríamos derivar de ella vía saturación parcial (vol. I, § 30) no tendrían límites precisos; con lo que en sentido estricto no serían ni siquiera conceptos, sino inadmisibles pseudoconceptos. Si, por ejemplo, la relación *ser mayor que* no estuviera completamente definida, no podríamos estar seguros de que una construcción conceptual derivada de ella vía saturación parcial, como ser *mayor que cero* o ser *positivo*, fuese un auténtico concepto. Para esto tendría que estar determinado, por ejemplo, si la Luna es mayor que cero. Se puede estipular entonces que sólo los números pueden caer bajo esta relación, de lo que se seguiría que la Luna, que no es ningún número, tampoco es mayor que cero. Pero esto requeriría una definición completa de la palabra "número", que mucha falta nos hace.

Precisamente es en la relación *ser mayor que* donde la definición fragmentaria, y por tanto incompleta, pertenece, por así decirlo, al proceder habitual en matemáticas. Para empezar se define la expresión "mayor que" en el dominio de los números enteros positivos, de manera, por tanto, incompleta. La pseudorrelación así obtenida, que en realidad no debe ser utilizada en absoluto, sí se usa luego para complementar la primera definición, aunque uno ciertamente no pueda decir cuándo la definición de la relación *ser mayor que* haya de contar como completa. Pasa exactamente lo mismo en el caso de la relación de igualdad; también aquí la definición fragmentaria ciertamente pertenece a los usos habituales.[3] A pesar de eso, tenemos que insistir en lo nuestro: sin definiciones definitivas y completas no se tiene un suelo firme bajo los pies, ni se está seguro de la validez de los propios teoremas, ni tampoco se pueden aplicar con seguridad las leyes lógicas, las cuales ciertamente presuponen límites precisos para los conceptos y por ende también para las relaciones.

§ 63. En este punto es fácil extraer una conclusión acerca de las funciones que no son ni conceptos ni relaciones. Tomemos como ejemplo la expresión "la mitad de algo", que se presenta como el nombre de una función tal. Aquí la palabra "algo" está ocupando el espacio libre destinado al argumento, el que corresponde a la letra "ξ" en "$1/2\,\xi$". Tal expresión puede convertirse en parte del nombre de un concepto, digamos "algo cuya mitad es menor que uno".

Si esta expresión ha de significar realmente un concepto con límites precisos, también ha de estar, por tanto, determinado para la Luna si su mitad es menor que uno. Pero para que esto

[3] En la práctica de dar pruebas, probablemente todos los matemáticos tratan la igualdad como identidad, aunque en la teoría la mayoría no reconocería que esto es verdadero. Nadie, sin embargo, diría por ejemplo que la ecuación "$4x - 3 = 3$" tiene las raíces $6/4$ y $3/2$, pues aunque en verdad $6/4 = 3/2$, $6/4$ no coincide con $3/2$. Como no coinciden entre sí, tienen que ser distintos y nuestra ecuación tiene al menos dos raíces. Es curioso ver cuán llamativos son los conflictos que hay en muchos matemáticos entre la teoría que explícitamente defienden y la práctica que tácitamente ejercitan. Pero si la igualdad no es en matemáticas otra cosa que la identidad, su múltiple definición resulta un procedimiento por completo absurdo.

sea el caso, la expresión "la mitad de la Luna" tiene que tener referencia; esto es, tiene que haber exactamente un objeto que sea designado por esta expresión. Esto, sin embargo, no es el caso de acuerdo con las prácticas habituales del lenguaje, pues nadie sabe a qué mitad de la Luna se está uno refiriendo. De manera que aquí también se tiene que hacer una estipulación más precisa para determinar, para cada objeto, qué objeto es la mitad de él; de otro modo no podemos utilizar la expresión "la mitad de x" con el artículo definido. Así, una función de primer nivel con un argumento tiene que estar constituida de tal modo que un objeto resulte como su valor, sea cual fuere el objeto que se quiera tomar como su argumento –objeto mediante el cual se satura la función.[4]

§ 64. Tenemos que exigir algo similar para las funciones con dos argumentos. La expresión:

"la suma de un primer objeto con un segundo objeto"

se presenta como el nombre de una función de ese tipo. Una vez más, debe estar determinado aquí, para cada primer y segundo objetos, qué objeto es la suma del primero y el segundo, y siempre debe haber un objeto tal. Si eso no es así, tampoco está determinado qué objeto añadido a sí mismo da como resultado uno. En este caso, las palabras "algo que añadido a sí mismo da uno" no refieren a ningún concepto con límites precisos y, por tanto, no significan nada que en absoluto pueda ser usado en lógica. Y la pregunta de cuántos objetos hay que, añadidos a sí mismos, dan como resultado uno no puede contestarse.

Pero ¿no puede estipularse que la expresión "la suma de un primer objeto con un segundo objeto" sólo tendrá referencia cuando ambos objetos sean números? En tal caso, bien puede pensarse, el concepto *algo que añadido a sí mismo da como resultado uno* es un concepto con límites precisos, puesto que entonces se sabría que no hay ningún objeto que caiga bajo él que no sea un número. Por ejemplo, la Luna no caería bajo dicho concep-

[4] Véanse las observaciones sobre la función en el volumen I, así como lo dicho por el autor en su ensayo "Función y concepto", *supra*, pp. 225-248.

to, ya que la suma de la Luna consigo misma no da como resultado uno. Esto es falso, pues la oración "la suma de la Luna con la Luna es igual a uno" no es ni verdadera ni falsa. En ambos casos, las palabras "la suma de la Luna con la Luna" deberían tener referencia, lo cual es negado expresamente por la estipulación antes propuesta. Nuestra oración sería comparable, digamos, a la oración "Escila tenía seis fauces de dragón". Esta oración tampoco es ni verdadera ni falsa, sino ficción, ya que el nombre propio "Escila" no refiere a nada. Tales oraciones pueden muy bien ser el objeto de una especulación científica, por ejemplo, en los estudios sobre mitología, pero no pueden ser usadas en ninguna investigación científica. Si nuestra oración "la suma de la Luna con la Luna no es igual a uno" fuera una oración científica, diría que la referencia de las palabras "la suma de la Luna con la Luna" no coincide con la referencia de la palabra "uno"; pero de acuerdo con la estipulación hecha más arriba no hay una referencia de la primera expresión. Por consiguiente, no podríamos decir de ella ni que coincide con la referencia de "uno" ni tampoco que no coincide. Por tanto, la pregunta de si la suma de la Luna y la Luna es uno, o de si la Luna cae bajo el concepto *algo que añadido a sí mismo da como resultado uno*, no tendría respuesta alguna. En otras palabras, lo que hemos calificado de concepto no sería en realidad concepto alguno, pues carecería de límites precisos. Sin embargo, una vez que se ha introducido la expresión "a sumado a b da c", ya no puede evitarse la formación del nombre de concepto "algo que sumado a sí mismo da uno". Si realmente se quisiera intentar evitar, mediante alguna ley, la formación de tales nombres de concepto, inadmisibles aunque lingüísticamente posibles, se tendría que renunciar pronto a tal empresa por excesivamente difícil y probablemente irrealizable. El único camino viable, si se quieren usar en absoluto las palabras "suma", "adición" y otras, es que se las defina de tal manera que los nombres de conceptos formados a partir de ellas de un modo lingüísticamente correcto refieran a conceptos con límites precisos y que, por eso mismo, resulten admisibles.

También aquí el requisito expuesto de que cada función de primer nivel con dos argumentos tenga, para cada primer objeto como primer argumento y para cada segundo objeto como segundo argumento, un objeto como valor, es a su vez una consecuencia del requisito de que los conceptos tienen que tener límites precisos y de que no deben permitirse expresiones que por su construcción parecen referir a un concepto, pero que en realidad sólo provocan la ilusión de hacerlo, de la misma manera en que no podemos admitir nombres propios que realmente no designen ningún objeto.

§ 65. Lo dicho hasta aquí de las expresiones en palabras vale también para los signos aritméticos. Si el signo de adición está completamente definido, entonces en la expresión

$$“\xi + \xi = \zeta”$$

tenemos el nombre de una relación, la de ser el doble de un número. Si éste no es el caso, entonces no podemos decir si la ecuación

$$“x + x = 1”$$

tiene una única solución o varias. Aquí alguien responderá: "prohíbo en absoluto que objetos que no sean números sean tomados en consideración". Tratamos ya una objeción semejante anteriormente; aquí se puede arrojar luz al asunto desde otro ángulo. Cualquiera que pretenda excluir de consideración a los objetos que no sean números tiene que decir primeramente qué es lo que entiende por "número", después de lo cual no será admisible ninguna extensión adicional del término. Esa restricción tiene que ser incluida en la definición, de modo tal que tome la forma: "si a y b son números, entonces $a + b$ refiere a…". Tendríamos, pues, una definición condicional.[5] Pero el signo de adición no queda definido hasta que la referencia de cada posible combinación de signos de la forma "$a + b$" esté plenamente determinada, sean cuales fueren los nombres propios con referencia que pudieran insertarse en lugar de "a" y "b". Sin embargo, cuando tales combinaciones de signos se definen únicamente para el caso en que "a" y "b" son signos de números enteros reales, entonces lo que se ha definido realmente son sólo tales combinaciones y no el signo de la adición,

[5] Véase la carta del autor al señor G. Peano en *Revue de mathématiques*, volumen VI, pp. 53 y ss.

con lo cual se está atentando contra el segundo principio que rige las definiciones y del que todavía tenemos que tratar. Y, aun así, alguien puede involuntariamente figurarse que ya se conoce la referencia del signo de adición y, en consecuencia, usarlo también en casos para los que no se ha dado definición alguna.

Tan pronto como se aspire a la generalidad en las oraciones, en las fórmulas aritméticas se necesitarán, además de símbolos para objetos definidos, como por ejemplo el nombre propio "2", letras que solamente indiquen pero que no designen[6] y, de manera inadvertida, uno es llevado más allá del dominio para el cual se han definido sus símbolos. Se podría intentar evitar los peligros resultantes no dejando que las letras indiquen objetos en general, como hemos hecho, sino sólo los de cierto dominio restringido. Supongamos por un momento que el concepto de *número* esté definido nítidamente y que se haya establecido que las letras del alfabeto latino sólo pueden indicar números y que el signo de la suma esté definido únicamente para números. En tal caso, dada la proposición

"$a + b = b + a$",

hemos de añadir mentalmente la condición de que a y b son números; condición que, cuando no está explicitada, es olvidada fácilmente.[7] Pero ¡propongámonos por un momento no olvidar esas condiciones! Según una conocida ley lógica, podemos transformar la siguiente oración:

"si $a + b$ son números, $a + b = b + a$"

en esta otra:

"si $a + b$ no es igual a $b + a$, y a es un número, entonces b no es un número",

[6] Véase el volumen I, pp. 31 y 32 [§ 17].

[7] Por ejemplo, cuando el dominio de los números es ampliado, ¿se llega realmente a pensar que el sentido de las condiciones queda alterado, que todos los enunciados generales probados hasta ese momento adquieren un nuevo contenido de pensamiento y que incluso las pruebas mismas resultan inválidas?

y aquí ya es imposible mantener la restricción al dominio de los números. La fuerza de las cosas indefectiblemente trabaja en detrimento de mantener dichas restricciones. Pero entonces nuestra cláusula antecedente:

"si $a + b$ no es igual a $b + a$"

no tiene ningún sentido dada la definición incompleta del signo de la suma.

Vemos aquí de nuevo que las leyes de la lógica presuponen conceptos con límites precisos y, con ello, definiciones completas de los nombres de funciones –como, por ejemplo, del signo de la adición–.[8] Esto lo hemos manifestado ya en el primer volumen de nuestra obra de la siguiente manera: todo nombre de función tiene que tener una referencia. Por eso mismo, todas las definiciones condicionales y todas las definiciones fragmentarias han de ser rechazadas. Todos los signos tienen que ser definidos de golpe de forma completa, de tal modo que, como decimos, tengan una referencia.

Todos estos temas están íntimamente relacionados y pueden verse como derivados del principio de compleción de la definición.

2 . *Principio de la simplicidad en la expresión definida*[9]

§ 66. Es obvio que la referencia de una expresión conjuntamente con la de una de sus partes no siempre determina la referencia de la parte restante. No se puede, pues, definir un signo o palabra definiendo una expresión en la que ocurre y cuyas partes restantes son conocidas. Pues de otra manera, sería necesaria primeramente una investigación acerca de si es posible una solución para la incógnita –para servirme de una metáfora algebraica bien conocida– y si la incógnita está unívocamente determinada [*eindeutig bestimmt*]. Pero no es razonable, como hemos dicho más arriba, hacer que la corrección de una definición dependa del resultado de semejante investigación –que,

[8] Se sobreentiende que ciertas funciones, a causa de su simplicidad lógica, no pueden ser definidas; pero incluso éstas deben tener valores para todo argumento.

[9] Volumen I, § 33, 3.

por lo demás, podría no ser ni siquiera realizable–. Más bien, una definición debe tener el carácter de una ecuación que se resuelve para una incógnita y en la que no ha de figurar ninguna incógnita más en el otro lado.

Mucho menos funcionará definir dos cosas con una única definición, sino que cada definición tiene que contener un único signo cuya referencia estipula. De la misma manera, tampoco se pueden determinar dos incógnitas por medio de una única ecuación.

Más aún, también ocurre que a veces se establece un sistema entero de definiciones que incluye varias palabras que se van a definir, de modo tal que cada una de estas palabras ocurre en varias de esas definiciones. Esto es semejante a un sistema de ecuaciones con varias incógnitas donde queda totalmente abierta la pregunta de si son resolubles y si la solución está completamente determinada.

Por supuesto, puede considerarse que cada signo, cada palabra está formada de partes; pero no podemos negar su simplicidad a menos que, dadas las reglas generales de la gramática, o del simbolismo, la referencia del todo se siga de la referencia de las partes, y que esas partes también ocurran en otras combinaciones y sean tratadas como signos independientes con su propia referencia. En este sentido, entonces, se puede decir: la expresión definida –el signo definido– tiene que ser simple. Si no, podría ocurrir que las partes fuesen definidas separadamente y que esas definiciones contradijesen la del todo.

Desde luego, los nombres de funciones, debido a su insaturación característica, no pueden ocurrir solas en un lado de la ecuación definitoria, sino que los lugares de los argumentos deben rellenarse siempre de un modo u otro. Esto se logra, como ya hemos visto, en mi conceptografía,[10] por medio de letras latinas, las cuales también tienen que ocurrir en el otro lado. En el lenguaje hablado cumplen esta función los pronombres y partículas que indican eso de manera indeterminada ("algo", "que", "eso"), por lo que no implican una violación de nuestro principio, ya que esas letras, pronombres, partículas, no refieren propiamente a nada, sino que tan sólo indican.

[10] Volumen I, § 33, 5.

§ 67. A menudo se transgreden a la vez ambos principios de la definición, como cuando se define el signo de igualdad conjuntamente con lo que está a su izquierda y a su derecha. En este caso, el signo de igualdad ya se definió antes, aunque de manera incompleta. Surge así una oscuridad peculiar: el signo de igualdad es tratado como mitad conocido y como mitad no conocido. Por un lado, parece que se supone que uno recuerda la definición primigenia y que, a partir de ella, saca algo para determinar ahora lo que aparece a la izquierda y a la derecha. Pero, por otro lado, la definición primigenia no basta para el presente caso. Algo parecido sucede en el caso de otros signos. Esta oscuridad es algo necesario para que muchos matemáticos puedan llevar a la práctica sus artificios lógicos. El resultado que persiguen pueden alcanzarlo de manera irreprochable, de acuerdo con nuestro Axioma V (vol. I, § 3, § 9 y § 20), mediante la transformación de una igualdad válida con generalidad en una igualdad de rango de valores [*Werthverlaufsgleichheit*].

Sin pretender haber ofrecido aquí un panorama completo de todo lo que cabría decir acerca de las definiciones, me conformaré con la exposición de estos dos principios contra los cuales atentan los matemáticos muy frecuentemente.

VOLUMEN II, PARTE III, §§ 138–147*

LA CREACIÓN DE NUEVOS OBJETOS SEGÚN R. DEDEKIND, H. HANKEL, O. STOLZ

§ 138. Vayamos ahora a la exposición que ofrece R. Dedekind en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [*Continuidad y números irracionales*].[1] Ahí escribe en § 1, p. 6:

> Si se desea expresar que los signos a y b refieren a uno y el mismo número racional, entonces, se ponen tanto $a = b$ como $b = a$.

Aquí, la precisión de la distinción entre el signo y aquello a lo que refiere resulta satisfactoria y digna de ser destacada, lo mismo que la concepción del signo de igualdad que coincide exactamente con el nuestro. Thomae observa en contra de esto:[2]

> Pues si se supusiera que la igualdad o el signo de igualdad, =, refiriesen a la mera identidad, nos quedaríamos en un conocimiento trivial o, si se prefiere, la necesidad del pensamiento de que a es a ($a = a$).

Esto es un error. El conocimiento de que la estrella de la tarde es la misma que la estrella de la mañana es mucho más valioso que una mera aplicación de la proposición '$a = a$', no el mero producto de una necesidad del pensamiento. La explicación estriba en que el sentido de los signos o de las palabras (estrella de la tarde, estrella de la mañana) puede diferir, aunque la referencia sea la misma, y que precisamente es el sentido de la oración –junto con su referencia, su valor de verdad– lo que determina el valor de nuestro conocimiento.

* Traducción de Xavier de Donato.

[1] Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1892.

[2] *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, Louis Nebert, Halle, 1880; 2a. ed., 1898.

Podemos concluir de la proposición de Dedekind antes citada que, para él, los números no son signos sino más bien aquello a lo que los signos refieren.

Los siguientes tres puntos están estrechamente relacionados:

1) La distinción nítida entre un signo y su referencia;
2) La explicación del signo de igualdad como signo de identidad;
3) La concepción de los números como la referencia de los numerales, y no como los numerales mismos;

y estos tres puntos hacen que la concepción de Dedekind aparezca en pronunciada oposición a cualquier teoría formal que considere las figuras [*Figuren*], o los símbolos numéricos, como los objetos propios de la aritmética. Esto hace tanto más notable la aprobación que Dedekind concede a la concepción de Heine cuando dice sobre el ensayo antes discutido:*

> En esencia estoy completamente de acuerdo con el contenido de este trabajo, como ciertamente no podría ser de otra manera.

En realidad, no hay tal acuerdo en absoluto. Por el contrario, los puntos de vista de Dedekind parecen más próximos a Cantor.

§ 139. Después de que Dedekind llama "corte" [*Schnitt*] a cualquier división del sistema de los números racionales en dos clases tales que todo número de la primera clase es menor que todo número de la segunda, y después de haber demostrado que todo número racional genera un corte o, más propiamente, dos cortes, pero que hay cortes que no pueden ser generados por ningún número racional, afirma en [su obra antes citada] § 4, p. 14:

> Cada vez que nos encontramos con un corte (A_1, A_2) que no es generado por un número racional, creamos uno nuevo, un número irracional a, que consideramos estar definido de forma

*Frege se refiere al ensayo de E. Heine, "Die Elemente de Functionslehre" ["Los elementos de la teoría de funciones"], revista *Crelle*, no. 74, 1872. [N. del. t.]

completa por tal corte; diremos que a corresponde a ese corte, o que a genera ese corte.

El meollo de la cuestión radica en esta creación. En primer lugar, hay que observar que el procedimiento es muy diferente de lo que se hace en aritmética formal cuando se introducen un nuevo tipo de figuras y reglas especiales para manipularlas. En este caso, la dificultad estriba en saber si estas nuevas reglas entran en conflicto con las ya existentes y, si es así, en cómo resolver ese conflicto. Se trata aquí de la cuestión de si la creación es posible en absoluto y, en caso de ser posible, de si es posible de forma irrestricta o, por el contrario, en la creación tenemos que observar ciertas leyes. En este último caso, antes de que se la pueda llevar a cabo, lo primero que habría que probar sería que la creación se justifica de acuerdo con esas reglas. Aquí faltan por completo estas investigaciones y, por consiguiente, falta lo más importante. Falta aquello de lo que depende la contundencia de las pruebas con números irracionales.

De todos modos, resulta evidente, a partir del hecho de que no se puede crear objeto alguno que combine propiedades contradictorias, que el poder de la creación, si lo hay, no puede ser ilimitado.

§ 140. La siguiente consideración nos conduce al mismo resultado. En matemáticas no es inusual que, con vistas a probar una proposición, se requiera un objeto auxiliar, es decir, un objeto que no esté mencionado en la proposición que se pretende probar. En la geometría se tienen líneas y puntos auxiliares. Análogamente, en la aritmética tenemos números auxiliares. Por ejemplo, se necesita una raíz cuadrada de -1 para probar proposiciones que versan únicamente sobre números reales. Cuando en teoría de los números probamos, usando índices, que siempre y cuando δ sea el factor común mayor de n y de $p-1$, las congruencias "$x^n \equiv 1$" y "$x^\delta \equiv 1$" tienen las mismas raíces cuadradas para el número primo módulo p, necesitamos una raíz primitiva, a saber, la base de los índices, como número auxiliar. También aparecen números auxiliares en nuestras pruebas: por ejemplo, en el volumen 1, § 94. Allí vimos asimismo cómo deshacernos de un objeto auxiliar, ya que no debe mencionarse en la proposición que hay que probar, a pesar de que necesitamos algunas de sus propiedades para la prueba. Así, en la proposición de la teoría de los números antes mencionada, requerimos la propiedad de ser una raíz primitiva del número primo p. Tenemos que introducir primero cláusulas condicionales que expresen que algún objeto tiene estas propiedades. Una vez que conocemos dicho objeto, podemos eliminar esas condiciones. Si no podemos proveer un objeto tal, como ocurre en nuestro ejemplo, en el que se trata no de éste o de aquel número primo en concreto, sino de un número primo en general, entonces al menos tenemos que probar que existe siempre un objeto tal –en nuestro caso, una raíz primitiva para el número primo p–. ¡Cuán sencillo sería todo si pudiésemos crear sin más los objetos requeridos! Si no se sabe si hay un número cuyo cuadrado es -1, simplemente creamos uno. Si no sabemos si hay una raíz primitiva para un número primo, simplemente creamos una. Si no se sabe si hay una recta que pasa por dos puntos dados, simplemente creamos una. Esto es, por desgracia, demasiado cómodo como para ser correcto. Hay que reconocer ciertas restricciones para la creación. Lo más importante para un aritmético que reconoce la posibilidad de la creación en general será exponer de una manera clara aquellas leyes que la rigen para poder así proceder a llevar a cabo la prueba antes de cada creación permitida por dichas leyes. De otra manera todo se vuelve impreciso y las pruebas se rebajan hasta convertirse en pseudopruebas, en un confortable autoengaño.

§ 141. Hankel dice al inicio del § 7 de su *Theorie der complexen Zahlensysteme* [*Teoría de sistemas numéricos complejos*]:

> En este apartado, trataremos de los números α, β, los cuales están linealmente compuestos a partir de unidades $\iota_1, \ldots, \iota_n$, cuyas reglas de multiplicación quedan expresadas por medio de las siguientes relaciones:
>
> $$\iota_1 \iota_1 = 0, \iota_2 \iota_2 = 0, \ldots, \iota_n \iota_n = 0, \iota_k \iota_m = -\iota_m \iota_k.$$

Con estas así llamadas unidades, Hankel prueba, por ejemplo, el teorema de la multiplicación para las determinantes o,

más bien, imagina que lo prueba. Más propiamente, se trata de un asombroso truco de ilusionista, pues en ningún lado se prueba que tales unidades existan, en ningún lado se prueba que se tenga el derecho de crearlas. Ni siquiera se prueba que las propiedades atribuidas a estas unidades no sean contradictorias entre sí. Realmente permanece oscuro lo que estas propiedades sean, pues en ninguna parte se dice qué se entiende por un producto en este caso. Propiamente, las proposiciones que introdujimos anteriormente, es decir, "$\iota_1 \iota_1 = 0$", etc., tienen que tomarse como condiciones, y la regla de multiplicación para determinantes tendría que tomarse como dependiente de estas condiciones. En este tipo de procedimiento de prueba, sigue siendo una tarea pendiente eliminar esas condiciones. Tal solución sería posible si ι_1, ι_2, etc., fuesen nombres propios de objetos que satisfacen esas condiciones. Pero no sabemos qué serían el producto o la suma para números de esta clase. Supongamos, por un momento, que lo supiésemos. De ser éste el caso, sabríamos con respecto a ι_1 que tiene la propiedad de que $\iota_1 \iota_1 = 0$, la cual comparte con ι_2, ι_3, etc., y sabríamos también qué relaciones tiene que mantener ι_1 con las igualmente incógnitas ι_2, ι_3, etc. Es claro que de esta manera ι_1 no resulta determinada. No sabemos cuántos objetos de este tipo hay, ni si existe alguno en absoluto. Tampoco se determina así ni siquiera la clase a la que estos objetos pertenecen. Supongamos que una clase tal contuviera los objetos:

$$\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_9.$$

En tal caso, la clase que sólo contiene los objetos:

$$\iota_1 \iota_2 \iota_3, \iota_4 \iota_5 \iota_6, \iota_7 \iota_8 \iota_9,$$

tiene la misma constitución general, lo mismo que la clase que sólo contiene los objetos:

$$\iota_1 \iota_4 \iota_7, \iota_2 \iota_5 \iota_8, \iota_3 \iota_6 \iota_9,$$

y muchas otras clases. Por tanto, como no está determinada ni siquiera la clase a la que estos objetos pertenecen, menos todavía lo están los objetos mismos y es imposible interpretar a ι_1, ι_2, etc., como nombres propios con referencia, similares a "2" y "3". Lo único que nos queda es considerarlos como indicadores, como "a", "b", "c", y no como términos referenciales o designadores de objetos. Pero, en ese caso, todo depende de si existen realmente objetos que satisfagan las condiciones antes mencionadas. Estas condiciones ni siquiera son completas, pues falta la condición de que el producto de un número ordinario y el producto de algunos de los ι difieren del producto de otro número ordinario y el mismo producto de ι. Sin esto, a partir de

$$a \cdot \iota_1 \iota_2 \iota_3 = b \cdot \iota_1 \iota_2 \iota_3$$

no se podría inferir $a = b$. Nos falta la prueba de que los objetos ι existen. Quizás Hankel creyó haberlos creado con las palabras arriba mencionadas, pero nos sigue debiendo una prueba de que estaba legitimado para crearlos.

§ 142. Si hubiéramos intentado llevar a cabo en nuestra conceptografía la prueba que ofrece Hankel de esta proposición sobre determinantes, nos hubiéramos dado en las narices, por así decirlo, con este obstáculo. La razón de por qué se lo pasa por alto tan fácilmente en el método de prueba de Hankel estriba en que los supuestos no son formulados al modo de Euclides, con la atención puesta en no hacer uso de ningún otro. Si se hiciera esto, los supuestos no podrían desaparecer tan fácilmente y como por arte de magia.

Cabe observar que hay muchas pruebas llevadas a cabo con la unidad imaginaria que no descansan sobre suelo más firme que el de Hankel que acabamos de mencionar. Si el error salta más a la vista en el caso de este último, no es debido a una diferencia lógica sustancial, sino a que nos hemos acostumbrado más a la unidad imaginaria que a los números alternados. A menudo basta sólo usar una palabra o signo como nombre propio para que surja la impresión de que este nombre propio refiere a algo, impresión que acabará siendo tan reforzada con el tiempo que al final nadie dudará de ello.

§ 143. Las definiciones creadoras son un descubrimiento de primer orden. Otto Stolz escribe:[3]

[3] En sus *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* [*Conferencias sobre aritmética general*] (Leipzig, Teubner, 1885), parte I, p. 211.

> 6. *Definición*: si el $\lim(f : g)$ es un número positivo o es $+\infty$, tiene que existir algo diferente de los momentos, denotado por $u(f) : u(g)$, tal que satisfaga la ecuación:
>
> $$u(g) \cdot \{u(f) : u(g)\} = u(f).$$

Comparemos esto con lo siguiente:

> *Definición*. Si los puntos A, B, C, D, E, F están situados de modo que las líneas que unen AD, BE y CF pasan por el mismo punto, entonces ha de existir algo que es una línea recta que pasa por los puntos de intersección respectivos de las rectas que unen AB y DE, BC y EF, CA y FD.

Los dos casos se considerarán enteramente diferentes; sin embargo, una investigación cuidadosa no señalará ninguna diferencia lógica esencial entre ellos. La última definición es superflua; se enuncia un teorema que después se prueba. Pero la inestimable ventaja que tiene una definición creadora es que nos ahorra una prueba, y esa ventaja se alcanza sin esfuerzo alguno: sólo se requiere elegir como título la palabra "definición" en lugar de la palabra "teorema". Esto, sin embargo, es algo muy necesario, pues de lo contrario fácilmente podemos equivocarnos a la hora de juzgar la naturaleza de la proposición.

Otro ejemplo de una definición creadora lo encontramos en la p. 34 de la misma obra, donde se lee lo siguiente:

> 1. *Definición*. "Si en el caso (D_1) ninguna magnitud del sistema (I) satisface la ecuación $b \circ x = a$, entonces será satisfecha por *una y sólo una nueva cosa no presente en* (I) y que puede designarse mediante $a \smile b$, ya que este símbolo todavía no ha sido usado. De este modo, tenemos:
>
> $$b \circ (a \smile b) = (a \smile b) \circ b = a.$$ [4]

[4] En lo que al símbolo $\circ$ se refiere, dice (p. 26): "La conexión $\circ$ es llamada *tesis*". A partir del uso del artículo definido podríamos presuponer que el signo "$\circ$" tiene una referencia determinada, lo que sin embargo no es el caso: sólo pretende indicar una conexión. Sin embargo, no se dice cómo debemos entender "conexión" y "resultado de una conexión".

> Puesto que los nuevos objetos no poseen más propiedades, les podremos asignar algunas arbitrariamente siempre y cuando no se contradigan entre sí."

La creación se lleva a cabo, pues, en varios pasos. Tras el primer paso, la cosa está ya ahí, pero está, por así decirlo, enteramente desnuda, desprovista de las propiedades más necesarias, las cuales tendrán que añadírsele en actos creadores posteriores, momento en el que podrá ser saludada como la feliz poseedora de esas propiedades. Desde luego que el poder creador está restringido en este caso por el añadido de que las propiedades atribuidas no deben contradecirse entre sí, restricción obvia, pero de grandes consecuencias. ¿Cómo reconocemos que las propiedades no se contradicen entre sí? El único modo de hacerlo parece ser el encontrarse con las propiedades en cuestión en el mismo objeto. Pero, en ese caso, el poder creador que se atribuyen a sí mismos muchos matemáticos es tan bueno como inútil, ya que antes de poner en marcha dicho poder creador tienen que probar que las propiedades que quieren asignar al objeto que han de crear, o que ya han creado, no se contradicen entre sí. Y esto, al parecer, sólo lo pueden hacer probando que hay un objeto que tiene todas esas propiedades. Pero si en verdad pueden hacer eso, entonces, para empezar, no necesitan crear tal objeto.

§ 144. ¿O hay acaso algún otro medio de probar que se está libre de contradicción? Si hubiera uno, sería de gran importancia para todos los matemáticos que se atribuyen un poder creador. Y, sin embargo, nadie parece haberse esforzado en lo más mínimo por encontrarlo. ¿Y por qué no? Probablemente se piensa que es algo superfluo probar que se está libre de contradicción, ya que cualquier contradicción en seguida saltaría a la vista. ¡Qué bonito si así fuera! ¡Qué fáciles serían todas las pruebas! La prueba del teorema de Pitágoras rezaría de la siguiente manera:

> "Supongamos que el cuadrado de la hipotenusa no tiene la misma área que los cuadrados de los catetos tomados conjuntamente; entonces habría una contradicción entre esta suposición y los axiomas conocidos de la geometría.

> Por lo tanto, nuestra suposición es falsa y el cuadrado de la hipotenusa tiene exactamente la misma área que los cuadrados de los catetos tomados conjuntamente."

Igual de fácil sería la prueba de la ley de reciprocidad para los residuos cuadráticos:

> "Sean p y q números primos, de los cuales al menos uno es congruente con 1 módulo 4, y sea p un residuo cuadrático de q. Supongamos ahora que q no es un residuo cuadrático de p. Entonces habría una clara contradicción entre nuestro supuesto y las leyes conocidas de la aritmética; cualquiera que no vea esto no cuenta. Se sigue que nuestro supuesto es falso y que q tiene que ser el residuo cuadrático de p."

Sería fácil desarrollar cualquier prueba siguiendo estos modelos. Desafortunadamente, este método es demasiado fácil como para ser aceptable. Ciertamente vemos que no toda contradicción resulta tan palmaria. Más aún, carecemos de un criterio seguro para los casos en los que, a partir del hecho de que no parece haberla, se pudiera inferir la ausencia de contradicción. En estas circunstancias, el presunto poder creador de los matemáticos resulta carente de todo valor, ya que su ejercicio sería de algún valor justamente en aquellos casos en que está sujeto a condiciones que, al parecer, no pueden ser satisfechas. Más aún, ¿cómo saber que la ausencia de contradicción es lo único a lo que tiene que obedecer la creación?

§ 145. Stolz, al igual que Thomae, llama formal a su concepción. De ahí que pueda no resultar superfluo llamar la atención sobre la gran diferencia que, no obstante, existe entre ambas teorías. Allí donde Stolz crea un nuevo objeto –de cualquier modo, no sensible– al que provee de signo, Thomae introduce una nueva clase de figuras con las reglas correspondientes. Así, Stolz habla de una cosa, denotada por $\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g)$, al igual que de otra cosa que puede ser designada por $a \smile b$. Tendríamos que entrecomillar estas expresiones para subrayar el hecho de que hablamos de los signos mismos y no de aquello a lo que ellos refieren. En todo otro lugar Stolz distingue entre signos y designados tan nítidamente como nosotros y no se le ocurre en ningún momento presentar a los signos mismos como los objetos propios de la aritmética. La aritmética de Stolz versa sobre contenidos a pesar de su uso de la palabra "formal"; y debido a las similitudes en la forma, estas diferencias en la materia pasan fácilmente inadvertidas. De hecho, la teoría de Thomae del juego aritmético es una ciencia completamente diferente de la aritmética de Stolz. Ninguna proposición, aun cuando compartan exactamente las mismas palabras, tiene el mismo significado en Thomae y en Stolz, pues para el primero versan sobre objetos físicos, esto es, las figuras y las reglas arbitrariamente establecidas para su manipulación; para el segundo se supone que versan sobre objetos no sensibles. Claramente se trata de cosas fundamentalmente diferentes: si los números son figuras para cuya manipulación se introducen ciertas reglas o si los números son las referencias de signos numéricos y pueden ser creados. En ambos casos, nos encontramos con dificultades que parecen insuperables. En el caso de Thomae, éstas consisten en reconocer si las nuevas reglas entran en conflicto con las ya existentes, y en solventar dicho conflicto. En el caso de Stolz, consisten en probar que no hay contradicción alguna entre las propiedades de la cosa que ha de ser creada, en donde las propiedades de las cosas que ya están dadas de antemano serán tomadas en consideración las más de las veces. Aún hay que añadir a esto la duda de si la creación es, en absoluto, posible.

Dedekind está de acuerdo con Stolz en su concepción de la creación. Según él, los números tampoco son signos, sino referencias de signos numéricos. También hay que contar a G. Cantor en este grupo, si bien su opinión está menos claramente expresada.[5]

§ 146. Hemos caído en la cuenta de que, probablemente, al matemático le es negado un auténtico poder creador o, cuando menos, que ese poder está condicionado de tal modo que

[5] Es difícil decir qué punto de vista podemos atribuir a H. Hankel en su *Theorie der complexen Zahlensysteme* [*Teoría de sistemas numéricos complejos*] (Leipzig, 1867), pues en su obra se encuentran afirmaciones opuestas. Probablemente, él no ha distinguido claramente entre signo y significado.

se vuelve carente de valor. Alguien podría observar en contra de esto que nosotros mismos hemos creado nuevos objetos en el volumen I (§§ 3, 9 y 10), por ejemplo, los rangos de valores. ¿Qué hemos hecho realmente ahí? O, más bien, ¿qué no hemos hecho? No enlistamos unas propiedades y dijimos a continuación: creamos un objeto que tiene esas propiedades. Hemos dicho más bien esto otro: si una función (de primer nivel con un argumento) y una segunda función están constituidas de tal modo que ambas tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento, entonces, en lugar de esto, podemos decir que el rango de valores de la primera es el mismo que el de la segunda. Luego reconocemos que ambas funciones tienen algo en común y eso es lo que llamamos rango de valores de la primera función y de la segunda. Tenemos que considerar como una ley fundamental de la lógica el que tengamos derecho a reconocer que hay algo en común y que, consecuentemente, podamos transformar una igualdad válida con generalidad en una igualdad (identidad). Esta transformación no ha de ser tomada como una definición, pues no se está definiendo con esto ni la palabra "lo mismo", ni el signo de igualdad, ni tampoco el término "rango de valores" ni una combinación de signos "$\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$" ni todos a la vez. Pues el enunciado:

> "el rango de valores de la primera función es el mismo que el de la segunda"

es compuesto y contiene como parte componente la palabra "mismo", que tiene que considerarse como completamente conocida. Análogamente, el signo "$\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\,\Psi(\alpha)$" es compuesto y contiene como parte componente el ya conocido signo de igualdad. De modo que, si quisiéramos considerar nuestra estipulación en el volumen I, § 3 como una definición, esto atentaría, ciertamente, contra nuestro segundo principio de la definición.[6]

§ 147. Es claro que siempre se ha hecho uso de la mencionada posibilidad de transformación, sólo que se ha afirmado la

[6] En general, no podemos considerar las estipulaciones del volumen I sobre los signos primitivos como definiciones reales. Sólo lo que es lógicamente complejo puede ser definido. Lo que es simple puede tan sólo ser indicado.

coincidencia de las funciones en lugar de la coincidencia de los rangos de valores. Cuando una primera función tiene el mismo valor para el mismo argumento que una segunda, es usual decir que "la primera función es la misma que la segunda" o que "ambas funciones coinciden". Aunque esta manera de expresarse difiere de la nuestra, también aquí se transforma una igualdad que vale con generalidad en una igualdad (identidad).[7]

Cuando los lógicos han hablado desde hace tiempo de la extensión de un concepto y los matemáticos han hablado de conjuntos, clases, variedades, una transformación tal está a la base, pues se puede muy bien suponer que lo que los matemáticos llaman conjunto, etc., no es nada más que la extensión de un concepto, aun si no siempre son conscientes de ello.

Lo que hacemos mediante esta transformación no es propiamente nada nuevo, pero lo hacemos con plena conciencia y apelando a una ley fundamental de la lógica. Y lo que hacemos es, pues, muy diferente de la creación de números, arbitraria y carente de reglas, practicada por los matemáticos.

Si hay objetos lógicos en absoluto —y los objetos de la aritmética son tales—, entonces también tiene que haber un medio de captarlos, de reconocerlos. Para ello tenemos la ley fundamental de la lógica que permite la transformación de una igualdad válida con generalidad en una igualdad. Sin semejante medio

[7] Análogamente, muy pocos matemáticos dudarán de usar la expresión "$f = g$" cuando la función $f(\xi)$ y la función $g(\xi)$ tienen el mismo valor para el mismo argumento. El error que esto entraña proviene de una manera equivocada de entender la esencia de una función. Una letra de función aislada sin lugar para el argumento no es más que un absurdo, lo mismo que una expresión de función aislada, como lo es "sen". Lo distintivo de una función en comparación con un objeto es justamente la instauración, el hecho de que necesita ser completada mediante un argumento y esto también tiene que reflejarse en el simbolismo. La inadmisibilidad de una expresión como "$f = g$" procede del hecho de que, en algunos casos, falla inmediatamente. Si en lugar de $f(\xi)$ ponemos, por ejemplo, $\xi^2 - 1$ y, en lugar de $g(\xi)$, ponemos, por ejemplo, $(\xi - 1) \cdot (\xi + 1)$, entonces salta a la vista que no podemos escribir nada que corresponda a la ecuación "$f = g$". Pero si el simbolismo es correcto, siempre tiene que ser posible pasar de lo general a lo particular en el simbolismo. Así, pues, aunque no podemos reconocer como correcta la expresión "$f = g$", es obvio que los matemáticos ya han hecho uso de la posibilidad de nuestra transformación.

sería imposible una fundamentación científica de la aritmética. A nosotros nos sirve para el propósito que otros matemáticos tratan de alcanzar al crear nuevos números. Así esperamos poder desarrollar, como partiendo de un embrión, la entera riqueza de objetos y funciones de los que trata la matemática a partir de las ocho funciones cuyos nombres se enumeran en el volumen I, § 31. ¿Puede nuestro proceder ser llamado una creación? La discusión de este punto puede degenerar fácilmente en una disputa de palabras. En todo caso, nuestra creación, si así se la quiere llamar, no es irrestricta ni arbitraria, sino más bien, el modo de proceder y su legitimidad están establecidos de una vez por todas. Con esto desaparecen, pues, las dificultades y las preocupaciones que, de otra manera, llevan a cuestionar la posibilidad lógica de la creación, y podemos esperar, con nuestros rangos de valores, alcanzar todo lo que por otros caminos estábamos lejos de alcanzar.

"SOBRE LA PARADOJA DE RUSSELL"*

Apéndice al volumen II [1903]

Difícilmente le puede sobrevenir a un escritor algo más desafortunado que, tras haber puesto fin a su obra, se vea sacudido uno de los cimientos de su edificio.

En esa posición me vi colocado al recibir, justo en el momento en que la impresión de la presente obra se acercaba a su fin, una carta del señor Bertrand Russell. Se trata de mi ley fundamental (V). Nunca me he ocultado a mí mismo que no es tan evidente como las otras ni tan obvia como tiene que exigirse propiamente a las leyes lógicas en general. Y, de hecho, señalé esta debilidad en el Prólogo al primer volumen (p. VII). Hubiera renunciado con gusto a esa ley fundamental de haber encontrado algún sustituto. E incluso ahora no sé cómo podría fundamentarse científicamente la aritmética, cómo los números pueden ser aprehendidos como objetos lógicos y ser introducidos en la reflexión, si no se permite –al menos condicionalmente– pasar de un concepto a su extensión. ¿Está permitido siempre hablar de la extensión de un concepto, de una clase? Y si no es así, ¿cómo reconocer los casos excepcionales? ¿Podemos inferir siempre, a partir del hecho de que la extensión de un concepto coincide con la de otro, que todo lo que cae bajo el primer concepto cae también bajo el segundo? Éstas son preguntas que surgen de la comunicación del señor Russell.

*El título de este texto ha sido añadido para indicar al lector su contenido. En el original en alemán del volumen II Frege simplemente lo intituló "Nachwort", que significa "epílogo". [N. de la c.]

Solatium [*sic*] *miseris, socios habuisse malorum.** Yo también tengo este consuelo, si acaso es consuelo, pues todos los que han hecho uso en sus pruebas de extensiones de conceptos, clases y conjuntos[1] están en la misma situación. Lo que aquí está en juego no es mi particular manera de fundamentar la aritmética, sino la posibilidad en absoluto de una fundamentación lógica de la aritmética.

¡Pero vayamos al asunto! El señor Russell ha encontrado una contradicción que podemos presentar ahora.

Nadie querrá afirmar de la clase de los seres humanos que ella misma es un ser humano. Tenemos aquí una clase que no pertenece a sí misma. Digo que algo pertenece a una clase, cuando cae bajo el concepto cuya extensión es justamente esa clase. Fijemos ahora nuestra atención en el siguiente concepto: *clase que no pertenece a sí misma*. La extensión de este concepto, en caso de que se pueda hablar de ella, es, así, la clase de las clases que no pertenecen a sí mismas. Llamémosla K para abreviar. Preguntemos ahora si la clase K pertenece a sí misma. Supongamos primero que sí. Si algo pertenece a una clase, entonces cae bajo el concepto cuya extensión es esa clase. Por consiguiente, si nuestra clase pertenece a sí misma, tenemos entonces que es una clase que no pertenece a sí misma. Nuestra primera suposición nos ha llevado, pues, a una contradicción. Supongamos que, por el contrario, nuestra clase K no pertenece a sí misma. En tal caso, cae bajo el concepto cuya extensión es ella misma, y por tanto pertenece a sí misma. Hallamos aquí otra vez una contradicción.

¿Qué debemos hacer en esta situación? ¿Debemos acaso suponer que la ley del tercio excluso no vale para las clases? ¿O debemos suponer que hay casos en los que a un concepto inapelable no le corresponde clase alguna como su extensión? En el primer caso, nos vemos compelidos a negar por completo el carácter de objetos a las clases, pues si las clases fuesen propiamente objetos, la ley del tercio excluso tendría que valer para ellas. Por otra parte, no hay en ellas nada insaturado, predicativo, por lo que se las pudiese caracterizar como funciones, conceptos o relaciones. Lo que estamos acostumbrados a tratar como nombre de una clase, por ejemplo, "la clase de los números primos", tiene más bien la naturaleza de un nombre propio, no puede ocurrir predicativamente, pero sí puede ser el sujeto gramatical de una oración singular como, por ejemplo, "la clase de los números primos contiene infinitos objetos". Si, en el caso de las clases, quisiéramos dejar sin efecto a la ley del tercio excluso, podríamos pensar en considerar las clases, y de hecho los rangos de valores en general, como objetos impropios. Éstas no podrían así figurar como argumentos de ninguna función de primer nivel. Sin embargo, habría algunas funciones que podrían tener como argumentos objetos tanto propios como impropios. Al menos la relación de igualdad (identidad) sería de este tipo. Se podría intentar evitar esto aceptando un tipo especial de igualdad para objetos impropios. Pero esto está descartado. La identidad es una relación que nos es dada de un modo tan determinado que resulta inconcebible que pueda haber varios tipos de ella. Pero ahora ocurre que tenemos una gran multiplicidad de funciones de primer nivel; primero, aquellas que sólo pueden tener objetos propios como argumentos; en segundo lugar, aquellas que pueden tener como argumentos objetos tanto propios como impropios; y finalmente, aquellas que sólo pueden tener objetos impropios como argumentos. Tendríamos una división adicional a partir de los valores de las funciones. Habría que distinguir las funciones que sólo tuviesen objetos propios como valores, aquellas que puedan tener objetos propios e impropios como valores y, finalmente, aquellas que sólo puedan tener objetos impropios como valores. Ambas distinciones de las funciones de primer nivel se mantendrían simultáneamente, con lo que nos quedarían nueve tipos [*Arten*]. A estos corresponderían nuevos tipos de rangos de valores, de objetos impropios, entre los que tendríamos que hacer distinciones lógicas. Las clases de objetos propios deberían ser distinguidas de las clases de clases de objetos propios. Las relaciones entre objetos propios deberían ser distinguidas de las clases de objetos propios, de las clases de relaciones entre objetos propios, y así sucesivamente. Con ello, daríamos lugar a una incalculable

* "*Solatium...*": antiguo proverbio latino que, traducido, reza: "consuelo de míseros es el haber tenido compañeros en los males". Citado también por Spinoza en *Ethica* IV, prop. 57, Scholium. [N. del t.]

[1] También los sistemas del señor Dedekind pertenecen a esta categoría.

multiplicidad de tipos; y en general los objetos que pertenecieran a tipos diferentes no podrían figurar como argumentos de la misma función. Pero parece extraordinariamente difícil establecer un sistema completo de reglas para decidir qué objetos son argumentos permisibles para qué funciones. Más aún, podría dudarse de que esté justificada la introducción de objetos impropios.

Si estas dificultades nos disuaden de considerar que las clases, y con ellas los números, pueden verse como objetos impropios, y si, aún así, no queremos reconocerlas como objetos propios, es decir, como cosas que pueden figurar como argumentos de cualquier función de primer nivel, sólo nos queda ver los nombres de clase como pseudonombres propios [*Scheineigennamen*], los cuales en verdad no tendrían ninguna referencia. Habría más bien que verlos como partes de signos que tendrían referencia únicamente cuando se los considerase como un todo.[2] Podría ciertamente tenerse por ventajoso para ciertos propósitos formar signos distintos que coincidan parcialmente sin por ello llegar a convertirlos en compuestos. La simplicidad de un signo requiere únicamente que las partes componentes que se pueden distinguir en él no tengan aisladamente una referencia. Si esto es así, incluso aquello que estamos acostumbrados a ver como signos numéricos no serían propiamente signos, sino partes no separables de signos. Una explicación del signo "2" sería imposible; en lugar de eso, habría que explicar muchos signos que contuviesen "2" como parte no separable, pero que no podrían verse como lógicamente compuestos de "2" y otra parte. Sería, pues, inadmisible permitir la representación de esa parte no separable por medio de una letra, ya que en lo que concierne al contenido no habría composición alguna. De esta forma, se perdería la generalidad de las proposiciones aritméticas. Tampoco resultaría inteligible cómo podríamos hablar del número cardinal de una clase, del número cardinal de los números cardinales.

Pienso que basta con esto para mostrar que este camino es también impracticable. No nos queda otra que reconocer las extensiones de conceptos o clases como objetos de pleno

[2] Véase el vol. I, § 29.

derecho, en el sentido propio de la palabra, pero conceder al mismo tiempo que la interpretación dada hasta ahora a la expresión "extensión de un concepto" necesita una corrección.

Antes de adentrarnos más en materia, sería útil investigar el origen de la contradicción en términos de nuestra notación. Que Δ es una clase que no pertenece a sí misma puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!-\mathfrak{g}(\Delta) \\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \Delta \end{array}$$

Y la clase de las clases que no pertenecen a sí mismas será designada así:[3]

$$\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!-\mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)$$

En la siguiente deducción usaré el signo "$\forall$" como abreviatura de esto último y omitiré la barra de juicio debido a la dudosa verdad. Por consiguiente, mediante

$$\text{“}\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!-\mathfrak{g}(\forall) \\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array}\text{”}$$

expresaré que la clase $\forall$ no pertenece a sí misma.*

De acuerdo con (Vb),† tenemos ahora que

$$\begin{array}{l} \top\!(-f(\forall)) = \begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!-\mathfrak{g}(\forall) \\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array} \\ \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!-\mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) \end{array}$$

[3] Para el uso de las letras griegas, véase volumen I, § 9.

* En el texto original hay una errata, pues dice justo lo contrario: "que la clase $\forall$ pertenece a sí misma". En la traducción de P. Geach al inglés se consigna esta errata. [N. del t.]

† Los números romanos entre paréntesis seguidos de letras minúsculas, son usados por Frege para referirse a teoremas o leyes derivadas probadas previamente en el sistema que expone en el propio texto de *Las leyes fundamentales*, para el caso de (Vb) véase el vol. I, § 52. [N. del t.]

o, si usamos la abreviatura y aplicamos (IIIa):

$$\begin{array}{l}
f(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-f(\varepsilon)) = \forall \\
\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall
\end{array} \qquad (\alpha$$

Ahora, introducimos la letra gótica "$\mathfrak{g}$" en lugar de "f":

$$\begin{array}{l}
\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall \\
\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall
\end{array} \qquad (\beta$$

esto es, si $\forall$ no pertenece a sí misma, entonces pertenece a sí misma.* Ésta es una de las direcciones.

En la otra dirección, por (IIb) tenemos:

$$\begin{array}{l}
f(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-f(\varepsilon)) = \forall \\
\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall
\end{array} \qquad (\gamma$$

y, si sustituimos "$f(\xi)$" por esta otra expresión:

$$\text{“}\ \begin{array}{l}
\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\xi) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \xi
\end{array}\ \text{”},$$

entonces tenemos:

$$\begin{array}{l}
\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall \\
\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\varepsilon) \\ \quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) = \forall \\
\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall
\end{array} \qquad (\delta$$

* También aquí hay otra errata en el original alemán, que corregimos, pues dice "si $\forall$ pertenece a sí misma, entonces no pertenece a sí misma". Esta errata fue señalada en la traducción al inglés de P. Geach y M. Black. [N. del t.]

y, tomando en consideración nuestra abreviatura, llegamos a:

$$\begin{array}{l}
\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall \\
\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall
\end{array} \qquad (\varepsilon$$

esto es, si $\forall$ pertenece a sí misma, entonces no pertenece a sí misma.* De (ε) se sigue, según (Ig):

$$\begin{array}{l}
\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall
\end{array} \qquad (\zeta$$

y, de esto y de (β), se sigue:

$$\begin{array}{l}
\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mathfrak{g}\,(\forall) \\
\quad \acute{\varepsilon}\,(-\!\!-\mathfrak{g}\,(\varepsilon)) = \forall
\end{array} \qquad (\eta$$

Las proposiciones (ζ) y (η) se contradicen. El único lugar donde puede residir el error es en nuestra ley (Vb), que por tanto debe ser falsa.

Queremos ver ahora cómo se estructura la cosa al usar nuestro signo "$\frown$". En lugar de "$\forall$" estará "$\acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$". Si en (82)† sustituimos "$f(\xi)$" por "$\top\,\xi\frown\xi$", "$F(\xi)$" por "$-\!\!-\,\xi$" y "a" por "$\acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$", obtenemos:

$$\begin{array}{l}
\top\ \acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \\
\quad \acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)
\end{array} \qquad (\theta$$

de lo cual, a partir de (Ig), se sigue:

$$\top\ \acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\acute{\varepsilon}\ (\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \qquad (\iota$$

* Vuelve a haber otra errata en el original, pues éste dice ahora: "si $\forall$ no pertenece a sí misma, entonces pertenece a sí misma". [N. del t.]

† Se refiere a la fórmula en *Las leyes fundamentales*, vol. I, § 91:

$$\begin{array}{l}
\vdash F(f(a)) \\
\quad F(a\frown\acute{\varepsilon}\ f(\varepsilon))
\end{array} \quad .$$

[N. del t.]

Haciendo las mismas sustituciones, a partir de (77) obtenemos:

$$\begin{array}{l} \top\!\!-\; \dot{\varepsilon}\,(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\dot{\varepsilon}\,(\top\varepsilon\frown\varepsilon) \\ \llcorner\!\top\; \dot{\varepsilon}\,(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\dot{\varepsilon}\,(\top\varepsilon\frown\varepsilon) \end{array} \qquad (\kappa$$

De lo que, con (ι), se sigue:

$$-\; \dot{\varepsilon}\,(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\dot{\varepsilon}\,(\top\varepsilon\frown\varepsilon) \qquad (\lambda$$

que contradice (ι). Por tanto, al menos una de las dos proposiciones (77) y (82)* debe ser falsa, así como también (1), de la que ambas se siguen. Si se revisa la deducción de (1) en el § 55 del vol. I [de *Las leyes fundamentales*], queda claro que también ahí se hace uso de (Vb). Sobre esta proposición también recae la sospecha. Al caer (Vb) también cae (V), pero no (Va). No hay nada que impida nuestra transformación de una igualdad válida con generalidad en una igualdad de rango de valores; únicamente se ha hecho patente que la transformación inversa no siempre es legítima. Con esto se reconoce sin duda que mi introducción de los rangos de valores en § 3 del primer volumen [de *Las leyes fundamentales*] no siempre es legítima. No podemos en general pretender que las palabras:

> "la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo rango de valores que la función $\Psi(\xi)$"

sean correferenciales con estas otras:

> "las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ siempre tienen el mismo valor para el mismo argumento",

y tenemos que contemplar la posibilidad de que haya conceptos (al menos en el sentido usual) sin ninguna extensión. De esta suerte, la legitimidad de nuestra función de segundo nivel $\dot{\varepsilon}\,\varphi(\varepsilon)$ se ve trastocada. Y, aún así, esa función resulta indispensable para la fundamentación de la aritmética.

* Para las proposiciones (77) y (82), véase *Las leyes fundamentales*, vol. I, § 91. Se trata, respectivamente, de:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; F(a\frown\dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon)) \\ \quad\llcorner\; F(f(a)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; F(f(a)) \\ \quad\llcorner\; F(a\frown\dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon))\,. \end{array}$$

[N. del t.]

Queremos completar nuestra investigación de manera que lleguemos a la falsedad de (Vb) como resultado final, en lugar de partir de (Vb) y llegar a una contradicción. Para no depender de los aún sospechosos signos de rango de valores, llevaremos a cabo la deducción de manera enteramente general para una función de segundo nivel con un argumento del segundo tipo,[4] haciendo uso de nuestra notación en el vol. I, § 25. De acuerdo con esto, nuestra combinación de signos

$$\text{“}\,\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad\llcorner\; \dot{\varepsilon}\,(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)\text{”}$$

es sustituida por

$$\text{“}M_{\beta}\left(\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(\beta) \\ \qquad\llcorner\; M_{\beta}(-\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta \end{array}\right)\text{”}$$

a la que se habrán de aplicar análogamente las especificaciones que establecimos para los signos de rangos de valores en el vol. I, § 9 para el alcance de una letra griega. Hemos usado dos veces una "M" en nuestra fórmula, la primera al principio, la segunda en el interior. En el lugar del argumento de la primera está la marca de función:

$$\text{“}\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(\xi) \\ \qquad\llcorner\; M_{\beta}(-\,\mathfrak{g}(\beta)) = \xi \end{array}\text{”}$$

y en la segunda, en el lugar del argumento, está "$-\,\mathfrak{g}(\xi)$". Primeramente, se obtiene lo siguiente:

$$\text{IIb}\;\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\!\top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(a) \\ \qquad\qquad\llcorner\; M_{\beta}(-\,\mathfrak{g}(\beta)) = a \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!-\; M_{\beta}\left(\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(\beta) \\ \qquad\llcorner\; M_{\beta}(-\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta \end{array}\right) = a \\ \llcorner\!\!-\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(a) \\ \qquad\qquad\llcorner\; M_{\beta}(-\,\mathfrak{g}(\beta)) = a \end{array}$$

$$\times$$

[4] Véase el volumen I, § 23, p. 40.

$$\vdash\begin{array}{l}\neg\, M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\end{array}\qquad(\mu$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l}\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\\ M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\end{array}\qquad(\nu$$

Si empleamos la abreviatura “$\Phi(\xi)$” en lugar de

$$\text{“}\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\xi)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\xi\end{array}\text{”}$$

y “$M_\beta(\Phi(\beta))$” en lugar de “a”, a partir de(ν) obtenemos:

$$\Phi(M_\beta(\Phi(\beta))),$$

esto es, el valor de nuestra función de segundo nivel para el concepto $\Phi(\xi)$ cae precisamente bajo este concepto. Por otro lado, a partir de (ν) también tenemos:

$$\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(M_\beta(\Phi(\beta)))\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=M_\beta(\Phi(\beta))\end{array}$$

esto es, hay un concepto para el cual, tomado como argumento, nuestra función de segundo nivel da el mismo valor que para $\Phi(\xi)$, pero bajo el cual no cae este valor. En otras palabras: para cualquier función de segundo nivel con un argumento del segundo tipo, hay dos conceptos que dan el mismo valor cuando son tomados como argumentos de esa función y este valor cae bajo el primero de estos conceptos, pero no bajo el segundo.

En nuestra notación conceptográfica, podemos derivar esto de la siguiente manera:

$$\nu'\qquad\vdash\begin{array}{l}\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\\ M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\end{array}$$

(IIIa) : ————————————————————————

$$\vdash\begin{array}{l}f(a)\\ M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ f(a)=\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\end{array}\qquad(\xi$$

(IIb) : : -

$$\vdash\begin{array}{l}f(a)\\ M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ M_\beta(-f(\beta))=M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)\\ \overset{\mathfrak{F}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{F}(a)=\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\\ M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta))=M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)\end{array}\end{array}\qquad(o$$

(IIb, IIIa) : : ==========================

$$\vdash\begin{array}{l}f(a)\\ M_\beta(-f(\beta))=a\\ M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ \overset{\mathfrak{G}}{\smile}\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{F}(a)=\mathfrak{G}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta))=M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))\end{array}\end{array}\qquad(\pi$$

$$\vdash \left[\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(a) \\ \quad M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{g}(\beta)) = a \\ M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right) = a \\ \smile^{\mathfrak{G}}\smile^{\mathfrak{F}} \begin{array}{l}\mathfrak{F}(a) = \mathfrak{G}(a) \\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{G}(\beta))\end{array}\end{array}\right] \qquad (\rho$$

(μ) : -

$$\vdash \left[\begin{array}{l} M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right) = a \\ M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right) = a \\ \smile^{\mathfrak{G}}\smile^{\mathfrak{F}} \begin{array}{l}\mathfrak{F}(a) = \mathfrak{G}(a) \\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{G}(\beta))\end{array}\end{array}\right] \qquad (\sigma$$

(Ig) : -

$$\vdash \left[\begin{array}{l} M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right) = a \\ \smile^{\mathfrak{G}}\smile^{\mathfrak{F}} \begin{array}{l}\mathfrak{F}(a) = \mathfrak{G}(a) \\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{G}(\beta))\end{array}\end{array}\right] \qquad (\tau$$

(IIa) : : -

$$\vdash \left[\begin{array}{l} M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right) = a \\ \smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{G}}\smile^{\mathfrak{F}} \begin{array}{l}\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{a}) \\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{G}(\beta))\end{array}\end{array}\right] \qquad (\upsilon$$

×

$$\vdash \left[\begin{array}{l} \neg\smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{G}}\smile^{\mathfrak{F}} \begin{array}{l}\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{a}) \\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{G}(\beta))\end{array} \\ M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right) = a\end{array}\right] \qquad (\varphi$$

———•———

IIIe

$$\vdash M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right) = M_\beta\left(\neg\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\end{array}\right)$$

(φ) : ————————————————————

$$\vdash \neg\smile^{\mathfrak{g}}\smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{G}}\smile^{\mathfrak{F}} \begin{array}{l}\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{a}) \\ M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(\text{—}\,\mathfrak{G}(\beta))\end{array} \qquad (\chi$$

esto es, para cada función de segundo nivel con un argumento del segundo tipo, hay conceptos tales que, tomados como sus argumentos, dan el mismo valor, aun cuando no todos los objetos que caen bajo uno de estos conceptos caigan también bajo el otro.

Nuestra prueba ha sido llevada a cabo sin el uso de proposiciones o signos cuya legitimidad fuera cuestionada de algún modo. Así, nuestra proposición es también válida, en particular, para la función de segundo nivel $\grave{\varepsilon}\ \varphi(\varepsilon)$, en caso de que sea legítima, o dicho en palabras:

Si para cada concepto de primer nivel se puede hablar en general de su extensión, entonces ocurre que hay conceptos que tienen la misma extensión, aunque no todos los objetos que caen bajo uno de esos conceptos caigan también bajo el otro.

Con ello, sin embargo, resulta realmente abolida la extensión de un concepto en el sentido que suele darse a esta expresión. No se puede decir que, en general, la expresión "la extensión de un concepto coincide con la de otro" se refiere a lo mismo que la expresión "todos los objetos que caen bajo el primer concepto caen también bajo el segundo y *viceversa*". A partir del resultado de nuestra deducción, vemos que resulta imposible dar a las palabras "la extensión del concepto $\Phi(\xi)$" un sentido tal que de la igualdad de extensión de conceptos pueda inferirse en general que todo objeto que cae bajo uno cae también bajo el otro.

Podemos igualmente llegar a nuestra proposición por otra vía, a saber, la siguiente:

IIb

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(a) \\ \quad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = a \\ \quad \llcorner\, M_\beta\left(\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\beta) \\ \quad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = \beta \end{array}\right) = a \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(a) \\ \qquad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = a \end{array}$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!\top\, M_\beta\left(\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\beta) \\ \quad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = \beta \end{array}\right) = a \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(a) \\ \qquad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = a \end{array} \qquad (\psi$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(a) \\ \quad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = a \\ \quad \llcorner\, M_\beta\left(\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\beta) \\ \quad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = \beta \end{array}\right) = a \end{array} \qquad (\omega$$

Si introducimos "$\Psi(\xi)$" como abreviatura de la siguiente expresión:

$$\text{“}\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\xi) \\ \quad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = \xi \end{array}\text{”}$$

y, en lugar de "a" ponemos la expresión "$M_\beta(\Psi(\beta))$". Entonces, a partir de (ω), obtenemos:

$$\top\, \Psi(M_\beta(\Psi(\beta)))$$

esto es, el valor de nuestra función de segundo nivel para el argumento $\Psi(\xi)$ no cae bajo el concepto $\Psi(\xi)$. Pero, por otro lado, a partir de ω también obtenemos:

$$\begin{array}{l} \top\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(M_\beta(\Psi(\beta))) \\ \quad \llcorner\, M_\beta(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\beta)) = M_\beta(\Psi(\beta)) \end{array}$$

esto es, hay un concepto, para el cual, tomado como argumento, nuestra función de segundo nivel da el mismo valor que para $\Psi(\xi)$ y bajo el cual cae ese valor. También aquí tenemos dos conceptos tales que, tomados como argumentos de la función de segundo nivel, dan el mismo valor, el cual cae bajo el segundo de estos conceptos, pero no bajo el primero. De la proposición (ω) podemos derivar el enunciado (χ) de manera parecida a como lo hicimos a partir de (ν).

Intentemos ahora tomar la función $\dot{\varepsilon}(\!-\!\!-\!\varphi(\varepsilon))$ como la función de segundo nivel de nuestras proposiciones. Entonces, en

$$\begin{array}{l} \top\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\xi) \\ \quad \llcorner\, \dot{\varepsilon}(\!-\!\!-\!\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \xi \end{array}$$

tenemos un concepto bajo el cual cae su propia extensión. Sin embargo, por (ν), hay un concepto cuya extensión coincide con el que acabamos de mencionar, pero bajo el cual no cae la extensión en cuestión. Quisiéramos tener un ejemplo de esto. ¿Cómo podríamos encontrar tal concepto? No es posible sin especificar de forma más precisa nuestra función $\dot{\varepsilon}(\!-\!\!-\!\varphi(\varepsilon))$ o la extensión de un concepto, pues el criterio que hasta ahora nos había servido para determinar la coincidencia de extensiones de conceptos nos deja aquí plantados.

Por otra parte, en

$$\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\xi) \\ \quad \llcorner\, \dot{\varepsilon}(\!-\!\!-\!\mathfrak{g},(\varepsilon)) = \xi \end{array}$$

tenemos un concepto bajo el cual no cae su propia extensión. Sin embargo, por (ω), existe un concepto cuya extensión coincide con la del que acabamos de mencionar, pero bajo el cual cae aquella extensión. Todo esto, naturalmente, bajo el supuesto de que el nombre de función "$\dot{\varepsilon}(\!-\!\!-\!\varphi(\varepsilon))$" esté justificado lógicamente.

En ambos casos vemos que la extensión conceptual misma trae consigo la excepción, ya que sólo cae bajo uno de los dos conceptos que lo tienen como extensión. Y vemos que esta excepción no puede ser evitada en modo alguno. Según esto, se hace fácil presentar como criterio de igualdad extensional el

siguiente: la extensión de un concepto coincide con la de otro cuando todo objeto que cae bajo el primero, excepto la extensión del primer concepto, cae también bajo el segundo y, a la inversa, cuando todo objeto que cae bajo el segundo concepto, excepto la extensión del segundo concepto, cae también bajo el primero.

Obviamente, esto no puede tomarse como una definición de la extensión de un concepto, sino, más bien, sólo como la especificación de la constitución característica de esta función de segundo nivel.

Si transferimos lo dicho acerca de las extensiones conceptuales a los rangos de valores en general, llegamos a la siguiente ley fundamental:

$$\vdash (\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha}\, g(\alpha)) = \smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \\ \top\, \mathfrak{a} = \dot{\varepsilon} f(\varepsilon) \\ \top\, \mathfrak{a} = \dot{\alpha}\, g(\alpha) \end{array} \qquad \text{(V'}$$

que reemplaza la ley fundamental (V) (vol. I, § 20, p. 36). De esta ley, se sigue (Va). Por su parte, (Vb) debe conducirnos a una de las siguientes proposiciones:

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ \top\, a = \dot{\varepsilon} f(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha}\, g(\alpha) \end{array} \qquad \text{(V'b}$$

o

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ \top\, a = \dot{\alpha}\, g(\alpha) \\ \dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha}\, g(\alpha) \end{array} \qquad \text{(V'c}$$

Convenzámonos ahora de que se evita la contradicción que afloraba antes entre los enunciados (β) y (ε). Procedemos como antes en la deducción de (β), usando (V'c) en lugar de (Vb). De nuevo, sea "$\forall$" la abreviatura de

$$\text{“}\, \dot{\varepsilon} \left(\top\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array} \right) \text{”} \; .$$

Por (V'c), tenemos que

$$\vdash \begin{array}{l} (-f(\forall)) = \top\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\forall) \\ \dot{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array} \\ \top\, \forall = \dot{\varepsilon} \left(\top\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array} \right) \\ \dot{\varepsilon}(-f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon} \left(\top\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array} \right) \end{array}$$

Haciendo uso de la abreviatura, obtenemos:

$$\vdash \begin{array}{l} (-f(\forall)) = \top\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\forall) \\ \dot{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array} \\ \top\, \forall = \forall \\ \dot{\varepsilon}(-f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon} \left(\top\smile^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array} \right) \end{array}$$

que resulta obvio en virtud del subcomponente "$\top \forall = \forall$" y precisamente por ello no puede conducir nunca a una contradicción.

Habíamos estipulado (en vol. I, p. 17) que la extensión de un concepto bajo el cual sólo cae lo verdadero debería ser lo verdadero y que la extensión de un concepto bajo el cual sólo cae lo falso debería ser lo falso. Estas determinaciones no sufren modificaciones tras la nueva caracterización de la extensión de un concepto.

¿Cómo afecta esta nueva caracterización a los valores de nuestra función $\backslash\xi$ si mantenemos las determinaciones en vol. I, § 11? Supongamos que $\Phi(\xi)$ es un concepto vacío. Entonces, según la anterior caracterización de la extensión de un concepto, $\backslash\, \dot{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$ coincide con $\dot{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$, ya que no había ningún objeto Δ tal que $\dot{\varepsilon}\, (\Delta = \varepsilon)$ coincidiese con $\dot{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$. Según la nueva caracterización de la extensión de un concepto, sí hay un objeto tal, a saber, $\dot{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$. El resultado es, sin embargo, otra vez el mismo, es decir, que $\backslash\, \dot{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$ coincide con $\dot{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$. Lo mismo va a resultar si $\dot{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$ es el único objeto que cae bajo

el concepto $\Phi(\xi)$. Si suponemos que Δ es el único objeto que cae bajo el concepto $\Phi(\xi)$, entonces $\backslash\,\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ coincide con Δ. Lo mismo sucede si, aparte de Δ, $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ es la única cosa que cae también bajo el concepto $\Phi(\xi)$; y aquí tiene lugar una diferencia con respecto a lo anterior, pues en este caso $\backslash\,\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ no habría coincidido con la anterior Δ, sino con $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$. En todos los otros casos, no hay ninguna diferencia entre la anterior y la nueva caracterización de la extensión de un concepto con respecto a los valores de la función $\backslash\xi$ y nuestra ley fundamental (VI) sigue siendo válida.

Queda aún por preguntarnos cómo afecta la nueva concepción del rango de valores a los valores de nuestra función $\xi \frown \zeta$. En el caso en que Γ sea un rango de valores, ahora no está determinado en todos los casos qué valor tiene una función cuyo rango de valores sea Γ, para el argumento Θ,[5] en particular no lo está en el caso en que Θ coincide con Γ. Puede haber, pues, funciones que tienen el mismo rango de valores, Γ, pero que para el argumento Γ tienen valores diferentes. Ahora, la extensión del concepto

$$\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\!\!\top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \xi \\ \qquad\;\llcorner\, \Gamma = \dot{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}$$

ya no puede coincidir con la extensión de un concepto como $\Delta = \xi$, pues Δ es el único objeto que cae bajo este último, mientras que bajo aquél caen todos los objetos. Pues, si Γ es un rango de valores y E es un objeto, siempre será posible proveer una función $X(\xi)$ tal que $\dot{\varepsilon}\,X(\varepsilon) = \Gamma$ y $X(\Gamma) = E$. Según lo estipulado en vol. I, § 11,

$$\backslash\,\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\!\!\top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \alpha \\ \qquad\;\llcorner\, \Gamma = \dot{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right)$$

coincide con

$$\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\!\!\top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \alpha \\ \qquad\;\llcorner\, \Gamma = \dot{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right)$$

[5] Véase el volumen I, p. 53.

Así, pues, si Γ es un rango de valores, entonces:

$$\Gamma \frown \Gamma = \dot{\alpha}\left(\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\!\!\top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \alpha \\ \qquad\;\llcorner\, \Gamma = \dot{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right)$$

Esto es, $\Gamma \frown \Gamma$ es la extensión de un concepto omniabarcante. Si Γ no es un rango de valores, entonces $\Gamma \frown \Gamma$ es la extensión de un concepto vacío. En el primer caso, $-\!\!-\,\Gamma \frown \Gamma$ es lo falso:

$$\Vdash\!\top\; \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon) \frown \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon) \qquad (\alpha'$$

Esto es importante para la función $\wp\,\xi$. En un primer momento, podría temerse que a conceptos con la misma extensión les corresponda, según nuestras estipulaciones, el mismo número cardinal, a pesar de que bajo uno cae un objeto más que bajo el otro, a saber, la extensión misma del concepto, de modo que, al fin y al cabo, uno obtendría un solo número cardinal finito. Sin embargo, el concepto $\Phi(\xi)$ no entra en consideración en lo que concierne a $\wp\,\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$, sino, más bien, $-\!\!-\,\xi \frown \dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$, y la extensión $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ no cae bajo este último, incluso si cae bajo el concepto $\Phi(\xi)$.

Si se repite la deducción de (1) (vol. I, § 55) con (V′b) en lugar de (Vb), se obtiene la proposición (1′) en lugar de (1):

$$\begin{array}{l} \Vdash\!\top\, f(a) = a \frown \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon) \\ \quad\llcorner\!\top\, a = \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon) \end{array} \qquad (1'$$

de la que se obtienen (77′) y (82′) en lugar de (77) y (82):

$$\begin{array}{l} \Vdash\!\top\!\top\, F(a \frown \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon)) \\ \quad\;\llcorner\, F(f(a)) \\ \quad\llcorner\!\top\, a = \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon) \end{array} \qquad (77' \qquad\qquad \begin{array}{l} \Vdash\!\top\!\top\, F(f(a)) \\ \quad\;\llcorner\, F(a \frown \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon)) \\ \quad\llcorner\!\top\, a = \dot{\varepsilon}\,f(\varepsilon) \end{array} \qquad (82'$$

Extraemos también otras consecuencias:

α' $\vdash\!\!\top\; \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$

(IIIa) : ———————————

$$\vdash\!\!\top\; a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$
$$\quad\llcorner\; a = \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \qquad (\beta'$$

(Ia) : - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\; f(a)$$
$$\quad\llcorner\; a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$
$$\quad\llcorner\; a = \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

(82′) : –·–·–·–·–·–·–·–·–·

$$\vdash\; f(a)$$
$$\quad\llcorner\; a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \qquad (82''$$

———————•———————

82″ $\vdash\!\!\top\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$

$$\quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$$

(Ig.) : ———————————

$$\vdash\!\!\top\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \qquad (\gamma'$$

Esto se sigue exactamente del mismo modo como (ι) más arriba. Con todo, no tiene aquí lugar una contradicción, como veremos ahora mismo. (γ') es un caso particular de (α').

77′ $\vdash\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$

$$\quad\llcorner\!\top\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$$
$$\quad\llcorner\!\top\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$$

$$\times$$

$$\vdash\; \grave{\varepsilon}\,\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon)$$
$$\quad\llcorner\!\top\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \qquad (\delta'$$

(γ') :: ———————————

$$\vdash\; \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top\,\varepsilon\frown\varepsilon) \qquad (\varepsilon'$$

(ε') es un caso particular de (IIIe). No ha surgido contradicción alguna.

Nos llevaría demasiado lejos continuar con las consecuencias del resultado de reemplazar a (V) por (V′). No se nos escapa que hay que añadir algunas cláusulas a muchas proposiciones; pero no hay que temer que de aquí se vayan a seguir dificultades esenciales para el curso de las pruebas. De todos modos, es necesario un examen de todas las proposiciones que hemos establecido hasta aquí.

La siguiente pregunta puede verse como el problema fundamental de la aritmética: ¿cómo aprehendemos objetos lógicos, en particular los números? ¿Qué nos justifica en reconocer los números como objetos? Si bien no se ha resuelto el problema en la medida en que lo pensé durante la redacción de este volumen, no dudo de que hemos encontrado el camino para resolverlo.

Jena, octubre de 1902.

Carta de Bertrand Russell a Gottlob Frege*

[16-6-1902]

Friday's Hill
Haslemere
16 de junio de 1902

Estimado colega:

Conozco su libro *Las leyes fundamentales de la aritmética* desde hace año y medio, pero sólo ahora me ha sido posible encontrar el tiempo para acometer el cuidadoso estudio que pretendo dedicar a su escrito. Estoy completamente de acuerdo con usted en todos los puntos centrales, particularmente en el rechazo de todo elemento psicológico de la lógica y en el valor que usted le otorga a la notación conceptual para los fundamentos de las matemáticas y la lógica formal, las cuales, por lo demás, no se diferencian mucho entre sí. En lo que respecta a muchas cuestiones de detalle, encuentro en usted discusiones, distinciones y definiciones que en vano busca uno en otros lógicos. Más concretamente, respecto de las funciones (véase el § 9 de su *Conceptografía*), he llegado, de manera independiente, a las mismas posiciones que usted, incluso en los detalles. He encontrado una dificultad sólo en un punto. Usted afirma (p. 17) que una función también podría constituir el elemento indefinido. Eso mismo creía yo antes, pero ahora me parece dudoso a causa de la siguiente contradicción: Sea w el predicado de ser un predicado que no se puede predicar de sí mismo. ¿Se puede

*Traducción de Xavier de Donato.

predicar *w* de sí mismo? De cada una de las respuestas se sigue su contradictoria. Por lo tanto, tenemos que concluir que *w* no es un predicado. De la misma manera, no hay ninguna clase (como un todo) de las clases que, como todos, no son miembros de sí mismas. De esto concluyo que, bajo determinadas circunstancias, un conjunto definible no conforma un todo.

Estoy en el proceso de terminar un libro sobre los principios de la matemática y me gustaría comentar su obra en él con mucho detalle. Ya tengo sus libros, o los compraré muy pronto, pero le estaría enormemente agradecido si me pudiera enviar separatas de sus artículos en varias revistas. Pero si esto no fuese posible, me los procuraré de una biblioteca.

Está muy atrasado el tratamiento exacto de la lógica de aquellas cuestiones fundamentales donde los símbolos fallan; encuentro que el suyo es el mejor tratamiento que conozco en la actualidad y, por este motivo, me permito expresarle mi más profundo respeto. Es muy lamentable que no haya logrado publicar el segundo volumen de sus *Leyes fundamentales*, pero espero que aún lo haga.

Con los más atentos saludos,
Sinceramente suyo,

Bertrand Russell

PD: La contradicción a la que me refiero arriba se expresa de la siguiente manera en la notación de Peano:

$$w = \mathrm{cls} \frown x \ni (x \sim \varepsilon\, x) \,.\, \supset : w \,\varepsilon\, w \,.\, = \,.\, w \sim \varepsilon\, w.$$ [1]

He escrito a Peano sobre esto, pero todavía me debe la respuesta.

[1] Los editores de Frege 1969, vol. 2, observan que esta fórmula dice que si w es la clase de las x tales que $x \notin x$, entonces $w \in w \leftrightarrow w \notin w$. Russell toma la notación, en lo esencial inalterada, de G. Peano: *Formulaire de Mathématiques*, Tome II, § 2 (*Arithmétique*) (Turín, 1898), véase la fórmula 450 en la p. vii:

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, \supset .\, \mathrm{Cls}\, u = \mathrm{Cls} \frown x \ni (x \supset a) = \text{“clase de } u\text{” Df.}$$

"*a*" debe leerse en esta fórmula como "*u*"; véase *op. cit.*, sec. 1 (*Logique mathématique*) Turín 11.VIII.1897, p. 15, fórmula 450, cuya notación difiere de la elegida en § 2 por el uso de la letra "K" en lugar de "Cls" y de "$\overline{x\varepsilon}$" en lugar de "$x \ni$". [N. del t.]

CARTA DE GOTTLOB FREGE A BERTRAND RUSSELL*

[22-6-1902]

Jena, 22 de junio de 1902

Estimado colega,

¡Muchas gracias por su interesante carta del 16 de junio! Me alegra que esté usted de acuerdo conmigo en muchos puntos y que quiera examinar mi obra con detalle. De acuerdo con su deseo, aquí le envío copia de las siguientes separatas:

1) "Elucidación crítica etc."
2) "Sobre la notación del Sr. Peano, etc."
3) "Sobre concepto y objeto"
4) "Sobre sentido y referencia"
5) "Sobre teorías formales de la aritmética"

He recibido un sobre vacío cuya dirección parece haber sido escrita por su propia mano. Supongo que ha tenido la intención de enviarme algo que, por accidente, se ha perdido. Si éste es el caso, le agradezco la amable intención. Con la presente le adjunto la cara del sobre.

Cuando leo de nuevo mi *Conceptografía*, encuentro que he cambiado de opinión en algunos puntos, como podrá comprobar si lo compara con *Las leyes fundamentales de la aritmética*. Le pido, por favor, tache el párrafo de la p. 7 [§ 5] de mi *Conceptografía* que comienza con "Resulta igualmente fácil reconocer",

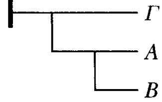
*Traducción de Xavier de Donato revisada.

dado que contiene un error, lo que, dicho sea de paso, no acarrea consecuencias indeseables para el subsecuente contenido de mi librito.*

Su descubrimiento de la contradicción me ha sorprendido enormemente y casi debería decir que me ha dejado estupefacto, ya que ha hecho temblar los cimientos sobre los que había pretendido edificar la aritmética. De acuerdo con esto, parece que la transformación de la generalidad de una identidad en una identidad de rango de valores (véase *Las leyes fundamentales* § 9) no siempre es permisible, que mi ley V (§ 20, p. 36) es falsa y que mis explicaciones en § 31 no bastan para asegurar referencia a mis combinaciones de signos en todos los casos. Debo reflexionar aún sobre este particular. La cuestión es tan seria como que el derrumbe de mi ley V parece minar no sólo los fundamentos de mi aritmética, sino incluso los únicos fundamentos posibles de la aritmética en cuanto tal. Y a pesar de esto, debiera yo pensar que tiene que ser posible establecer condiciones para la transformación de la generalidad de una identidad en una identidad de rango de valores, de modo que se pueda mantener lo esencial de mis pruebas. En cualquier caso, su descubrimiento es extraordinario y acaso conlleve un gran progreso para la lógica, a pesar de lo indeseable que pueda parecer a primera vista.

Por lo demás, la expresión "Un predicado se predica de sí mismo" no me parece exacta. Un predicado es, por regla general, una función de primer nivel, que requiere un objeto como argumento y que, en consecuencia, no puede tenerse a sí mismo como argumento (sujeto). Por tanto, preferiría decir en su

* Los editores de Frege 1969, vol. 2, señalan que el error se halla en la primera frase del pasaje donde Frege explica que la fórmula:



"niega el caso en que B es afirmada, pero A y Γ son negadas" (*Conceptografía* § 5). El error ya fue advertido por Ernst Schröder en la p. 88 de su recensión de la *Conceptografía* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 25, 1880, pp. 81–94) con la suposición verosímil de que Frege pasó por alto el segundo signo de negación en la lectura de una fórmula que, correctamente leída, debería haber llevado a "no (no (B y no A)) y no Γ". [N.del t.]

lugar: "Un concepto se predica de su propia extensión". Cuando la función $\Phi(\xi)$ es un concepto, designo su extensión (o la clase correspondiente) mediante "$\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$" (por cierto que la justificación de esto me parece ahora dudosa). En "$\Phi(\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon))$" o "$\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$" tenemos, pues, la predicación del concepto $\Phi(\xi)$ de su propia extensión.

El segundo volumen de mis *Leyes fundamentales* está por aparecer en breve. Deberé incluir en él un apéndice, donde haré justicia a su descubrimiento. ¡Si tan sólo pudiera encontrar la manera adecuada de encararlo!

Lo saludo afectuosamente
Sinceramente suyo,

G. Frege

BIBLIOGRAFÍA

OBRAS DE GOTTLOB FREGE*

1873, *Über eine geometrische Darstellung des imaginären Gebilde in der Ebene* ["Sobre una representación geométrica de formas imaginarias en el plano"], tesis doctoral, A. Neuenham, Jena. Recogido en Frege 1967.

1874, *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffs gründen* ["Métodos de cálculo basados sobre una extensión del concepto de cantidad"], Friedrich Frommann, Jena. Recogido en Frege 1967.

1878, "Über eine Weise, die Gestalt des Dreiecks als complexe Grösse aufzufassen" ["Sobre una manera de concebir la figura de un triángulo como una cantidad compleja"], *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, vol. 12, no. supl., p. XVIII.

1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [*Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, construido a semejanza del lenguaje aritmético, para el pensamiento puro*], Louis Nebert, Halle. (Versión en castellano en esta antología.)

1879, "Anwendungen der Begriffsschrift" ["Aplicaciones de la conceptografía"], *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, vol. 13, no. supl. II, pp. 29–33.

1882, "Über den Briefwechsel Leibnizens und Huygens mit Papin" ["Sobre la correspondencia de Leibniz y de Huygens con Papin"], *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, vol. 15, no. supl. (1881/1882), pp. 29–32.

1882, "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift" ["Sobre la justificación científica de una conceptografía"], *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, N.F.*, vol. 81, pp. 48–56. (Versión en castellano en esta antología.)

* Esta lista incluye las primeras ediciones originales de las obras publicadas en vida de Frege, pero no las cartas ni las recensiones.

1882, "Über den Zweck der Begriffsschrift" ["Sobre el propósito de la conceptografía"], *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, vol. 16, no. supl. I, pp. 1-10.
1884, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* [*Los fundamentos de la aritmética. Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*], W. Koebner, Breslau. (Versión en castellano en esta antología.)
1884, "Geometrie der Punktpaare in der Ebene" ["Geometría de pares de puntos en el plano"], *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, vol. 17, no. supl., pp. 98-102. Recogido en Frege 1967.
1886, "Über formale Theorien der Arithmetik" ["Sobre las teorías formales de la aritmética"], *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, vol. 19, no. supl. II, pp. 94-104.
1891, *Funktion und Begriff* ["Función y concepto"], Hermann Pohle, Jena, II, 31 S. (Versión en castellano en esta antología.)
1891, "Über das Trägheitsgesetz" ["Sobre la ley de la inercia"], *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, N.F.* vol. 98, pp. 145-161.
1892, "Über Sinn und Bedeutung" ["Sobre sentido y referencia"], *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, N.F.*, vol. 100, pp. 25-50. (Versión en castellano en esta antología.)
1892, "Über Begriff und Gegenstand" ["Sobre concepto y objeto"], *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie*, vol. 16, pp. 192-205. (Versión en castellano en esta antología.)
1893, *Grundgesetze der Arithmetik* [*Las leyes fundamentales de la aritmética*], vol. I, Hermann Pohle, Jena.
1895, "Le Nombre entier" ["El número entero"], *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 3, pp. 73-78.
1895, "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*" ["Elucidación crítica de algunas tesis de las *Conferencias sobre el álgebra de la lógica* de E. Schröder"], *Archiv für systematische Philosophie*, vol. 1, pp. 433-456.
1897, "Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene" ["De la conceptografía del señor Peano y la mía"], *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig: Mathematisch-physische Klasse*, vol. 48, pp. 361-378.
1899, "Über die Zahlen des Herrn H. Schubert" ["Acerca de los números del señor Schubert"], Hermann Pohle, Jena. Recogido en Frege 1967.
1903, *Grundgesetze der Arithmetik* [*Las leyes fundamentales de la aritmética*], vol. 2, Hermann Pohle, Jena. (Selección, traducida en este volumen.)

1903, "Über die Grundlagen der Geometrie" ["Sobre los fundamentos de la geometría"] (Primera Serie: Partes I y II), *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 12, parte I: pp. 319-324; parte II: pp. 368-375.
1904, "Was ist eine Funktion?" ["¿Qué es una función?"], en S. Meyer (comp.), *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904*, Barth, Leipzig, pp. 656-666. (Versión en castellano en esta antología.)
1906, "Über die Grundlagen der Geometrie" ["Sobre los fundamentos de la geometría"] (Segunda Serie: Partes I-III), *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 15, parte I: pp. 293-309; parte II: pp. 377-403; parte III: pp. 423-430.
1908, "Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen" ["Prueba renovada de la imposibilidad de la aritmética formal de Thomae"], *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 17, pp. 52-55. Schlussbemerkung: p. 56.
1918/1919, "Der Gedanke. Eine logische Untersuchung" ["El pensamiento. Una investigación lógica"], *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1, pp. 58-77. (Versión en castellano en esta antología.)
1918/1919, "Die Verneinung. Eine logische Untersuchung" ["La negación. Una investigación lógica"], *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1, pp. 143-157.
1923-1926, "Gedankengefüge" ["Pensamientos compuestos"], *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 3, pp. 36-51.
1967, *Kleine Schriften*, ed. I. Angelelli, Olms, Hildesheim (2a. ed., 1990).
1969, *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, 2 vols., eds. Hans Hermes, Friedrich Kambartel y Friedrich Kaulbach; Felix Meiner, Hamburgo. [Versión en inglés del vol. I: *Posthumous Writings*, traducción de Peter Long y Roger White, Blackwell, Oxford, 1979; del vol. II, selección y edición de Brian McGinness: *Frege's Philosophical and Mathematical Correspondence*, traducción de Hans Kaal, Blackwell, Oxford, 1980.]

BIBLIOGRAFÍA CITADA EN LA PRESENTACIÓN
Y LAS INTRODUCCIONES A LAS PARTES I, II Y III

Boolos, G., 1990, "The Standard of Equality of Numbers", en G. Boolos (comp.), *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 261–277.

———, 1971, "The Iterative Conception of Set", *Journal of Philosophy*, vol. 68, no. 8, pp. 215–231.

Blanchette, P.A., 2012, *Frege's Conception of Logic*, Oxford University Press, Oxford.

Burge, T., 2005, *Truth, Thought, Reason. Essays on Frege*, Oxford University Press, Oxford.

———, 1977, "Belief *De Re*", *Journal of Philosophy*, vol. 74, no. 6, pp. 338–362.

Burgess, J.P., 2005, *Fixing Frege*, Princeton University Press, Princeton.

Chalmers, D., 2000, "On Sense and Intension", *Philosophical Perspectives*, vol. 16, pp. 135–182.

Coffa, J.A., 1991, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dummett, M., 1981, *Frege: Philosophy of Language*, 2a. ed., Duckworth, Londres.

———, 1978, "Frege's Philosophy", incluido en su libro *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, Londres, pp. 87–115.

———, 1973, *Frege: Philosophy of Language*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Evans, G., 1982, *The Varieties of Reference*, Oxford University Press, Oxford.

———, 1981, "Understanding Demonstratives", en H. Parret y J. Bouveresse (comps.), *Meaning and Understanding*, De Gruyter, Berlín, 1981. (Las referencias a este artículo en este volumen son a la versión de G. Evans, *Collected Papers*, Oxford University Press, Oxford, 1985.) [Versión en castellano: "La comprensión de los demostrativos", en *Ensayos filosóficos*, traducción de Alejandro Tomasini, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 1996.]

Everett, A. y T. Hofweber (comps.), 2000, *Empty Names, Fiction and the Puzzle of Non-existence*, CSLI, Stanford.

Ezcurdia, M., 2003, "Introducing Sense", *Manuscrito*, vol. 26, no. 2, julio–diciembre de 2003, *Logic, Truth and Arithmetic. Essays on Gottlob Frege*, pp. 279–312.

———, 1997, "Dynamic and Coherent Thoughts", *European Review of Philosophy*, vol. 2, *Cognitive Dynamics*, pp. 105–139.

Ezcurdia, M., 1995, "Modos de presentación y modos de determinación", *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, vol. 27, pp. 57–96.

———, 1994, *Sense, Indexicals and Action*, tesis doctoral, University of London, Londres.

Frege, Gottlob, 1971, *Estudios sobre semántica*, traducción de Carlos Ulises Moulines, introd. Jesús Mosterín, Ariel, Barcelona.

———, 1923, "Investigaciones lógicas. Parte tres: composición de pensamientos"/"Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 3, 1923–1926, pp. 36–51.

———, 1918–1919, "El pensamiento. Una investigación lógica" / "Der Gedanke. Eine Logische Untersuchung", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1, 1918–1919. [Versión en castellano en este volumen.]

———, 1914?, "Carta a Jourdain", en *Gottlob Frege, Wissenschaftlicher Briefwechsel*, ed. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel y A. Veraart, Felix Meiner, Hamburgo, 1976, carta no. XXI/12. [Versión en castellano en este volumen.]

———, 1903, *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 2, Hermann Pohle, Jena.

———, 1893, *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1, Hermann Pohle, Jena.

———, 1892, "Sobre sentido y referencia" / "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 100, pp. 25–50. [Versión en castellano en este volumen.]

———, 1891, "Función y concepto" / "Funktion und Begriff", Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, Hermann Pohle Jena. [Versión en castellano en este volumen.]

———, 1884, *Los fundamentos de la aritmética: una investigación lógico-matemática / Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, W. Koebner, Breslau. [Versión en castellano en este volumen.]

———, 1879, *Conceptografía / Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle a.S. [Versión en castellano en este volumen.]

Goldfarb, Warren, 2001, "Frege's Conception of Logic", en J. Floyd y S. Shieh (comps.), *Future Pasts. The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, pp. 2–41.

Hale, B., y C. Wright, 2001, *The Reason's Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Clarendon, Oxford.

Heck, R., 2012, *Reading Frege's* Grundgesetze, Clarendon, Oxford.

———, 1993, "The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 58, pp. 579–601.

Kaplan, D., 1981, "Afterthoughts", en J. Almog, J. Perry y H. Wettstein (comps.), *Themes from Kaplan*, Oxford University Press, Oxford, 1989. [Versión en castellano: "Reflexiones posteriores", en M. Ezcurdia (comp.), *Los indéxicos y la semántica de Kaplan*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 2014, pp. 141–196.]

———, 1977, "Demonstratives", en J. Almog, J. Perry y H. Wettstein (comps.), *Themes from Kaplan*, Oxford University Press, Oxford, 1989. [Versión en castellano: "Demostrativos. Ensayo sobre la semántica, la lógica y la epistemología de los demostrativos y otros indéxicos", en M. Ezcurdia (comp.), *Los indéxicos y la semántica de Kaplan*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 2014, pp. 51–139.]

Kripke, S., 1980, *Naming and Necessity*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. [Versión en castellano: *El nombrar y la necesidad*, traducción de Margarita M. Valdés, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 1995.]

Macbeth, D., 2005, *Frege's Logic*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

MacBride, F., 2003, "Speaking with Shadows: A Study of Neo-Fregeanism", *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 54, pp. 103–163.

McDowell, J., 1977, "On the Sense and Reference of a Proper Name", *Mind*, vol. 86, pp. 159-185.

Millikan, R., 1991, "Perceptual Content and the Fregean Myth", *Mind*, vol. 100, pp. 439-59.

Parsons, C., 1965, "Frege's Theory of Number", en M. Black (comp.), *Philosophy in America*, Cornell University Press, Ithaca, pp. 180–203.

Peacocke, C., 1981, "Demonstrative Thought and Psychological Explanation", *Synthèse*, vol. 49, pp. 187–217.

Perry, J., 1977, "Frege on Demonstratives", *Philosophical Review*, vol. 86, pp. 474–497. [Versión en castellano en Margarita M. Valdés (comp.), *Pensamiento y lenguaje. Problemas en la atribución de actitudes proposicionales*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, 1996.]

Rayo, A., 2013, *The Construction of Logical Space*, Oxford University Press, Oxford.

Russell, B., 1905, "On Denoting", *Mind*, vol. 15, pp. 479–493.

Sainsbury, M., 2009, *Fiction and Fictionalism*, Routledge, Londres.

Salmon, N., 1986, *Frege's Puzzle*, The MIT Press, Cambridge, Mass.

Shapiro, S., 1991, *Foundations without Foundationalism*, Oxford University Press.

Sluga, Hans, 1980, *Gottlob Frege*, Routledge and Kegan Paul, Londres.

Soames, S., 2002, *Beyond Rigidity: The Unfinished Semantic Agenda of* Naming and Necessity, Oxford University Press, Oxford.

Sullivan, P., 2004, "Frege's Logic", en D. Gabbay y J. Woods (comps.), *Handbook of the History of Logic. Volume 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, Elsevier North-Holland, Ámsterdam, pp. 659–750.

Szabó, Z., 2012, "Compositionality", en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta, <http://plato.stanford.edu/archives/fall2013/entries/com positionality/>.

Tennant, N., 2014, "Logicism and Neologicism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta, <http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/logicism/>.

Wright, C., 1983, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen.

ALGUNOS ESTUDIOS RECIENTES SOBRE LA FILOSOFÍA DE GOTTLOB FREGE

Ávila del Palacio, A., 2014, *Vigencia de la definición fregeana de número. Una visión desde el empirismo*, Universidad Juárez del Estado de Durango/Plaza y Valdés, México.

Blanchette, P.A., 2012, *Frege's Conception of Logic*, Oxford University Press, Oxford.

Burge, T., 2005, *Truth, Thought, Reason: Essays on Frege*, Oxford University Press, Oxford.

Heck, R., 2011, *Frege's Theorem*, Oxford University Press, Oxford.

Horty, J., 2007, *Frege on Definitions: A Case Study of Semantic Content*, Oxford University Press, Nueva York.

Kanterian, E., 2012, *Frege: A Guide for the Perplexed*, Bloomsbury Publishing, Londres.

Lorenzo, J. de, 2010, *Fundamentos y enigmas en la matemática. De Kant a Frege*, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Mendelsohn, R., 2005, *The Philosophy of Gottlob Frege*, Cambridge University Press, Cambridge.

Nsonsissa, A., 2015, *Pensée et Composition des Pensées chez Frege*, Éditions Dianoia, París (Fondements de la Philosophie Contemporaine des Sciences).

Potter, M. y T. Ricketts (eds.), 2010, *The Cambridge Companion to Frege*, Cambridge University Press, Nueva York.

Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica, vol. 53, no. extraordinario 136, *Gottlob Frege's Puzzle. A Reexamination of the Cognitive Significance Phenomenon*, 2014.

Rosado Haddock, G.E., 2006, *A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege*, Ashgate, Aldershot.

Sullivan, A. (comp.), 2003, *Logicism and the Philosophy of Language: Selections from Frege and Russell*, Broadview Press, Peterborough.

Textor, M., 2011, *Routledge Philosophy Guidebook to Frege on Sense and Reference*, Routledge, Nueva York.

Travis, Ch., 2013, *Perception: Essays after Frege*, Oxford University Press, Oxford.

Vassallo, N. (comp.), 2003, *La filosofia di Gottlob Frege*, Franco Angeli Edizione, Milán.

APÉNDICE*

OBRAS CITADAS EN LOS ESCRITOS DE G. FREGE EN ESTE VOLUMEN

Achelis, Thomas, 1897, "Volkerkunde und Philosophie", reseña del libro de Alfred Vierkandt, *Naturvölker und Kulturvölker, en Beitrag sur Sozialphilosophie*, *Allgemeine Zeitung*, vol. 26, suplemento del 3 de febrero de 1897.

Baumann, Julius, 1868–1869, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik*, G. Reimer, Berlín, 2 vols.

Berkeley, George, 1732, *An Essay towards New Theory of Vision*, Aaron Rhames/Jeremy Pepyat, Dublín, 1709; 4a. ed., J. Tonson, Londres.

Cantor, Georg, 1883, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Teubner, Leipzig.

Cantor, Moritz Benedikt, 1855, *Grundzüge einer Elementarmathematik*, Heidelberg.

Czuber, Emanuel, 1898, *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung*, Teubner, Leipzig, 2 vols.

Dedekind, Richard, 1892, *Steigkeit und irrationale Zahlen*, 2a. ed., Vieweg und Sohn, Brunswick.

———, 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedrich Vieweg, Brunswick.

Erdmann, Benno, 1877, *Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie*, L. Voss, Leipzig.

———, 1892, *Logik*, Max Niemeyer, Halle a.S..

Eucken, Rudolf, 1879, *Geschichte der philosophischen Terminologie*, Veit, Leipzig.

Euklide, *Elemente*. [Euclides, *Elementos*.]

*La investigación bibliográfica de esta sección fue realizada por J. Alberto Barrañón C.

Fischer, Kuno, 1865, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, 2a. ed., F. Bassermann, Heidelberg.

Grassman, Hermann, 1860, *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*, vol- I, *Arithmetik*, R. Grassman, Stettin.

Hankel, Hermann, 1867, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leopold Voss, Leipzig.

———, 1870, "Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen", Abdruck aus dem Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870, Ludwig Friedrich Fues, Tubinga.

———, 1867, *Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihren Functionen*, Voss, Leipzig.

Heine, Eduard, 1872, "Die Elemente der Functionenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* [*Crelle's Journal*], no. 74, pp. 172–188.

Helmholtz, Hermann von, 1887, "Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet", en F. Vischer (comp.), *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, Fues, Leipzig, pp. 17–52.

Herbart, Johann Friedrich, 1851, *Umriss pädagogischer Vorlesungen*, 2a. ed., en *Johann Friedrich Herbart's Sämtliche Werke*, vol. 10, ed. Gustav Hartenstein, Voss, Leipzig, pp. 183–341.

Hesse, Ludwig Otto, 1872, *Die vier Species*, B.G. Teubner, Leipzig.

Hobbes, Thomas, 1668, *Examinatio et Emendatio Mathematicae Hodiernae qualis explicatur in libris Johannis Wallisii*, Andrea Crook, Londres, 1660; Ámsterdam, Blaeu.

Homer, *Odyssee*. [Homero, *La Odisea*.]

Husserl, Edmund, 1891, "Besprechung E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*", *Göttingischen Gelehrten Anzeigen*, 1 de abril de 1891, pp. 243–278.

Jevons, W. Stanley, 1879, *The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method*, 3a. ed., Macmillan, Londres.

Kant, Immanuel, 1868, *Kritik der reinen Vernunft*, ed. Gustav Hartenstein, Voss, Leipzig. [*Crítica de la razón pura*, traducción de Pedro Ribas, Alfaguara, Barcelona, 1988.]

———, 1868, *Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen*, en *Kant's Sämmtliche Werke*, ed. Gustav Hartenstein, Leopold Voss, Leipzig, vol. VIII, pp. 1–144. [*Lógica, un manual de lecciones*, versión castellana de María Jesús Vázquez Lobeira, Akal, Madrid, 2000.]

Kerry, Benno, 1885–1891, "Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung, I–VIII", serie de artículos publicados en *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie*.

Köpp, Gustav Adolf, 1887, *Schularithmetik*, Baerecke, Eisenach.

Kossak, Ernst, 1872, *Die Elemente der Arithmetik. Programm des Friedrichs-Wenderschen Gymnasiums*, Nicolai, Berlín.

Kronecker, Leopold, 1887, "Über den Zahlbegriff", en F. Vischer (comp.), *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, Fues, Leipzig.

Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1959, "Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis", en *Opera Philosophica Omnia*, Aalen, pp. 94–97. [Traducción al inglés en G.H.R. Parkinson (ed.), *Leibniz Logical Papers: A Selection*, Clarendon, Oxford, 1966.]

———, 1839–1840, *Nouveaux Essais sur l'entendement humaine*, en Leibniz, *Opera philosophica quae exstant Latina, Gallica, Germanica omnia*, ed. J.E. Erdmann. [Versión castellana de Javier Echeverría, *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*, Alianza, Madrid, 1992.]

Lipschitz, Rudolf, 1880, *Lehrbuch der Analysis*, Max Cohen und Sohn, Bonn; vol. I, 1877; vol. 2.

Locke, John, 1690, *Essay Concerning Human Understanding*, Elizabeth Holt/ Thomas Basset, Londres. [*Ensayo sobre el entendimiento humano*, versión castellana de Edmundo O'Gorman, Fondo de Cultura Económica, México, 1956.]

Mill, John Stuart, 1862–1863, *System der deductiven und inductiven Logik. Eine Darlegung der Principien wissenschaftlicher Forschung, insbesondere der Naturforschung*, traducción al alemán de J. Schiel, 2 vols., Vieweg, Brunswick. [*A System of Logic Ratiocinative and Inductive: Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation*, John Parker, Londres, 1843, 2 vols.]

Newton, Isaac, 1707, *Arithmetica Universalis*, William Whiston, Cambridge.

Peano, Giuseppe, 1898–1899, "Corrispondenza: Risposta [a Lettera del sig. G. Frege all'Editore]", *Rivista de Matematica*, vol. 6 (Fratelli Bocca, Turín).

———, 1897, *Formulaire de Mathématiques*, t. II, no. 1, *Logique mathématique*, Fratelli Bocca/Ch. Clausen, Turín.

———, 1898, *Formulaire de Mathématiques*, t. II, no. 2, *Arithmétique*, Fratelli Bocca/Ch. Clausen, Turín.

Schloemilch, Oskar, 1851, *Handbuch der algebraischen Analysis*, 2a. ed., F. Frommann, Jena.

Schröder, Ernst, 1880, "Anzeige von Freges *Begriffsschrift*", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 25, pp. 81–94.

———, 1873, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, B.G. Teubner, Leipzig.

Schröder, Ernst, 1895-1905, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, B.G. Teubner, Leipzig.

Spinoza, Baruch, 1830, Carta no. 50, a J. Jelles, en *Epistolae doctorum quorundam virorum ad Benedictum de Spinoza eiusdemque responsiones ad aliorum eius operum elucidationem non parum facientes*, en *Benedicti de Spinoza. Opera Philosophica Omnia*, ed. A. Gfroerer, J.B. Mezler, Stuttgart.

———, *Ethica ordine geometrico demonstrata*, 1677. [*Ética, demostrada según el orden geométrico*, traducción, introducción y notas de Vidal Peña García; notas y epílogo de Gabriel Albiac, Tecnos, Madrid, 2007.]

Stolz, Otto, 1885, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Teubner, Leipzig.

Stricker, Salomon, 1883, *Studien über Association der Vorstellungen*, Braumüller, Viena.

Thomae, Carl Johannes, 1880, *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, Louis Nebert, Halle; 2a. ed., 1898.

Trendelenburg, Friedrich Adolf, 1867, *Historische Beiträge zur Philosophie*, vol. 3, G. Bethge, Berlín.

Whitehead, Alfred North, y Bertrand Russell, 1910-1913, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 3 vols.

ÍNDICE

PARTE II. SEMÁNTICA

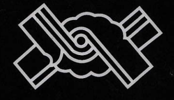
PARTE III. FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

Los *Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas* se terminaron de imprimir el 10 de abril de 2016 en los talleres de Impresión Comunicación Gráfica, S.A. de C.V. (Manuel Ávila Camacho 689, colonia Santa María Aztahuacán, C.P. 09500, Ciudad de México). Para su impresión, realizada en *offset*, se utilizó papel cultural de 90 g; en su composición y formación, realizadas por computadora, se utilizaron el programa LaTeX 2ε y tipos New Baskerville en 14, 10.5, 9.5 y 8.5 pt.

El tiraje consta de 1 000 ejemplares.

Margarita M. Valdés ha sido investigadora del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM desde 1972. Su interés en temas de lógica y de filosofía del lenguaje, así como su admiración por la obra de Gottlob Frege, la condujeron a proponer y coordinar este libro.

En esta colección tiene publicados los siguientes títulos como compiladora: *Pensamiento y lenguaje. Problemas en la atribución de actitudes proposicionales*, y, junto con Miguel Ángel Fernández, *Normas, virtudes y valores epistémicos. Ensayos de epistemología contemporánea.*



Gottlob Frege (Wismar, 1848–Bad Kleinen, 1925) es sin lugar a dudas el padre de la lógica contemporánea. Sus contribuciones más importantes a esta disciplina están contenidas en su breve libro, *Conceptografía*, incluido en esta antología, y han sido universalmente aceptadas. Entre ellas se cuentan la formalización de oraciones en términos de función y argumento (por oposición a la formalización aristotélica en términos de sujeto/predicado) y la concepción de los cuantificadores como funciones de funciones. El interés de Frege en la lógica nunca estuvo desligado de su interés por los fundamentos de la matemática. De hecho, lo que motiva la investigación lógica de Frege es su interés por encontrar una justificación pura, no empírica, para las proposiciones de la matemática. Frege concibe la matemática como una parte de la lógica; esto es, sostiene una posición logicista que expone en su formidable libro *Los fundamentos de la aritmética*, y que, más tarde, desarrolla en otro gran libro de su autoría, *Las leyes de la aritmética*.

Para llevar a cabo su programa logicista, Frege tuvo que incursionar en temas centrales de filosofía del lenguaje. Su legado en esta disciplina filosófica es también enorme. Su distinción entre el sentido y la referencia de una expresión lingüística, su concepción de las oraciones como nombres de lo Verdadero o lo Falso, su tratamiento de las oraciones subordinadas en contextos indirectos o en atribuciones de actitudes proposicionales, son de una originalidad sorprendente y han dado lugar a una bibliografía filosófica inmensa.

En este volumen se recogen las más importantes aportaciones de Gottlob Frege. El libro está dividido en tres partes correspondientes a las tres áreas de su interés: la lógica, la semántica y la filosofía de las matemáticas. Cada una de estas partes es prologada por un distinguido especialista en la materia: Mario Gómez Torrente (Lógica), Maite Ezcurdia (Semántica) y Agustín Rayo (Filosofía de las matemáticas).

ISBN 978-607-02-7823-2